



Analyse fonctionnelle

Convexité uniforme faible dans les espaces d'interpolation

*Weak uniform convexity in interpolation spaces*

Daher Mohammad

16, square Albert-Schweitzer, 77350 Le Mée-sur-Seine, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 12 février 2016

Accepté après révision le 12 septembre 2016

Disponible sur Internet le 19 septembre 2016

Présenté par le comité de rédaction

R É S U M É

Soit (A_0, A_1) un couple d'interpolation. On montre que, si A_0 est un espace WUR , A_θ l'est aussi. Si A_0^* est un espace faiblement LUR , alors $(A_\theta)^*$ l'est aussi, pour tout $\theta \in]0, 1[$.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let (A_0, A_1) be a complex interpolation couple. We show that, if A_0 is WUR , so is A_θ , $\theta \in]0, 1[$. Similarly, if A_0^* is weakly LUR , so is $(A_\theta)^*$.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit $\bar{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation. Les interpolés B_θ , $\theta \in]0, 1[$, conservent-ils une propriété géométrique donnée de B_0 (on dit alors que cette propriété s'interpole)? La réflexivité, la séparabilité, la convexité uniforme s'interpolent. On montre dans ce travail que la convexité uniforme faible, notée WUR , s'interpole. La question reste ouverte en toute généralité pour la propriété « faiblement localement uniformément convexe » (notée LUR), mais on montre que, si B_0^* est un espace LUR , alors les espaces $(B_\theta)^*$ le sont aussi. La preuve dans le deuxième cas est en partie analogue à celle du premier, mais plus élaborée.

2. Définitions et rappels

Soit $\bar{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation au sens de [2, chap. II]. Notons $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ et S_0 son intérieur. Désignons par $\mathcal{F}(\bar{B})$ l'espace des fonctions F à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues bornées sur S , holomorphes sur S_0 , telles que les applications $\tau \rightarrow F(j + i\tau)$ sont dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, B_j)$, $j \in \{0, 1\}$. On le munit de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\bar{B})} = \max\{\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{B_0}, \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(1 + i\tau)\|_{B_1}\}.$$

Soit $\theta \in]0, 1[$. L'espace $(B_0, B_1)_\theta = B_\theta = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}(\bar{B})\}$ est de Banach [2, Th. 4.1.2] pour la norme définie par

Adresse e-mail : m.daher@orange.fr.

$$\|a\|_{B_\theta} = \inf \left\{ \|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})}; F(\theta) = a \right\}.$$

Toute $F \in \mathcal{F}(\overline{B})$ est représentée à partir de ses valeurs au bord grâce à la mesure harmonique [2, Sections 4.3, 4.5] : si $z = \theta + it$, $\frac{Q_0(z, \cdot)}{1-\theta}$ et $\frac{Q_1(z, \cdot)}{\theta}$ sont des densités de probabilité sur \mathbb{R} et

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} F(i\tau) Q_0(z, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} F(1+i\tau) Q_1(z, \tau) d\tau, z \in S_0. \tag{2.1}$$

Notons $\mathcal{G}(\overline{B})$ l'espace des fonctions g à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues sur S , holomorphes à l'intérieur de S , telles que

- (i) $\sup_{z \in S} \frac{\|g(z)\|_{B_0+B_1}}{(1+|z|)} < \infty$,
- (ii) $g(j+i\tau) - g(j+i\tau') \in B_j, \forall \tau, \tau' \in \mathbb{R}, j \in \{0, 1\}$ et la quantité suivante est finie :

$$\|g\|_{Q\mathcal{G}(\overline{B})} = \max \left[\begin{array}{l} \sup_{\tau \neq \tau' \in \mathbb{R}} (\|g(i\tau) - g(i\tau')\|_{B_0} / |\tau - \tau'|), \\ \sup_{\tau \neq \tau' \in \mathbb{R}} (\|g(1+i\tau) - g(1+i\tau')\|_{B_1} / |\tau - \tau'|) \end{array} \right].$$

Ceci définit une norme sur l'espace $Q\mathcal{G}(\overline{B})$ quotient de $\mathcal{G}(\overline{B})$ par les applications constantes à valeurs dans $B_0 + B_1$ [2, Lemma 4.1.3]. L'espace $(B_0, B_1)^\theta = B^\theta = \{g'(\theta); g \in \mathcal{G}(\overline{B})\}$ est de Banach [2, Th. 4.1.4] pour la norme

$$\|a\|_{B^\theta} = \inf \left\{ \|g'\|_{Q\mathcal{G}(\overline{B})}; g'(\theta) = a \right\}.$$

On note $\mathcal{H}(B_0, B_1)$ l'espace des fonctions $F : S \rightarrow B_0 + B_1$, holomorphes sur S_0 , telles que $\tau \rightarrow F(j+i\tau)$ est fortement mesurable à valeurs dans B_j (au sens de [5, chap. 2]), $j \in \{0, 1\}$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\theta \in]0, 1[$, $\mathcal{F}_\theta^p(B_0, B_1)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{H}(B_0, B_1)$ des fonctions vérifiant (2.1) et telles que, si $p = +\infty$,

$$\|F\|_{\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)} = \max \{ \|F(i \cdot)\|_{L^\infty(Q_0(\theta, \cdot) d\tau, B_0)}, \|F(1+i \cdot)\|_{L^\infty(Q_1(\theta, \cdot) d\tau, B_1)} \},$$

ou, si $p < +\infty$,

$$\|F\|_{\mathcal{F}_\theta^p(B_0, B_1)}^p = \int_{\mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{B_0}^p Q_0(\theta, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} \|F(1+i\tau)\|_{B_1}^p Q_1(\theta, \tau) d\tau$$

soient finies. $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$ ne dépend pas de θ , car $Q_0(\theta, \cdot)$ et $Q_1(\theta, \cdot)$ sont continues strictement positives sur \mathbb{R} . Comme $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1) = \mathcal{F}_{\theta'}^\infty(B_0, B_1)$ isométriquement, on notera parfois $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1) = \mathcal{F}^\infty(B_0, B_1)$. $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ est isométriquement un sous-espace de $\mathcal{F}^\infty(B_0, B_1)$.

Rappelons que (B_0, B_1) est un couple régulier si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1 .

On utilisera, entre autres, les propriétés suivantes :

- 1) si (B_0, B_1) est un couple régulier, le dual de $(B_0, B_1)_\theta$ est $(B_0^*, B_1^*)^\theta$ [2, Th. 4.5.1];
- 2) d'après (2.1), pour toute $F \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$, on a

$$\|F(\theta)\|_{(B_0, B_1)_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}_\theta^1(\overline{B})} \leq \|F\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\overline{B})}; \tag{2.2}$$

- 3) pour $\theta \in]0, 1[$ notons $B_\theta^\infty = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)\}$, muni de la norme $\|b\|_{B_\theta^\infty} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)}; F(\theta) = b\}$. D'après [3, Prop. 2] $B_\theta = B_\theta^\infty$ isométriquement, donc $\|b\|_{(B_0, B_1)_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)}$ pour toute $F \in \mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$ telle que $F(\theta) = b$. Comme (2.1) reste valable par définition pour $F \in \mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$, (2.2) reste valable pour une telle F ;
- 3bis) la boule unité de $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ est dense dans celle de $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$ pour la norme de $\mathcal{F}_\theta^2(B_0, B_1)$. Cela résulte de la preuve de [3, Prop. 2].

Définition 2.1. Soit X un espace de Banach. C'est un espace faiblement uniformément convexe (WUR) (resp. faiblement localement uniformément convexe (faiblement LUR)) si, pour toutes suites $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ bornées dans X (resp. pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ bornée dans X et tout $x \in X$) telles que

$$\frac{\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2}{2} - \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

(resp. $\frac{\|x_n\|^2 + \|x\|^2}{2} - \left\| \frac{x_n + x}{2} \right\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$), alors $x_n - y_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ (resp. $x_n - x \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$) faiblement dans X .

La propriété WUR entraîne évidemment la propriété « faiblement LUR ».

3. Préliminaires

Le lemme 3.2 (conséquence du lemme 3.1) sera utilisé dans les preuves des théorèmes 4.1 et 5.3 ci-dessous.

Lemme 3.1. Soit (B_0, B_1) un couple régulier tel que les B_j sont séparables, $j \in \{0, 1\}$ et soit $G \in \mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$. Alors

- a) [4, Lemme 3.10] il existe des fonctions bornées : $\tau \rightarrow U_j(\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, $\mathbb{R} \rightarrow B_j^*$, mesurables pour $\sigma(B_j^*, B_j)$, telles que $G'(z) \rightarrow U_j(\tau)$ pour $\sigma(B_0^* + B_1^*, B_0 \cap B_1)$ lorsque $z \rightarrow j + i\tau$ non tangentiellement ;
- b) si $F \in \mathcal{F}^\infty(B_0, B_1)$, la fonction $\tau \rightarrow \langle F(j + i\tau), U_j(\tau) \rangle$ est mesurable et l'expression $\langle F(\theta), G'(\theta) \rangle$, $\theta \in]0, 1[$, est définie. De plus

$$|\langle F(\theta), G'(\theta) \rangle| \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |\langle F(i\tau), U_0(\tau) \rangle| \frac{Q_0(\theta, \tau)}{1 - \theta} d\tau \right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbb{R}} |\langle F(1 + i\tau), U_1(\tau) \rangle| \frac{Q_1(\theta, \tau)}{\theta} d\tau \right]^\theta. \tag{3.1}$$

Démonstration. b 1) Considérons d'abord $F \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$. Alors $\langle F(\theta), G'(\theta) \rangle$ est bien défini d'après le rappel 1) et les fonctions $\tau \rightarrow \langle F(j + i\tau), U_j(\tau) \rangle$ sont bornées d'après a). L'inégalité (3.1) est démontrée dans [4, Lemme 3.10, (3.13)] pour $F \in \mathcal{F}_0(B_0, B_1)$, défini dans [2, Lemme 4.2.3]. Les éléments de $\mathcal{F}_0(B_0, B_1)$ sont, en particulier, des combinaisons linéaires finies d'atomes $f \otimes b$, $b \in B_0 \cap B_1$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ; la mesurabilité des fonctions $\langle F(j + i\cdot), U_j(\cdot) \rangle$ est alors évidente. Comme $\mathcal{F}_0(B_0, B_1)$ est dense dans $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ d'après [2, Lemme 4.2.3], la mesurabilité de $\langle F(j + i\cdot), U_j(\cdot) \rangle$ lorsque $F \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$ et le passage à la limite dans (3.1) sont immédiats.

b 2) Soit $F \in \mathcal{F}^\infty(B_0, B_1) = \mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$. D'après le rappel 3, $F(\theta) \in B_\theta$, donc $\langle F(\theta), G'(\theta) \rangle$ est bien défini. D'après le rappel 3 bis, il existe une suite bornée $(F_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathcal{F}(B_0, B_1)$, convergeant vers F dans $\mathcal{F}_\theta^2(B_0, B_1)$. D'après la fin du rappel 3, $\|F_n(\theta) - F(\theta)\|_{B_\theta} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$; en particulier, $\langle F_n(\theta) - F(\theta), G'(\theta) \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Par ailleurs, il existe une sous-suite $(F_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que p.s. $\|F_{n_k}(j + i\cdot) - F(j + i\cdot)\|_{B_j} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$, $j \in \{0, 1\}$; en particulier, $\langle F_{n_k}(j + i\cdot) - F(j + i\cdot), U_j(\cdot) \rangle \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$, p.s. L'inégalité (3.1) étant vraie pour F_{n_k} , le passage à la limite est immédiat, en appliquant deux fois à droite le théorème de convergence dominée. □

Lemme 3.2. Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation, $\theta \in]0, 1[$ et $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$. Si p.s. $F_n(i\cdot) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, faiblement dans B_0 , alors $F_n(\theta) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ faiblement dans B_θ .

Démonstration. a) Réduction : on peut supposer les B_j séparables. En effet, les $F_n(j + i\cdot)$ sont p.s. à valeurs dans un sous-espace fermé séparable $B'_j \subset B_j$, $j \in \{0, 1\}$ et $\mathcal{F}_\theta^\infty(B'_0, B'_1)$ est isométriquement un sous-espace de $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$. Par ailleurs, l'identité : $(B'_0, B'_1)_\theta \rightarrow B_\theta$ étant contractante, la convergence faible dans $(B'_0, B'_1)_\theta$ implique la convergence faible dans B_θ .

Soit B'_j l'adhérence de $B_0 \cap B_1$ dans B_j , $j \in \{0, 1\}$. D'après [2, Th. 4.2.3] $\mathcal{F}(B_0, B_1) = \mathcal{F}(B'_0, B'_1)$. Vérifions que, isométriquement,

$$\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1) = \mathcal{F}_\theta^\infty(B'_0, B'_1).$$

Il est clair que $\mathcal{F}_\theta^\infty(B'_0, B'_1)$ est isométriquement un sous-espace de $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$. Il suffit donc de voir que $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}_\theta^2(B'_0, B'_1)$. Par le rappel 3 bis, $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ est dense dans $\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0, B_1)$ pour la norme de $\mathcal{F}_\theta^2(B_0, B_1)$. Or, l'adhérence de $\mathcal{F}(B_0, B_1) = \mathcal{F}(B'_0, B'_1)$ dans $\mathcal{F}_\theta^2(B_0, B_1)$ est en fait dans $\mathcal{F}_\theta^2(B'_0, B'_1)$.

Si les B_j sont séparables, les B'_j aussi. On peut donc supposer que (B_0, B_1) est un couple régulier d'espaces séparables.

b) Supposons que (B_0, B_1) est un couple régulier d'espaces séparables. Soit $a^* \in (B_\theta)^*$. D'après le rappel 1, il existe $G \in \mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$ telle que $a^* = G'(\theta)$. D'après le lemme 3.1, il existe une fonction $U_0(i\cdot)$, bornée à valeurs dans B_0^* , telle que

$$|\langle F_n(\theta), a^* \rangle| \leq C(\theta) \left[\int_{\mathbb{R}} |\langle F_n(i\tau), U_0(i\tau) \rangle| \frac{Q_0(\theta, \tau)}{1 - \theta} d\tau \right]^{1-\theta}. \tag{3.2}$$

Par hypothèse, on a p.s. $\langle F_n(i\cdot), U_0(i\cdot) \rangle \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Par le théorème de convergence dominée, le terme de droite dans (3.2) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $\langle F_n(\theta), a^* \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. □

4. La propriété WUR

Théorème 4.1. Soient $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un couple d'interpolation et $\theta \in]0, 1[$. Si A_0 est faiblement uniformément convexe (WUR), A_θ l'est aussi.

Démonstration. Soient $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ deux suites bornées dans A_θ . Pour tout n il existe $F_n, H_n \in \mathcal{F}(\bar{A})$ vérifiant $F_n(\theta) = a_n, H_n(\theta) = b_n, \|a_n\|_{A_\theta}^2 \geq \|F_n\|_{\mathcal{F}(\bar{A})}^2 - \frac{1}{n}, \|b_n\|_{A_\theta}^2 \geq \|H_n\|_{\mathcal{F}(\bar{A})}^2 - \frac{1}{n}$. Notons, pour $j \in \{0, 1\}$,

$$0 \leq S_n(j, \tau) = \frac{\|F_n(j + i\tau)\|_{A_j}^2 + \|H_n(j + i\tau)\|_{A_j}^2}{2} - \left\| \frac{F_n(j + i\tau) + H_n(j + i\tau)}{2} \right\|_{A_j}^2.$$

D'après (2.2), $\left\| \frac{F_n + H_n}{2} \right\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\bar{A})} \geq \left\| \frac{F_n + H_n}{2}(\theta) \right\|_{A_\theta} = \left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\|_{A_\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} S_n(0, \tau) Q_0(\theta, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} S_n(1, \tau) Q_1(\theta, \tau) d\tau \\ &= \frac{\|F_n\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\bar{A})}^2 + \|H_n\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\bar{A})}^2}{2} - \left\| \frac{F_n + H_n}{2} \right\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\bar{A})}^2 \\ &\leq \frac{\|F_n\|_{\mathcal{F}(\bar{A})}^2 + \|H_n\|_{\mathcal{F}(\bar{A})}^2}{2} - \left\| \frac{F_n + H_n}{2} \right\|_{\mathcal{F}_\theta^2(\bar{A})}^2 \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{\|a_n\|_{A_\theta}^2 + \|b_n\|_{A_\theta}^2}{2} - \left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\|_{A_\theta}^2. \end{aligned}$$

Supposons que $\frac{\|a_n\|_{A_\theta}^2 + \|b_n\|_{A_\theta}^2}{2} - \left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\|_{A_\theta}^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Comme $S_n(j, \tau) \geq 0$, on déduit que $\int_{\mathbb{R}} S_n(0, \tau) Q_0(\theta, \tau) d\tau \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Il existe donc une sous-suite telle que p.s. $S_{n_k}(0, \cdot) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

L'espace A_0 étant WUR, p.s. $F_{n_k}(\cdot) - H_{n_k}(\cdot) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$, faiblement dans A_0 . D'après le lemme 3.2, $a_{n_k} - b_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$, faiblement dans A_θ . Par un argument standard, $a_n - b_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, faiblement dans A_θ , donc A_θ est WUR. \square

5. La propriété faiblement LUR

L'énoncé du théorème 4.1 reste-t-il vrai si on y remplace «WUR» par «faiblement LUR»? Le problème est d'obtenir pour $a \in A_\theta$ une fonction $H \in \mathcal{F}_\theta^\infty(A_0, A_1)$ telle que $H(\theta) = a$ et $\|H\|_{\mathcal{F}_\theta^\infty(A_0, A_1)} = \|a\|_{A_\theta}$, au lieu d'une suite dans $\mathcal{F}(A_0, A_1)$. Grâce aux lemmes 5.1 et 5.2, on peut le faire dans les espaces duaux, d'où le cadre du théorème 5.3 ci-dessous.

Lemme 5.1. Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation régulier tel que B_0, B_1 sont séparables et B_0^*, B_1^* ont la propriété de Radon-Nikodym. Soient $\theta \in]0, 1[$ et $b^* \in (B_0^*, B_1^*)_\theta$. Alors, il existe $H \in \mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)$ telle que $H(\theta) = b^*$ et $\|b^*\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} = \|H\|_{\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)}$.

Démonstration. a) Soit $X = L^1(\mathbb{R}, d\tau, B_0) \oplus_1 L^1(\mathbb{R}, d\tau, B_1)$. Comme B_0^*, B_1^* ont la propriété de Radon-Nikodym, on a, d'après [5, Th. 1, chap. IV],

$$X^* = L^\infty(d\tau, B_0^*) \oplus_\infty L^\infty(d\tau, B_1^*).$$

Comme B_0, B_1 sont séparables, X l'est aussi; la boule unité de X^* est donc métrisable (et compacte) pour la topologie préfaible.

Soit $J : \mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*) \rightarrow X^*$ l'application qui, à une fonction de $\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)$, associe sa restriction au bord de S . Par définition, J est une isométrie sur son image. Vérifions que la boule unité de $J(\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*))$ est séquentiellement préfaiblement fermée dans X^* .

Soit donc une suite $(F_n)_{n \geq 1}$ de norme ≤ 1 dans $\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)$, telle que $(J(F_n))_{n \geq 1}$ converge pour la topologie préfaible de X^* vers $\tilde{F} \in X^*$, vue comme fonction définie sur le bord de S . Par la formule (2.1), on peut prolonger \tilde{F} en fonction bornée sur S_0 ; on note F la fonction ainsi définie sur S . Comme (B_0, B_1) est régulier, $B_0^* + B_1^*$ est le dual de $B_0 \cap B_1$. Par (2.1) et le théorème de convergence dominée, pour tout $z \in S^0, F_n(z) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} F(z)$ pour la topologie préfaible de $B_0^* + B_1^*$. On sait alors que $\langle F, b \rangle$ est holomorphe sur S_0 , pour tout $b \in B_0 \cap B_1$. Donc, dans un voisinage convenable de $z_0 \in S_0, \langle F(z), b \rangle = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(b)(z - z_0)^k$ et $\langle F_n(z), b \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle a_{k,n}, b \rangle (z - z_0)^k$. Par définition et le théorème de convergence dominée, $\alpha_k(b) = \lim_n \langle a_{k,n}, b \rangle$, d'où l'existence de a_k dans la boule unité de $B_0^* + B_1^*$, tel que $\alpha_k(b) = \langle a_k, b \rangle, k \geq 0$. Donc F est holomorphe : $S_0 \rightarrow B_0^* + B_1^*$. Alors F est dans $\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)$, donc $\tilde{F} = J(F)$ est dans $J(\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*))$.

b) Soit $b^* \in (B_0^*, B_1^*)_\theta$. Il existe une suite $H_n \in \mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)$ telle que $H_n(\theta) = b^*$ et $\|b^*\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} \leq \|H_n\|_{\mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)} < \|b^*\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} + 1/n$. D'après a) une sous-suite de $(J(H_n))_{n \geq 1}$ converge pour $\sigma(X^*, X)$ et il existe $H \in \mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)$, telle que $\|H\|_{\mathcal{F}^\infty(B_0^*, B_1^*)} \leq \|b^*\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta}$ et $b^* = H(\theta)$. D'après le rappel 3, $\|b^*\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} \leq \|H\|_{\mathcal{F}_\theta^\infty(B_0^*, B_1^*)}$, ce qui achève la preuve. \square

Pour pouvoir appliquer le [lemme 5.1](#) dans la preuve du [théorème 5.3](#) on utilisera le lemme suivant.

Lemme 5.2. Soit X un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) X^* est faiblement LUR ;
- b) pour tout sous-espace fermé séparable Y de X , Y^* est faiblement LUR ;
- c) pour tout sous-espace fermé séparable Y de X , il existe un sous-espace fermé séparable Z contenant Y tel que Z^* est faiblement LUR.

Démonstration. a) \implies b) : Soient $(a_n^*)_{n \geq 0}$ une suite dans Y^* et $a \in Y^*$ tels que $\frac{\|a_n^*\|_{Y^*}^2 + \|a^*\|_{Y^*}^2}{2} - \left\| \frac{a_n^* + a^*}{2} \right\|_{Y^*}^2 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $b_n^*, b^* \in X^*$, dont les images canoniques dans Y^* sont respectivement a_n^*, a , tels que $\|b_n^*\|_{X^*} = \|a_n^*\|_{Y^*}$, $n \geq 1$, et $\|b^*\|_{X^*} = \|a^*\|_{Y^*}$. Comme

$$0 \leq \frac{\|b_n^*\|_{X^*}^2 + \|b^*\|_{X^*}^2}{2} - \left\| \frac{b_n^* + b^*}{2} \right\|_{X^*}^2 \leq \frac{\|a_n^*\|_{Y^*}^2 + \|a^*\|_{Y^*}^2}{2} - \left\| \frac{a_n^* + a^*}{2} \right\|_{Y^*}^2,$$

le terme du milieu tend vers 0. Comme X^* est faiblement LUR, $b_n^* \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} b^*$ faiblement dans X^* , donc $a_n^* \rightarrow a^*$ faiblement dans Y^* .

b) \implies c) est évident.

c) \implies a) : soient $(b_n^*)_{n \geq 0}$ une suite dans X^* et $b^* \in X^*$. Soit E le sous-espace fermé séparable de X^* engendré par les b_n^* et b^* . Il existe un sous-espace fermé séparable $Y \subset X$ tel que E se plonge isométriquement dans Y^* . Par hypothèse il existe un sous-espace fermé séparable Z , tel que $Y \subset Z \subset X$ et tel que Z^* soit faiblement LUR. Notons c_n^*, c^* (resp. a_n^*, a^*) les restrictions de b_n^*, b^* à Z (resp. Y), d'où

$$0 \leq \frac{\|c_n^*\|_{Z^*}^2 + \|c^*\|_{Z^*}^2}{2} - \left\| \frac{c_n^* + c^*}{2} \right\|_{Z^*}^2 \leq \frac{\|b_n^*\|_{X^*}^2 + \|b^*\|_{X^*}^2}{2} - \left\| \frac{a_n^* + a^*}{2} \right\|_{Y^*}^2 = \frac{\|b_n^*\|_{X^*}^2 + \|b^*\|_{X^*}^2}{2} - \left\| \frac{b_n^* + b^*}{2} \right\|_{X^*}^2.$$

Si le terme de droite tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, $c_n^* - c^* \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ faiblement dans Z^* , puisque Z^* est faiblement LUR. Par définition, $b_n^* - b^* \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ faiblement dans E et donc faiblement dans X^* . \square

Théorème 5.3. Soient $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un couple d'interpolation et $\theta \in]0, 1[$. Si A_0^* est faiblement LUR, alors $(A_\theta)^*$ l'est aussi.

Remarque. Ce théorème est bien l'analogue du [théorème 4.1](#) si \bar{A} est un couple régulier. En effet, on a alors $(A_\theta)^* = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ par le [rappel 1](#). Or $(A_0^*, A_1^*)^\theta$ est toujours un sous-espace fermé de $(A_0^*, A_1^*)^\theta$ [\[1\]](#).

Démonstration. a) Réduction : d'après le [lemme 5.2](#) c) \implies a) appliqué à $X = A_\theta$, il suffit de démontrer la propriété c).

Soient Y un sous-espace fermé séparable de A_θ et $(d_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans Y . Pour tous $m, n \geq 0$, il existe $F_{m,n} \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tel que $F_{m,n}(\theta) = d_n$ et $\|F_{m,n}\|_{\mathcal{F}(A_0, A_1)} < \|d_n\|_{A_\theta} + 1/m$. Comme les $F_{m,n}(j+i)$ sont à valeurs dans un sous-espace fermé séparable B'_j de A_j , $j \in \{0, 1\}$, Y se plonge isométriquement dans $Z = (B'_0, B'_1)_\theta$. Soit B_j le sous-espace fermé (donc séparable) de B'_j engendré par $B'_0 \cap B'_1$. (B_0, B_1) est donc un couple d'interpolation régulier d'espaces séparables. D'après [\[2, Th. 4.2.2\]](#) $Z = (B'_0, B'_1)_\theta = (B_0, B_1)_\theta$. D'après le [rappel 1](#), pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$(B_\alpha)^* = (B_0^*, B_1^*)^\alpha.$$

On montrera en b) que $Z^* = (B_\theta)^*$ est faiblement LUR, ce qui achèvera la démonstration.

D'après l'hypothèse et le [lemme 5.2](#) a) \implies b), B_0^* est faiblement LUR. D'après [\[6\]](#), B_0^* a donc la propriété de Radon–Nikodym. Alors, d'une part, B_0^* est séparable [\[5, Corol. 8 Chap. VII-2\]](#) et, par conséquent, $(B_0^*, B_1^*)_\alpha$ est séparable pour tout $\alpha \in]0, 1[$ (voir par exemple [\[4, Rappel 2-c\]](#)). D'autre part, les fonctions lipschitziennes : $\mathbb{R} \rightarrow B_0^*$ sont p.s. différentiables [\[5, chap. IV, th. 2, p. 107\]](#). Alors, $(B_0^*, B_1^*)_\alpha = (B_0^*, B_1^*)^\alpha$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ [\[2, lemma 4.3.3\]](#). Il en résulte que $(B_\alpha)^*$ est un dual séparable pour tout $\alpha \in]0, 1[$, en particulier $(B_0^*, B_1^*)_\alpha$ a la propriété de Radon–Nikodym.

D'après le théorème de réitération [\[2, Th. 4.6.1\]](#), si $\theta < \alpha < 1$, pour une valeur de η convenable,

$$(B_0^*, B_1^*)_\theta = (B_0^*, (B_0^*, B_1^*)_\alpha)_\eta \tag{5.1}$$

Donc, isométriquement,

$$Z^* = (B_\theta)^* = (B_0^*, B_1^*)^\theta = (B_0^*, B_1^*)_\theta = (B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta$$

et (B_0, B_α) est un couple régulier d'espaces séparables dont les duaux ont la propriété de Radon–Nikodym.

b) Soient a^* et une suite bornée $(a_n^*)_{n \geq 0}$ dans $Z^* = (B_0^*, B_1^*)_\theta$, soit η défini comme en [\(5.1\)](#). D'après le [lemme 5.1](#), il existe $H \in \mathcal{F}^\infty(B_0^*, (B_\alpha)^*)$ telle que $H(\eta) = a^*$ et $\|H\|_{\mathcal{F}^\infty(B_0^*, (B_\alpha)^*)} = \|a^*\|_{(B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta}$. Soit $F_n \in \mathcal{F}(B_0^*, (B_\alpha)^*)$ telle que $\|F_n\|_{\mathcal{F}(B_0^*, (B_\alpha)^*)}^2 \leq \|a_n^*\|_{(B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta}^2 + \frac{1}{n}$, et $F_n(\eta) = a_n^*$, $n \geq 1$. Comme dans la preuve du [théorème 4.1](#), il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\|F_n(i\tau)\|_{B_0^*}^2 + \|H(i\tau)\|_{B_0^*}^2}{2} - \left\| \frac{F_n(i\tau) + H(i\tau)}{2} \right\|_{B_0^*}^2 \right] Q_0(\theta, \tau) d\tau$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n} + \|a_n^*\|_{(B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta}^2 + \|a^*\|_{(B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta}^2}{2} - \left\| \frac{a_n^* + a^*}{2} \right\|_{(B_0^*, (B_\alpha)^*)_\eta}^2.$$

Si le terme de droite tend vers 0, il existe une sous-suite (F_{n_k}) telle que

$$\text{p.s. } \frac{\|F_{n_k}(i\tau)\|_{B_0^*}^2 + \|H(i\tau)\|_{B_0^*}^2}{2} - \left\| \frac{F_{n_k}(i\tau) + H(i\tau)}{2} \right\|_{B_0^*}^2 \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0.$$

L'espace B_0^* étant faiblement LUR, p.s. $F_{n_k}(i\cdot) - H(i\cdot) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ faiblement dans B_0^* . D'après le lemme 3.2, $a_{n_k}^* - a^* \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ faiblement dans $(B_0^*, (B_0^*, B_1^*)_\alpha)_\eta = Z^*$. Finalement, $a_n^* - a \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ faiblement dans $Z^* = (B_\theta)^*$. \square

Remerciements

Je remercie chaleureusement Bernard Maurey et Françoise Lust-Piquard pour le temps qu'ils m'ont consacré lors de la préparation de ce travail. Je remercie également le directeur de mon établissement, M. Hamad Alnafeh, qui m'a encouragé à continuer à faire de la recherche.

Références

[1] J. Bergh, On the relation between the two complex methods of interpolation, *Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979) 775–777.
 [2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces, An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
 [3] M. Daher, Homéomorphismes uniformes entre les sphères unité des espaces d'interpolation, *Can. Math. Bull.* 38 (3) (1995) 286–294.
 [4] M. Daher, Interpolation des espaces de Hardy vectoriels, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) XXXIV (2) (2015) 389–425.
 [5] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surv., vol. 15, American Mathematical Society, 1977.
 [6] F.E. Sullivan, Geometrical properties determined by the higher duals of Banach spaces, *Ill. J. Math.* 21 (1977) 315–331.