



Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

Simulation de la propagation de fracture dans un solide élastique



Simulation of the propagation of cracks in a brittle material

Leila Azem^{a,b}, Olivier Pantz^c

^a CMAP, École polytechnique Palaiseau, France

^b Laboratoire EDP, Faculté des sciences de Tunis, Université Tunis El Manar 2092, Tunisie

^c Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 8 août 2016

Accepté après révision le 7 décembre 2016

Disponible sur Internet le 16 décembre

2016

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

On modélise un solide élastique fragile (pouvant développer des fractures) comme limite d'un modèle d'endommagement et proposons une méthode numérique afin de déterminer l'évolution quasi-statique d'une fracture dans l'esprit des travaux de Francfort et Marigo [3] et Allaire et al. [1,2].

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ABSTRACT

We consider a brittle elastic solid (prone to develop fractures) as the limit of a damage model and propose a numerical method to determine its quasi-static evolution in the spirit of Francfort and Marigo [3] and Allaire et al. [1,2].

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Abridged English version

We consider an elastic solid of reference configuration $D \subset \mathbb{R}^N$. We assume that the solid could be in two different states: healthy or strongly damaged. If χ is the characteristic function of the damaged area Ω , the Hooke law takes the form

$$A_\varepsilon := ((1 - \chi) + \eta_\varepsilon \chi) A_0,$$

where $\eta_\varepsilon \ll \varepsilon$. The parameter ε stands for the minimal width imposed to the damaged domain Ω . We focus in this note on the quasi-static evolution of the system, which at each time t_i minimizes its total energy

$$j^\varepsilon(u, \chi) := \frac{1}{2} \int_D A_\varepsilon e(u) : e(u) \, dx + \kappa_\varepsilon \mathcal{H}^N(\Omega),$$

Adresses e-mail : leila.azem@polytechnique.edu (L. Azem), olivier.pantz@unice.fr (O. Pantz).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.12.003>

1631-073X/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

over all admissible displacements u at time t_i and all growing damaged areas Ω of minimal width ε . As ε goes to zero, the evolution of the damaged area converges toward that of a fracture. This evolution can be computed by means of a projected gradient algorithm (see Listing 1), inspired by the work of Allaire et al. in [1,2]. We include two new ingredients: an explicit minimal width condition (see [4]) and a strong irreversibility condition. The former ensures the convergence (at least formally) of the damaged model toward that of a brittle fracture. The latter is necessary to ensure physical consistence of the modeling. We obtain qualitative results comparable to that of Allaire et al. for the test case of Mode-II loading (see Fig. 1). The numerical simulation without strong irreversibility leads to a non-physical solution (see Fig. 2), as expected.

1. Introduction

La modélisation et la simulation de propagation des fractures posent de nombreux challenges tant d'un point de vue théorique que numérique. Récemment, plusieurs algorithmes ont été proposés, basés sur une formulation variationnelle initialement introduite par Francfort et Marigo. Dans cette note, nous présentons un certain nombre d'améliorations à la méthode introduite par Allaire et al. L'idée principale de leur approche consiste à représenter une fracture comme une zone fortement endommagée. L'évolution quasi-statique de la fracture est alors obtenue par l'application d'outils classiques d'optimisation de forme. Si nous conservons les éléments principaux de leur démarche, nous nous en écartons sur plusieurs points. Sur le plan de la modélisation, nous introduisons une contrainte d'épaisseur minimale imposée à la zone endommagée. Cette condition nous semble nécessaire afin d'assurer la convergence du modèle d'endommagement vers un modèle de type fracture. Elle est prise en compte numériquement par l'intermédiaire d'un opérateur de *contraction/dilatation*. Par ailleurs, nous introduisons le concept d'irréversibilité forte afin d'éviter l'apparition de comportements non physiques. D'un point de vue numérique, nous employons une expression différente de la dérivée de forme, dite matérielle, afin de minimiser l'énergie totale du système et de déterminer l'évolution quasi-statique d'une fracture.

2. Présentation du modèle

2.1. Endommagement

On considère un solide élastique de configuration de référence $D \subset \mathbb{R}^N$. On suppose que le solide peut adopter deux états distincts : sain ou endommagé. On note χ la fonction caractéristique de la zone endommagée. Ainsi, la loi de Hooke associée au solide est de la forme

$$A = (1 - \chi)A_0 + \chi A_1,$$

où $A_1 \ll A_0$ en tant que forme quadratique sur les matrices symétriques. On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et on suppose que le déplacement est prescrit sur une partie Γ_D du bord du domaine D égale à g_i pour des pas de temps successifs $t_0 < t_1 < \dots < t_N$.

L'état au temps t_i est décrit par la fonction caractéristique de la zone endommagée χ_i et par le déplacement de la structure u_i . On adopte une formulation variationnelle en décrivant l'état du système comme le minimiseur d'une énergie composée de la somme d'un terme élastique et d'un terme de dissipation dû à l'endommagement. L'état du système (u_i, χ_i) minimise donc au temps t_i l'énergie totale

$$j(u, \chi) := \frac{1}{2} \int_D ((1 - \chi)A_0 + \chi A_1) e(u) : e(u) \, dx + \kappa \int_D \chi \, dx$$

sur l'ensemble des déplacements $u \in H^1(D)^N$ et des fonctions caractéristiques $\chi \in L^\infty(D, \{0, 1\})$ tels que $u = g_i$ sur Γ_D et $\chi \geq \chi_{i-1}$, où κ est un coefficient de dissipation. L'inégalité sur χ traduit le fait que l'endommagement est irréversible.

2.2. Limite asymptotique et condition d'épaisseur minimale

Une approximation d'un modèle de type fracture peut être obtenue comme limite asymptotique du modèle précédent. À cet effet, on introduit un paramètre ε et on considère l'énergie

$$j^\varepsilon(u, \chi) := \frac{1}{2} \int_D A_\varepsilon e(u) : e(u) \, dx + \kappa_\varepsilon \int_D \chi \, dx,$$

où $\kappa_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \kappa$ et $A_\varepsilon = ((1 - \chi) + \eta_\varepsilon \chi)A_0$ avec $\eta_\varepsilon \ll \varepsilon$. Lorsque ε tend vers zéro, on s'attend à la convergence (formelle du moins) de cette énergie vers

$$j^0(u, \Gamma) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} A_0 e(u) : e(u) \, dx + \kappa \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma),$$

où Γ est la « limite » de la zone endommagée $\Omega = \chi^{-1}(\{1\})$ et \mathcal{H}^{N-1} la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$. Cependant, une telle limite n'est raisonnable que dans le cas où l'on suppose que la zone endommagée est d'épaisseur ε . Allaire et al. font l'économie du traitement explicite de cette contrainte en arguant qu'elle peut être implicitement prise en compte en choisissant une discrétisation appropriée de l'espace des fonctions caractéristiques. Cela nous semble délicat et nous proposons d'imposer explicitement au domaine endommagé une épaisseur minimale. À cet effet, nous nous inspirons des travaux de Zhang [4]. Un ensemble Ω sera dit d'épaisseur supérieure ou égale à ε si et seulement si la distance entre le bord de Ω et son squelette est au moins de $\varepsilon/2$. Afin de vérifier cette condition, on introduit un opérateur T^ε de contraction/dilatation. Comme son nom l'indique, il est construit en deux étapes. Le première consiste à définir un bord *contracté* $\partial^\varepsilon \Omega = X_\Omega(\partial\Omega, -\varepsilon/2)$ où X_Ω sont les caractéristiques en suivant le champ $n = \nabla d_\Omega$, gradient de la fonction distance signée au bord de Ω . Dans un deuxième temps, on *dilate* le bord contracté obtenu en posant

$$\partial_+^\varepsilon \Omega = \bigcup_{x \in \partial^\varepsilon \Omega} B(x, \varepsilon/2),$$

où $B(x, r)$ est la boule ouverte centrée en x de rayon r . Enfin, on pose

$$T^\varepsilon(\Omega) = \Omega \cup \partial_+^\varepsilon \Omega.$$

Un ouvert est d'épaisseur supérieure ou égale à ε ssi c'est un point fixe de T^ε .

3. Un algorithme de type gradient projeté

Afin de résoudre le problème de minimisation par rapport à la zone endommagée, sous contrainte, d'épaisseur minimale, à l'instant t_i , on utilise un algorithme de type gradient projeté sur la fonction

$$J_i^\varepsilon(\Omega) := \inf_{\substack{u \in H^1(D)^N \\ u = u_i \text{ sur } \Gamma_D}} j^\varepsilon(u, \chi),$$

où χ est la fonction caractéristique de Ω . La fonction J_i^ε admet une dérivée de forme. Plus précisément, pour tout champ lipschitzien θ nul sur Γ_D de composante normale nulle sur ∂D , on a

$$J_i^\varepsilon((\text{Id} + \theta)(\Omega)) = J_i^\varepsilon(\Omega) + \langle D J_i^\varepsilon(\Omega), \theta \rangle + o(\|\theta\|),$$

avec

$$\langle D J_i^\varepsilon(\Omega), \theta \rangle := \frac{1}{2} \int_D A_\varepsilon e(u) : \left((\nabla \cdot \theta) e(u) - \nabla u \nabla \theta - \nabla \theta^T \nabla u^T \right) dx + \int_\Omega \kappa_\varepsilon \nabla \cdot \theta dx,$$

et u est le déplacement admissible de la structure à l'instant t_i minimisant l'énergie élastique. L'algorithme proposé consiste en deux boucles imbriquées : une boucle en temps et une boucle d'optimisation de type gradient *projeté*.

Listing 1 Algorithme d'optimisation.

- I. Initialisation de Ω_0^ε .
 - II. Boucle en temps $t_i = i\Delta t$, Itérations sur $i > 0$
 1. On pose $\Omega_{i,0}^\varepsilon = \Omega_{i-1}^\varepsilon$.
 2. Boucle d'optimisation : Itérations sur $k \geq 0$
 - (a) Détermination d'une direction de descente $\theta_{i,k}^\varepsilon$ telle que $\langle D J_i^\varepsilon(\Omega_{i,k}^\varepsilon), \theta_{i,k}^\varepsilon \rangle \leq 0$.
 - (b) Mise à jour de $\tilde{\Omega}_{i,k+1}^\varepsilon = (\text{Id} + \Delta s \theta_{i,k}^\varepsilon)(\Omega_{i,k}^\varepsilon)$.
 - (c) Projection :
 - (α) Irréversibilité forte : $\tilde{\Omega}_{i,k+1,0}^\varepsilon = \tilde{\Omega}_{i,k+1}^\varepsilon \cup \Omega_{i,k}^\varepsilon$. On pose $l = 0$.
 - (β) Répéter jusqu'à convergence, pour $l \geq 0$, $\tilde{\Omega}_{i,k+1,l+1}^\varepsilon = T^\varepsilon(\tilde{\Omega}_{i,k+1,l}^\varepsilon)$
 - (γ) A convergence de l'étape (β), on pose $\Omega_{i,k+1}^\varepsilon = \tilde{\Omega}_{i,k+1,l}^\varepsilon$
 - (d) Retour à (a) jusqu'à convergence. Si convergence, on pose $\Omega_i^\varepsilon = \Omega_{i,k+1}^\varepsilon$.
-

4. Résultats numériques

Dans le cas d'un échantillon soumis à un chargement de type mode II (i.e. en cisaillement), on observe une évolution brutale de la fracture dès que le chargement atteint une valeur critique. La fracture développe deux branches qui disloquent presque totalement le solide (Fig. 1).

Les résultats sont identiques à ceux obtenus par Allaire et al. sur le même cas test, mais différent qualitativement. Enfin, remarquons que nous imposons une condition d'irréversibilité plus forte. Une condition plus faible, utilisée par Allaire et al., conduit à une fracture géodésique (Fig. 2). A noter qu' Allaire et al. n'observent pas ce type de comportement qui est pourtant attendu. Ces résultats font l'objet d'un article en préparation.

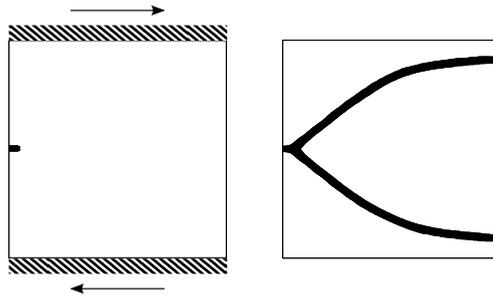


Fig. 1. Évolution d'une fracture avec un chargement mode II. À gauche, la fracture initiale et, à droite, la fracture au chargement critique.

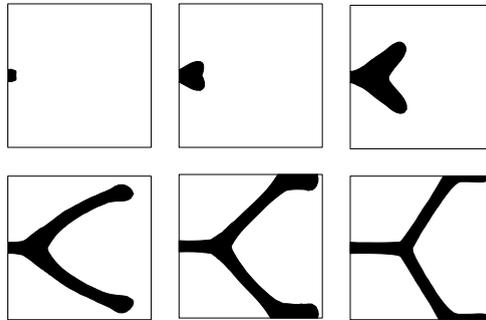


Fig. 2. Évolution de la zone endommagée avec une contrainte d'irréversibilité faible.

Références

- [1] G. Allaire, F. Jouve, N. Van Goethem, A level set method for the numerical simulation of damage evolution, in: *ICIAM 07, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2009, pp. 3–22.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, N. Van Goethem, Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods, *J. Comput. Phys.* 230 (12) (2011) 5010–5044.
- [3] G. Francfort, J.-J. Marigo, Stable damage evolution in a brittle continuous medium, *Eur. J. Mech. A, Solids* 12 (1993) 149–189.
- [4] W. Zhang, W. Zhong, X. Guo, An explicit length scale control approach in simp-based topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 282 (2014) 71–86.