



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse harmonique

Une caractérisation de l'algèbre de Fourier pour certains groupes localement compacts



A characterization of the Fourier algebra for some locally compact groups

Wassim Nasserddine¹

Université Libanaise, Faculté des sciences, section I, 2905-3901 Hadath-Beyrouth, Liban

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 4 janvier 2017

Accepté après révision le 16 mars 2017

Disponible sur Internet le 24 mars 2017

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Soit G un groupe localement compact séparable dont la représentation régulière gauche est de type I, \widehat{G} son dual et $A(G)$ son algèbre de Fourier. On prouve un analogue du théorème de Parseval et on démontre que l'application

$$T \longrightarrow u(x) := \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[T(\pi)\pi(x)^{-1}]d_{\mu}(\pi)$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Let G be a separable locally compact group with type-I left regular representation, \widehat{G} its dual and $A(G)$ its Fourier algebra. We prove an analogue of Parseval's theorem and that the mapping

$$T \longrightarrow u(x) := \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[T(\pi)\pi(x)^{-1}]d_{\mu}(\pi)$$

is an isometric isomorphism of Banach spaces from $L^1(\widehat{G})$ onto $A(G)$.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : wassim.nasserddine@ul.edu.lb.

¹ Ce projet a été financé avec le soutien de l'Université Libanaise.

1. Introduction

Soit G un groupe localement compact et $A(G)$ son algèbre de Fourier. Si G est abélien, alors son dual \widehat{G} est un groupe et $L^1(\widehat{G})$ est naturellement défini comme l'espace des classes de fonctions mesurables \hat{f} à valeurs complexes telles $\|\hat{f}\| := \int_{\widehat{G}} |\hat{f}(\hat{x})| d\hat{x} < \infty$, et l'application

$$\hat{f} \longrightarrow f(x) := \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\hat{x}) \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} d\hat{x}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$.

Si G n'est pas abélien, \widehat{G} n'est plus un groupe et donc il est intéressant de poser la question suivante : lorsque $L^1(\widehat{G})$ est bien défini, peut-on identifier naturellement $A(G)$ et $L^1(\widehat{G})$? Si G est séparable unimodulaire (non abélien) de type I, $L^1(\widehat{G}) = \mathcal{L}_1(\widehat{G}) / \sim$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\widehat{G}) = \{T \text{ est un champ mesurable d'opérateurs bornés sur } \widehat{G} : \\ \|T(\pi)\|_1 := \text{Tr}|T(\pi)| < \infty, \text{ pour presque tout } \pi \in \widehat{G}, \\ \int_{\widehat{G}} \|T(\pi)\|_1 d\mu(\pi) < \infty\} \end{aligned}$$

et $T_1 \sim T_2$ si $T_1(\pi) = T_2(\pi)$ pour presque tout π , alors, en vertu de [7, th. 3.1, p. 217], l'application

$$T \longrightarrow u(x) := \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[T(\pi)\pi(x)^{-1}] d\mu(\pi)$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$.

Si G est le groupe affine d'un corps local, alors G n'est pas unimodulaire et il existe (à une équivalence près) une seule représentation de dimension infinie π qui opère dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'application

$$T \longrightarrow u(x) := \text{Tr}[T\pi(x)]$$

est, d'après [5, th. 2.3, p. 235], un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ (l'espace des opérateurs nucléaires sur \mathcal{H}) sur $A(G)$.

Dans cette note, on étend le théorème de Parseval et on généralise de façon naturelle ces résultats à une classe de groupes non unimodulaires, ceux qui sont localement compacts séparables dont les représentations régulières (gauches ou droites) sont de type I.

2. Préliminaires

Soit G un groupe localement compact. On désigne par ν une mesure de Haar à gauche de G et, pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(G)$ l'espace relatif à ν (on convient d'écrire $d_\nu x = dx$). Pour une fonction complexe f sur G , on adopte les notations : $\check{f}(x) = f(x^{-1})$, $\bar{\check{f}}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. L'algèbre de Fourier $A(G)$ définie par Eymard [4, th., p. 218] est

$$A(G) = \{u = f * \check{g}; f, g \in L^2(G)\},$$

munie de la norme $\|u\|_{A(G)} = \inf\{\|f\|_2 \|g\|_2; u = f * \check{g}\}$. Pour un espace de Hilbert \mathcal{H} , on note $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < \infty$, l'espace de Banach des opérateurs bornés A sur \mathcal{H} avec $\|A\|_p = \{\text{Tr}(|A|^p)\}^{\frac{1}{p}} < \infty$ (cf. [6]). Soit \widehat{G} l'ensemble des classes de représentations unitaires continues irréductibles de G . On convient de donner la même notation π à une représentation et sa classe. L'espace de Hilbert (complexe) associé à π est noté \mathcal{H}_π , et si un opérateur T est borné sur un domaine dense dans \mathcal{H}_π , son extension à \mathcal{H}_π est aussi notée T . Si G est séparable, on munit \widehat{G} de la structure borélienne de Mackey (cf. [2, p. 323], [8]), on note μ une mesure positive sur \widehat{G} et on pose, pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\widehat{G}) = \mathcal{L}_p(\widehat{G}) / \sim$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(\widehat{G}) = \{T \text{ est un champ mesurable d'opérateurs bornés sur } \widehat{G} : \\ \|T(\pi)\|_p < \infty, \text{ pour presque tout } \pi \in \widehat{G}, \\ \int_{\widehat{G}} \|T(\pi)\|_p^p d\mu(\pi) < \infty\} \end{aligned}$$

et $T_1 \sim T_2$ si $T_1(\pi) = T_2(\pi)$ pour presque tout π . Pour $T \in L^p(\widehat{G})$, on note $\|T\|_{L^p(\widehat{G})} = \left(\int_{\widehat{G}} \|T(\pi)\|_p^p d\mu(\pi) \right)^{\frac{1}{p}}$, et pour $f \in L^1(G)$, $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi(f)$ est défini par $\pi(f) = \int_G \pi(x) f(x) dx$, c'est-à-dire $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$, on a

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_G \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle f(x) dx.$$

Soit $f \in L^1 \cap L^2(G)$. Si G est séparable unimodulaire de type I, alors pour presque tout $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi(f)$ est de Hilbert–Schmidt et la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$ qui à f associe $\mathcal{F}(f)$ définie par $\mathcal{F}(f)(\pi) = \pi(f)$ se prolonge, d'après [7, th. 2.1, p. 213], de manière unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(G)$ sur $L^2(\widehat{G})$. Dans ce cas, la formule de Plancherel, pour $f \in L^1 \cap L^2(G)$, s'écrit

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\widehat{G}} \|\pi(f)\|_2^2 d\mu(\pi).$$

Si G n'est pas unimodulaire, alors $\pi(f)$ n'est pas nécessairement de Hilbert–Schmidt d'après [1, cor. 1, p. 688], et donc la transformation de Fourier \mathcal{F} ne peut pas donner la formule de Plancherel au sens ordinaire. Dans ce cas, il faut tempérer l'opérateur $\pi(f)$ par un opérateur non borné convenablement choisi. En effet, si G est séparable, alors, d'après [3, th. 5, p. 225], il existe une mesure standard μ sur \widehat{G} , et, pour presque tout $\pi \in \widehat{G}$, il existe un opérateur (non borné) autoadjoint positif K_π tel que (l'extension de) l'opérateur $\pi(f)K_\pi^{\frac{1}{2}}$ est de Hilbert–Schmidt. Soit λ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G) : \lambda_x f(y) = f(x^{-1}y)$ pour $x, y \in G$ et $f \in L^2(G)$. On suppose que G est séparable et que la représentation λ est de type I, c'est-à-dire l'algèbre de von Neumann $VN(G)$ engendrée par $\{\lambda_x; x \in G\}$ dans $\mathcal{L}_\infty(L^2(G))$ (l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(G)$) est de type I [2, A 35, p. 337]. Alors, le projecteur P_I qui existe (cf. [3, p. 225]) dans le centre de $VN(G)$ est l'opérateur identité, et donc il existe, d'après [3, th. 5, p. 225], un champ mesurable d'opérateurs autoadjoints positifs $(K_\pi)_{\pi \in \widehat{G}}$ et un champ mesurable $(\pi, \mathcal{H}_\pi)_{\pi \in \widehat{G}}$ de représentations de G tels que, pour presque tout $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi(f)K_\pi^{\frac{1}{2}}$, où $f \in L^1 \cap L^2(G)$, se prolonge en un opérateur de Hilbert–Schmidt sur \mathcal{H}_π , noté $\mathcal{P}(f)(\pi)$. La transformation $\mathcal{P} : L^1 \cap L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$ qui à f associe $\mathcal{P}(f)$ définie par $\mathcal{P}(f)(\pi) = \mathcal{F}(f)(\pi) \circ K_\pi^{\frac{1}{2}}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(G)$ sur $L^2(\widehat{G})$. Dans ce cas, la formule de Plancherel, pour $f \in L^1 \cap L^2(G)$, s'écrit

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\widehat{G}} \|\pi(f) \circ K_\pi^{\frac{1}{2}}\|_2^2 d\mu(\pi).$$

3. Résultats

Par la suite G désignera un groupe localement compact séparable (non nécessairement unimodulaire) dont la représentation régulière gauche est de type I.

Lemme 3.1. Soit $T \in L^1(\widehat{G})$ et u la fonction définie sur G par

$$u(x) := \int_{\widehat{G}} Tr[T(\pi)\pi(x)] d\mu(\pi).$$

Alors $u \in A(G)$.

Preuve. On note T^* le champ d'opérateurs défini par $T^*(\pi) = T(\pi)^*$, l'adjoint de l'opérateur $T(\pi)$. Le module de l'opérateur $T(\pi)$ est $|T|(\pi) = (T(\pi)^*T(\pi))^{\frac{1}{2}}$. Vu que, pour presque tout $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $T(\pi)$ est nucléaire, alors il admet la décomposition polaire

$$T(\pi) = U_T(\pi)|T|^{\frac{1}{2}}(\pi)|T|^{\frac{1}{2}}(\pi),$$

où $U_T(\pi)$ est une isométrie partielle. Posons $T_1(\pi) = U_T(\pi)|T|^{\frac{1}{2}}(\pi)$ et $T_2(\pi) = |T|^{\frac{1}{2}}(\pi)$, on a alors

$$\|T_2\|_{L^2(\widehat{G})}^2 = \int_{\widehat{G}} \| |T|^{\frac{1}{2}}(\pi) \|_2^2 d\mu(\pi) = \int_{\widehat{G}} Tr|T|(\pi) d\mu(\pi) = \|T\|_{L^1(\widehat{G})} < \infty$$

et

$$\|T_1\|_{L^2(\widehat{G})}^2 = \int_{\widehat{G}} \|U_T(\pi)|T|^{\frac{1}{2}}(\pi)\|_2^2 d\mu(\pi) \leq \int_{\widehat{G}} \| |T|^{\frac{1}{2}}(\pi) \|_2^2 d\mu(\pi) = \|T\|_{L^1(\widehat{G})} < \infty.$$

Donc $T_1, T_2 \in L^2(\widehat{G})$, et par suite il existe, en vertu de [3, th. 5, p. 225], $f_1, f_2 \in L^2(G)$ tels que $\mathcal{P}(f_1) = T_1$ et $\mathcal{P}(f_2) = T_2$. Il en découle

$$u(x) = \int_{\widehat{G}} Tr[\pi(x)\mathcal{P}(f_1)(\pi)\mathcal{P}(f_2)(\pi)] d\mu(\pi) = \int_{\widehat{G}} Tr[\mathcal{P}(\lambda_x f_1)(\pi)\mathcal{P}(f_2)(\pi)] d\mu(\pi)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\mathcal{P}(\lambda_x f_1)(\pi) \mathcal{P}(f_2)(\pi)^*] d\mu(\pi) = \langle \mathcal{P}(\lambda_x f_1), \mathcal{P}(f_2) \rangle_{L^2(\widehat{G})} \\
&= \langle \lambda_x f_1, f_2 \rangle_{L^2(G)} = \overline{f_2} * \check{f}_1(x).
\end{aligned}$$

Donc $\check{u} = (\overline{f_2} * \check{f}_1)^\vee = f_1 * \check{f}_2 \in A(G)$ et par suite $u \in A(G)$.

Lemme 3.2. Soit $\overline{\mathcal{F}} : L^1(\widehat{G}) \rightarrow A(G)$ l'application définie, pour $x \in G$ et $T \in L^1(\widehat{G})$, par

$$\overline{\mathcal{F}}(T)(x) := \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[T(\pi)\pi(x)] d\mu(\pi).$$

Alors $\overline{\mathcal{F}}$ est bijective.

Preuve. Montrons que $\overline{\mathcal{F}}$ est surjective. Soit $u \in A(G)$, alors, puisque $\check{u} \in A(G)$, il existe $f, g \in L^2(G)$ tels que $\check{u} = f * \check{g}$, et donc $u = \overline{g} * \check{f}$. Posons $T = \mathcal{P}(f)\mathcal{P}(g)^*$. D'après [6, th. 7.1, p. 92], si $A \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ et $B \in \mathcal{L}_q(\mathcal{H})$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $AB \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ et $\|AB\|_1 \leq \|A\|_p \|B\|_q$. En particulier, pour $p = q = 2$, pour presque tout $\pi \in \widehat{G}$, et en posant $A = \mathcal{P}(f)(\pi)$, $B = \mathcal{P}(g)^*(\pi)$, on a

$$\|T(\pi)\|_1 \leq \|\mathcal{P}(f)(\pi)\|_2 \|\mathcal{P}(g)^*(\pi)\|_2 = \|\mathcal{P}(f)(\pi)\|_2 \|\mathcal{P}(g)(\pi)\|_2.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\|T\|_{L^1(\widehat{G})} &= \int_{\widehat{G}} \|T(\pi)\|_1 d\mu(\pi) \\
&\leq \int_{\widehat{G}} \|\mathcal{P}(f)(\pi)\|_2 \|\mathcal{P}(g)(\pi)\|_2 d\mu(\pi) \\
&\leq \left(\int_{\widehat{G}} \|\mathcal{P}(f)(\pi)\|_2^2 d\mu(\pi) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\widehat{G}} \|\mathcal{P}(g)(\pi)\|_2^2 d\mu(\pi) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\mathcal{P}(f)\|_{L^2(\widehat{G})} \|\mathcal{P}(g)\|_{L^2(\widehat{G})} < \infty,
\end{aligned}$$

d'où $T \in L^1(\widehat{G})$. En outre,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}(T)(x) &= \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\pi(x)\mathcal{P}(f)(\pi)\mathcal{P}(g)^*(\pi)] d\mu(\pi) \\
&= \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\mathcal{P}(\lambda_x f)(\pi)\mathcal{P}(g)(\pi)^*] d\mu(\pi) \\
&= \langle \lambda_x f, g \rangle_{L^2(G)} = \overline{g} * \check{f}(x) = u(x).
\end{aligned}$$

Donc l'application $\overline{\mathcal{F}}$ est surjective. Prouvons qu'elle est injective. Soit $T \in L^1(\widehat{G})$ et supposons que $\overline{\mathcal{F}}(T) = u = 0$. Compte tenu des notations de la preuve du lemme 3.1, on a $u = \overline{f_2} * \check{f}_1$. Soit $A'(G)$ l'espace de Banach dual de $A(G)$. Alors, pour tout $Q \in VN(G)$, il existe, d'après [4, th. 3.10, p. 210], une forme linéaire $\varphi_Q \in A'(G)$ telle que $\varphi_Q(\overline{f_2} * \check{f}_1) = \langle Q, f_1, f_2 \rangle$. En particulier, pour tout $Q = h \in L^1 \cap L^2(G)$ (en tant que $h \in L^1(G) \subseteq VN(G)$, $h(f_1) = h * f_1$), on a

$$\begin{aligned}
0 = \varphi_h(u) &= \varphi_h(\overline{f_2} * \check{f}_1) = \langle h, f_1, f_2 \rangle_{L^2(G)} = \langle h * f_1, f_2 \rangle_{L^2(G)} \\
&= \langle \mathcal{P}(h * f_1), \mathcal{P}(f_2) \rangle_{L^2(\widehat{G})} = \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\mathcal{P}(h * f_1)(\pi)\mathcal{P}(f_2)^*(\pi)] d\mu(\pi) \\
&= \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\pi(h)\mathcal{P}(f_1)(\pi)\mathcal{P}(f_2)^*(\pi)] d\mu(\pi) \\
&= \int_{\widehat{G}} \text{Tr}[\pi(h)T(\pi)] d\mu(\pi).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $T = 0$.

Le théorème de Parseval admet la généralisation suivante :

Théorème 3.3 (de Parseval). Soit $h \in L^1(G)$, $T \in L^1(\widehat{G})$ et $u(x) = \int_{\widehat{G}} Tr[T(\pi)\pi(x)^{-1}]d_{\mu}(\pi)$. Alors $u \in L^{\infty}(G)$ et

$$\int_G h(x)\overline{u}(x)dx = \int_{\widehat{G}} Tr[\pi(h)T^*(\pi)]d_{\mu}(\pi).$$

Preuve. En vertu du [lemme 3.1](#), comme $\overline{\mathcal{F}}(T) = \check{u} \in A(G)$, on a $u \in A(G)$, et donc $u \in L^{\infty}(G)$ puisque $A(G) \subseteq L^{\infty}(G)$. Ainsi, d'après la preuve du [lemme 3.2](#), il existe $f, g \in L^2(G)$ tels que $\check{u} = \overline{g} * \check{f}$ et $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{P}(f)\mathcal{P}(g)^*) = \check{u}$. Donc $\overline{u} = \overline{f} * \check{g}$ et, vu que $h \in L^1(G) \subseteq VN(G)$, il existe une forme linéaire $\varphi_h \in A'(G)$ telle que $\varphi_h(\overline{f} * \check{g}) = \langle h * g, f \rangle_{L^2(G)}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \varphi_h(\overline{u}) &= \langle h * g, f \rangle_{L^2(G)} \\ &= \int_{\widehat{G}} Tr[\pi(h)\mathcal{P}(g)(\pi)\mathcal{P}(f)^*(\pi)]d_{\mu}(\pi) \\ &= \int_{\widehat{G}} Tr[\pi(h)T^*(\pi)]d_{\mu}(\pi). \end{aligned}$$

En outre, d'après [\[4, rem. 3.14, p. 212\]](#), on a

$$\int_G h(x)\overline{u}(x)dx = \varphi_h(\overline{u}).$$

Il en résulte la formule demandée.

Théorème 3.4. L'application $\overline{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$.

Preuve. Comme l'application linéaire $\overline{\mathcal{F}}$ est surjective d'après le [lemme 3.2](#), il reste à montrer qu'elle est une isométrie. Soit $T \in L^1(\widehat{G})$ et $u = \overline{\mathcal{F}}(T)$. D'une part, en vertu de la preuve du [lemme 3.1](#), il existe $T_1, T_2 \in L^2(\widehat{G})$, $f_1, f_2 \in L^2(G)$ tels que $\mathcal{P}(f_1) = T_1$, $\mathcal{P}(f_2) = T_2$, $T = T_1 T_2$, $u = \overline{f_2} * \check{f}_1$, $\|T_1\|_{L^2(\widehat{G})}^2 \leq \|T\|_{L^1(\widehat{G})}$ et $\|T_2\|_{L^2(\widehat{G})}^2 = \|T\|_{L^1(\widehat{G})}$. Il en découle

$$\|u\|_{A(G)} = \|\overline{f_2} * \check{f}_1\|_{A(G)} \leq \|f_2\|_2 \|f_1\|_2 = \|T_2\|_{L^2(\widehat{G})} \|T_1\|_{L^2(\widehat{G})} \leq \|T\|_{L^1(\widehat{G})}.$$

D'autre part, pour tous $f, g \in L^2(G)$ tels que $\check{u} = f * \check{g}$, on a, d'après la preuve du [lemme 3.2](#), $\|T\|_{L^1(\widehat{G})} \leq \|\mathcal{P}(f)\|_{L^2(\widehat{G})} \|\mathcal{P}(g)\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_2 \|g\|_2$. Donc

$$\|T\|_{L^1(\widehat{G})} \leq \inf\{\|f\|_2 \|g\|_2; \check{u} = f * \check{g}\} = \|\check{u}\|_{A(G)} = \|u\|_{A(G)}.$$

Par conséquent, $\|T\|_{L^1(\widehat{G})} = \|u\|_{A(G)}$.

Remarque 1. Le fait que $\overline{\mathcal{F}}$ soit une isométrie redonne une deuxième preuve que $\overline{\mathcal{F}}$ est injective. Notre preuve de l'égalité $\|T\|_{L^1(\widehat{G})} = \|u\|_{A(G)}$, qui est valable lorsque G est unimodulaire de type I ou $G = ax + b$ est le groupe affine d'un corps local, redonne une nouvelle preuve plus simple que celles utilisées dans ([\[5, p. 236\]](#) et [\[7, p. 219\]](#)). La multiplication usuelle des fonctions dans l'algèbre de Banach commutative $A(G)$ se transporte par $\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ en une multiplication (commutative) d'algèbre de Banach commutative, dans $L^1(\widehat{G})$, des champs d'opérateurs.

L'application $\overline{\mathcal{F}}$ est appelée la cotransformation de Fourier. On définit la cotransformée de Fourier régularisée d'une fonction $f \in A(G)$ par $\hat{f} := \overline{\mathcal{F}}^{-1}(f)$.

Corollaire 3.5. La cotransformation de Fourier régularisée (inverse)

$$\hat{f} \longrightarrow f(x) := \int_{\widehat{G}} Tr[\hat{f}(\pi)\pi(x)^{-1}]d_{\mu}(\pi)$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$.

Corollaire 3.6. L'espace $L^1(\widehat{G})$ est un espace de Banach séparable.

Les résultats de cette note permettent, d'une part, de généraliser une propriété de Paley–Wiener (cf. [9]) aux groupes localement compacts séparables dont les représentations régulières sont de type I, et d'autre part, de donner une nouvelle famille $A_{\hat{p}}(G)$ d'espaces de Banach à poids (cf. [10]), qui sont les algèbres (de Banach) de Beurling à poids lorsque G est abélien.

Références

- [1] G. Arzac, Opérateurs compacts dans l'espace d'une représentation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 342 (286) (1978) 687–689.
- [2] J. Dixmier, Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [3] M. Duflo, C-C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, J. Funct. Anal. 21 (2) (1976) 209–243.
- [4] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. Fr. 92 (1964) 181–236.
- [5] P. Eymard, M. Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax + b$ d'un corps local, in: Analyse harmonique sur les groupes de Lie, II, Séminaire, Nancy & Strasbourg, France, 1976 & 1978, in: Lect. Notes Math., vol. 739, Springer, Berlin, 1979, pp. 207–248 (in French).
- [6] I.C. Gohberg, M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monogr., vol. 18, American Mathematical Society, 1969.
- [7] R.L. Lipsman, Non-Abelian Fourier analysis, Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974) 209–233.
- [8] G.W. Mackey, Borel structures in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957) 134–165.
- [9] W. Nasserddine, Sur le groupe affine d'un corps local, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (7) (2006) 493–495.
- [10] W. Nasserddine, A class of Banach spaces, Proc. Jpn. Acad., Ser. A, Math. Sci. 83 (2007) 56–59.