



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse fonctionnelle

# Un contre-exemple pour un espace d'interpolation qui n'est pas faiblement LUR



*A counterexample that provides a non-weakly LUR interpolation space*

Daher Mohammad

16, square Albert-Schweitzer, 77350 Le Mée-sur-Seine, France

## INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 30 octobre 2016

Accepté après révision le 28 mars 2017

Disponible sur Internet le 27 avril 2017

Présenté par le comité de rédaction

## RÉSUMÉ

D'après un résultat précédent de l'auteur, si  $(A_0, A_1)$  est un couple d'interpolation, si  $A_0^*$  est faiblement LUR, alors les interpolés complexes  $(A_0^*, A_1^*)_\theta$  le sont encore. On construit ici un couple d'interpolation  $(B_0, B_1)$  dont les interpolés complexes ne sont même pas strictement convexes, alors que  $B_0$  est LUR.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## ABSTRACT

According to a previous result of the author, if  $(A_0, A_1)$  is an interpolation couple, if  $A_0^*$  is weakly LUR, then the complex interpolation spaces  $(A_0^*, A_1^*)_\theta$  have the same property. Here we construct an interpolation couple  $(B_0, B_1)$  where  $B_0$  is LUR, but where the complex interpolation spaces  $(B_0, B_1)_\theta$  are not strictly convex.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

## 1. Introduction

Soit  $(B_0, B_1)$  un couple d'interpolation au sens de [2, chap. II]. Dans [4, Th.5.3 et la remarque qui suit] on montre que, si  $B_0^*$  est un espace faiblement LUR, alors  $(B_0^*, B_1^*)_\theta$  l'est aussi, pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .

Supposons maintenant que  $B_0$  est un espace LUR ou faiblement LUR ou strictement convexe. L'espace d'interpolation  $B_\theta = (B_0, B_1)_\theta$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , conserve-t-il la propriété? La réponse aux trois questions est négative en général : on présente dans ce travail un couple d'interpolation  $(B_0, B_1)$  tel que  $B_0$  est un espace LUR alors que  $B_\theta$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , n'est même pas strictement convexe.

Les rappels et propriétés utilisés pour le contre-exemple sont regroupés dans les sections 2 et 3. Le contre-exemple est présenté dans la section 4.

Adresse e-mail : [m.daher@orange.fr](mailto:m.daher@orange.fr).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.03.015>

1631-073X/© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Rappelons qu'étant donné un couple d'interpolation  $(B_0, B_1)$ , l'espace d'interpolation réel  $B_{\theta,2}$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , est défini par

$$B_{\theta,2} = \left\{ a \in B_0 + B_1; \|a\|_{B_{\theta,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^+} (K(a,t)/t^\theta)^2 dt/t < +\infty \right\}$$

où

$$K(a,t) = \inf \{ \|a_0\|_{B_0} + t \|a_1\|_{B_1}; a = a_0 + a_1, a_j \in B_j, j = 0, 1 \}.$$

## 2. LUR et stricte convexité

**Définition 2.1.** Soit  $X$  un espace de Banach.

C'est un espace strictement convexe si, pour tous  $x, y \in X$  tels que  $\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = 0$ , alors  $x = y$ .

C'est un espace localement uniformément convexe (*LUR*) (resp. faiblement *LUR*) si, pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  bornée dans  $X$  et tout  $y \in X$  tels que  $\frac{\|x_n\|^2 + \|y\|^2}{2} - \left\| \frac{x_n + y}{2} \right\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $x_n - y \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$  dans  $X$  (resp. faiblement dans  $X$ ).

Il est évident que la propriété *LUR* entraîne la propriété « faiblement *LUR* », qui elle-même entraîne la stricte convexité.

**Lemme 2.2.** a) [6, cor.II.4.3 et cor.II.7.13] L'espace  $\ell^\infty(I)$  admet une norme équivalente strictement convexe si et seulement si  $I$  est dénombrable.

b) [9, lemma 2.3, Th.2.5] Le dual de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  admet un sous-espace fermé complémenté isomorphe à  $\ell^1(I)$ , où  $I$  n'est pas dénombrable.

c) Le bidual de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  n'admet pas de norme équivalente strictement convexe.

**Démonstration.** c) est une conséquence immédiate de a) et b).

**Lemme 2.3.** Le dual d'une  $C^*$  algèbre commutative unitaire admet une norme équivalente *LUR*.

**Démonstration.** Une telle algèbre  $X$  est isométriquement isomorphe à un treillis de Banach  $C(K)$ , où  $K$  est un compact de Hausdorff. Le dual de  $C(K)$  est le treillis  $M(K)$ , dont on sait qu'il ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement. D'après [5, cor. 1.3],  $M(K)$ , donc  $X^*$ , admet une norme équivalente *LUR*. On notera que la définition de la propriété *LUR* dans [5] est équivalente à celle considérée ici d'après [6, prop. II.1.2].

**Lemme 2.4.** Soient  $B_0, B_1$  des espaces de Banach tels que  $B_0$  soit un sous-espace vectoriel de  $B_1$ , l'identité :  $B_0 \rightarrow B_1$  étant continue.

a) Soit  $\beta \in ]0, 1[$ . Alors il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $B_{\theta,2}$  s'injecte continûment dans  $B_\beta$ .

b) Dans la situation de a), si  $B_\beta$  est strictement convexe,  $B_{\theta,2}$  admet une norme équivalente strictement convexe.

c) Si les interpolés  $B_{\theta,2}$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , admettent tous un sous-espace fermé isomorphe à  $\ell^\infty(I)$ ,  $I$  non dénombrable, ou à  $\ell^\infty(\mathbb{N})^{**}$ , alors les interpolés  $B_\beta$ ,  $\beta \in ]0, 1[$ , ne sont pas strictement convexes.

**Démonstration.** a) Soient  $\theta_0, \eta \in ]0, 1[$  tels que  $\theta_0 < \beta$ . L'espace  $B_{\theta_0} = B_0 \cap B_1$  s'injecte continûment dans  $B_\beta$ . D'après le théorème de réitération [2, th.4.6.1]  $B_{\theta_0}$  est un interpolé entre  $B_0$  et  $B_\beta$ , donc s'injecte continûment dans  $B_\beta = B_0 + B_\beta$ . D'après le théorème de réitération [2, th.4.7.2]  $(B_{\theta_0}, B_\beta)_{\eta,2} = B_{\theta,2}$  où  $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\beta$ . En particulier,  $B_{\theta,2}$  s'injecte continûment dans  $B_\beta$ .

b) D'après l'hypothèse et a), [6, th.2.4] implique que  $B_{\theta,2}$  admet une norme équivalente strictement convexe.

c) Supposons que  $B_\beta$  soit strictement convexe. D'après b),  $B_{\theta,2}$  admet une norme équivalente strictement convexe. C'est impossible d'après le lemme 2.2 si  $B_{\theta,2}$  contient  $\ell^\infty(I)$ ,  $I$  non dénombrable, ou  $\ell^\infty(\mathbb{N})^{**}$ .

## 3. Produits d'Arens

Rappelons d'abord quelques propriétés des deux produits d'Arens définis sur le bidual d'une algèbre de Banach. Comme nous n'utiliserons pas leur définition, mais seulement des conséquences, nous précisons seulement le premier produit, le deuxième étant défini de façon analogue, voir par exemple [10].

Pour un espace de Banach  $X$ , on note  $\langle x, x^* \rangle$  l'accouplement entre un élément de  $X$  et un élément de  $X^*$ .

**Définition 3.1.** Soit  $(\mathcal{A}, \times)$  une algèbre de Banach. Le premier produit d'Arens sur  $\mathcal{A}^{**}$ , noté  $a^{**} \times_1 b^{**}$  pour  $a^{**}, b^{**} \in \mathcal{A}^{**}$ , est défini de la façon suivante : si  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a^* \in \mathcal{A}^*$ ,

$a^* \times_1 a \in \mathcal{A}^*$  est défini par  $\langle b, a^* \times_1 a \rangle = \langle a \times b, a^* \rangle$ ,  $b \in \mathcal{A}$ .

$a^* \times_1 a^{**} \in \mathcal{A}^*$  est défini par  $\langle b, a^* \times_1 a^{**} \rangle = \langle a^* \times_1 b, a^{**} \rangle$ ,  $b \in \mathcal{A}$ .

$a^{**} \times_1 b^{**} \in \mathcal{A}^{**}$  est défini par  $\langle b^*, a^{**} \times_1 b^{**} \rangle = \langle b^* \times_1 b^{**}, a^{**} \rangle, b^* \in \mathcal{A}^*$ .

D'après [1]  $(\mathcal{A}^{**}, \times_1)$  et  $(\mathcal{A}^{**}, \times_2)$  sont des algèbres de Banach.

Soient  $(x_\alpha)_{\alpha \in I}, (y_\beta)_{\beta \in J}$  deux suites généralisées dans  $\mathcal{A}$  telles que  $x_\alpha \rightarrow x^{**} \in \mathcal{A}^{**}$  et  $y_\beta \rightarrow y^{**} \in \mathcal{A}^{**}$ , pour  $\sigma(\mathcal{A}^{**}, \mathcal{A}^*)$ . D'après [10, lemme 2.2 (a)]

$$\begin{aligned} \langle a^*, x^{**} \times_1 y^{**} \rangle &= \lim_\alpha \left[ \lim_{\beta} \langle a^*, x_\alpha \times y_\beta \rangle \right] \\ \langle a^*, x^{**} \times_2 y^{**} \rangle &= \lim_\beta \left[ \lim_\alpha \langle a^*, x_\alpha \times y_\beta \rangle \right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rappelons que, si  $\mathcal{A}$  est commutative,  $\mathcal{A}^{**}$  l'est si et seulement si les deux produits d'Arens coïncident [1].

D'après [10, th.2.1], les produits d'Arens coïncident sur  $\mathcal{A}^{**}$  si et seulement si, pour tout  $a^* \in \mathcal{A}^*$ , l'application  $a \rightarrow a^* \times_1 a$  est faiblement compacte :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ .

En particulier, si  $K$  est un compact de Hausdorff,  $C(K)^{**}$  est commutative, puisque l'application :  $C(K) \rightarrow M(K), f \rightarrow \mu \times_1 f$  se factorise par  $L^2(|\mu|)$ .

Les relations (3.1) impliquent la propriété suivante :

**Propriété 1.** Soient  $(\mathcal{A}, \times)$  et  $(\mathcal{B}, \times)$  des algèbres de Banach et  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un homomorphisme. Alors  $i^{**}$  est un homomorphisme :  $(\mathcal{A}^{**}, \times_1) \rightarrow (\mathcal{B}^{**}, \times_1)$  (resp.  $(\mathcal{A}^{**}, \times_2) \rightarrow (\mathcal{B}^{**}, \times_2)$ ). Si  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  sont unitaires, il en est de même pour les biduaux ; si de plus  $i$  préserve l'identité,  $i^{**}$  aussi.

**Propriété 2.** Si  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre,  $\mathcal{A}^{**}$  aussi et l'involution de  $\mathcal{A}$  définit celle de  $\mathcal{A}^{**}$  par passage à la limite pour  $\sigma(\mathcal{A}^{**}, \mathcal{A}^*)$ .

En effet, d'après [8, Th.12.1.3],  $\mathcal{A}$  s'identifie à une sous-algèbre  $\pi(\mathcal{A})$  de  $B(H)$ ,  $\mathcal{A}^{**}$  s'identifie (comme  $C^*$ -algèbre) à l'adhérence  $\mathcal{B}$  de  $\pi(\mathcal{A})$  pour la topologie faible d'opérateurs, qui est une algèbre de von Neumann, et  $\mathcal{A}^*$  s'identifie au préduel de  $\mathcal{B}$ . Donc la topologie  $\sigma(\mathcal{A}^{**}, \mathcal{A}^*)$  correspond à  $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{B}_*)$ , induite par la topologie faible d'opérateurs de  $B(H)$ , pour laquelle l'involution est continue.

On note  $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{Z}), \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z}), B(\mathbb{Z}) = \widehat{M(\mathbb{T})}, \widehat{C} = \widehat{C(\mathbb{T})}$ , et  $i$  l'injection canonique d'image dense :  $\ell^1 \rightarrow \widehat{C}$ .

$\widehat{C}$  est muni de la convolution  $*$  et de l'involution  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\overline{a_{-n}})_{n \in \mathbb{Z}}$ , qui en font une  $C^*$ -algèbre unitaire isomorphe à  $C(\mathbb{T})$ .

$\ell^1$ , muni de la convolution  $*$ , est une algèbre commutative unitaire, mais les algèbres unitaires  $(\ell^{1**}, \times_1), (\ell^{1**}, \times_2)$  ne sont pas commutatives.

$i$  est un homomorphisme d'algèbres unitaires, et  $i(\ell^1)$  est stable par l'involution de  $\widehat{C}$ .

On munit désormais  $\ell^{1**}$  du premier produit d'Arens. Rappelons que les deux produits coïncident sur  $\widehat{C}^{**}$ .

**Lemme 3.2.** a) Soit  $G = i^{**}(\ell^{1**})$ . C'est une sous-algèbre unitaire de  $\widehat{C}^{**}$ , stable par l'involution de  $\widehat{C}^{**}$ .

b) Soit  $F$  l'adhérence en norme de  $G$  dans  $\widehat{C}^{**}$ . C'est une  $C^*$ -algèbre commutative unitaire.

**Démonstration.** a) D'après ce qui précède et la propriété 1,  $G$  est une sous-algèbre de  $\widehat{C}^{**}$ . Comme  $i(\ell^1)$  est stable par l'involution de  $\widehat{C}$ , comme  $i(\ell^1)$  est dense dans  $G$  pour  $\sigma(\widehat{C}^{**}, B(\mathbb{Z}))$ , la propriété 2 entraîne la stabilité de  $G$  par l'involution de  $\widehat{C}^{**}$ .

b) D'après a)  $F$  est une sous-algèbre fermée unitaire de  $\widehat{C}^{**}$ , stable par l'involution de  $\widehat{C}^{**}$ . La commutativité de  $\widehat{C}^{**}$  donne la conclusion.

**Remarque 3.3.** L' injection  $i^* : B(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$  se factorise par  $E$ , adhérence de  $B(\mathbb{Z})$  dans  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ . Donc  $i^* = I_E \circ J$ , où  $J : B(\mathbb{Z}) \rightarrow E$  est l'injection canonique d'image dense,  $I_E$  est l'identité :  $E \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ . Comme  $I_E^*$  est l'application quotient canonique :  $\ell^{1**} \rightarrow \ell^{1**}/E^\perp = E^*$ , on obtient l'identification, comme sous-espaces vectoriels de  $\widehat{C}^{**}$ ,

$$G = i^{**}(\ell^{1**}) = J^* \circ I_E^*(\ell^{1**}) = J^*(E^*). \tag{3.2}$$

L'espace  $G = J^*(E^*)$  est désormais muni de la norme de  $E^*$  (noter que  $J^*$  est injective).

#### 4. Le contre-exemple

Avant d'aborder le résultat principal, rappelons dans le théorème suivant des propriétés de l'interpolation réelle.

Un couple d'interpolation  $(A_0, A_1)$  est dit régulier si  $A_0 \cap A_1$  est dense dans  $A_0$  et  $A_1$ . Alors le dual de  $A_0 \cap A_1$  est  $A_0^* + A_1^*$ , et on peut identifier  $A_0^*, A_1^*$  à des sous espaces vectoriels de  $A_0^* + A_1^*$ . En ce sens,  $(A_0^*, A_1^*)$  est un couple d'interpolation.

**Théorème 4.1.** Soient  $(A_0, A_1)$  un couple d'interpolation et  $\theta \in ]0, 1[$ . Alors :

- a) [2, th.3.4.2]  $(A_0, A_1)_{\theta,2} = (A_0^0, A_1^1)_{\theta,2}$ , où  $A_j^j$  est l'adhérence de  $A_0 \cap A_1$  dans  $A_j$ ,  $j \in \{0, 1\}$ . De plus  $A_0 \cap A_1$  est dense dans  $A_{\theta,2}$ .
- b) [2, th.3.7.1] Si le couple  $(A_0, A_1)$  est régulier, le dual de  $A_{\theta,2}$  s'identifie isomorphiquement à  $(A_0^*, A_1^*)_{\theta,2}$ .

Les notations  $E, G, F$  sont celles de la section 3, et  $A(\mathbb{Z}) = \widehat{L^1(\mathbb{T})}$ .

**Proposition 4.2.** On considère le couple régulier  $(A(\mathbb{Z}), c_0(\mathbb{Z}))$  et  $A_{\theta,2} = (A(\mathbb{Z}), c_0(\mathbb{Z}))_{\theta,2}$ .

- a) [3]  $A_{\theta,2}$  contient  $c_0$  isomorphiquement.
- b)  $A_{\theta,2}^{****}$  n'admet pas de norme équivalente strictement convexe.
- c)  $A_{\theta,2}^{****}$  est isomorphe à  $(G^*, F^*)_{\theta,2}$ .

**Démonstration.** b) D'après a),  $A_{\theta,2}^{****}$  contient  $c_0^{****} = \ell^{\infty}$  et on applique le lemme 2.2.

c) En appliquant plusieurs fois le théorème 4.1, on obtient les isomorphismes suivants, compte tenu de la régularité des couples  $(\widehat{C}, \ell^1(\mathbb{Z}))$ ,  $(B(\mathbb{Z}), E)$  et  $(F, G)$ , compte tenu de (3.2) et de la définition de la norme de  $G$  :

$$\begin{aligned} A_{\theta,2}^* &= (\widehat{C}, \ell^1(\mathbb{Z}))_{\theta,2}, & A_{\theta,2}^{**} &= (B(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))_{\theta,2} = (B(\mathbb{Z}), E)_{\theta,2} \\ A_{\theta,2}^{***} &= (\widehat{C}^{**}, E^*)_{\theta,2} = (\widehat{C}^{**}, J^*(E^*))_{\theta,2} = (F, J^*(E^*))_{\theta,2} = (F, G)_{\theta,2} \\ A_{\theta,2}^{****} &= (F^*, G^*)_{\theta,2}. \end{aligned}$$

**Théorème 4.3.** Soit  $B$  l'espace  $F^*$  muni d'une norme équivalente LUR grâce aux lemmes 3.2 et 2.3. Alors  $(B, G^*)$  est un couple d'interpolation dont les interpolés complexes ne sont pas strictement convexes.

**Démonstration.** D'après la proposition 4.2,  $(F^*, G^*)_{\theta,2}$  contient  $\ell^{\infty}$  isomorphiquement. Comme  $(B, G^*)_{\theta,2}$  est isomorphe à  $(F^*, G^*)_{\theta,2}$  (par définition de ces interpolés),  $(B, G^*)_{\theta,2}$  contient  $\ell^{\infty}$  isomorphiquement, donc n'est pas strictement convexe d'après le lemme 2.4.

**Commentaire :** Au vu du résultat de [4], la norme de  $B$  n'est pas une norme de dual. Cela peut se voir directement ainsi.

Supposons que  $B = X^*$  isométriquement, où  $X$  est un espace de Banach. Comme  $X^*$  est LUR, la norme de  $X$  est Fréchet-différentiable d'après [6, chap.II §6 prop. 1.5]. Alors  $X^*$  a la propriété de Radon–Nikodym d'après [7, chap.VI §4 cor. 4]. Par isomorphisme,  $F^*$  a aussi cette propriété, donc tout sous espace fermé séparable de  $F$  a un dual séparable, d'après [7, chap. VI §6 cor.1]. Or, par définition,  $F$  admet  $\widehat{C}$ , adhérence de  $i(l^1)$ , comme sous-espace fermé séparable. Le dual de  $\widehat{C}$ , étant isométrique à  $M(\mathbb{T})$ , n'a pas la propriété de Radon–Nikodym.

## Remerciements

Je remercie chaleureusement Bernard Maurey, Gilles Godefroy et Françoise Lust-Piquard pour le temps qu'ils m'ont consacré lors de la préparation de ce travail. Je remercie également l'ancien directeur de mon établissement, Hamad Alnafef, ainsi que le nouveau directeur Alrajeh Ahmad et son adjoint Aldosary Metrik, qui m'ont encouragé à continuer à faire de la recherche.

## Références

- [1] R.F. Arens, The adjoint of bilinear operation, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 839–848.
- [2] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, an Introduction, Springer-Verlag, 1976.
- [3] O. Blasco, Q. Xu, Interpolation between vector valued Hardy spaces, J. Funct. Anal. 102 (1991) 331–359.
- [4] M. Daher, Convexité uniforme faible dans les espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 354 (10) (2016) 1000–1005.
- [5] W.J. Davis, N. Ghoussoub, J. Lindenstrauss, A lattice renorming theorem and applications to vector-valued processes, Trans. Amer. Math. Soc. 263 (1981) 531–540.
- [6] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, Smoothness and Renormings in Banach Spaces, Pitman Monogr. Surv., vol. 64, Longman Scientific, 1993.
- [7] J. Diestel, Geometry of Banach Spaces, Lect. Notes Math., vol. 485, Springer-Verlag, 1975.
- [8] J. Dixmier, Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars et  $C^e$ , Paris, 1964.
- [9] R. Haydon, On dual  $L^1$  spaces and injective bidual Banach spaces, Isr. J. Math. 31 (2) (1978) 142–152.
- [10] J. Hannefeld, A note on the Arens product, Pac. J. Math. 26 (1) (1968) 115–119.