



Géométrie/Topologie

Homéomorphismes et nombre d'intersection

*Homeomorphisms and intersection numbers*Ken'ichi Ohshika^a, Athanase Papadopoulos^b^a Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan^b Institut de recherche mathématique avancée (Université de Strasbourg et CNRS), 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 10 avril 2018

Accepté après révision le 29 juin 2018

Disponible sur Internet le 5 juillet 2018

Présenté par Claire Voisin

R É S U M É

On démontre deux résultats de rigidité pour des groupes d'automorphismes de l'espace $\mathcal{ML}(S)$ des laminations géodésiques mesurées d'une surface hyperbolique fermée orientable S et de l'espace $\mathcal{PML}(S)$ des laminations géodésiques mesurées projectives de S . Les résultats concernent les automorphismes de $\mathcal{ML}(S)$ préservant le nombre d'intersection géométrique entre laminations et les homéomorphismes de $\mathcal{PML}(S)$ préservant les ensembles de zéros de ces fonctions.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

A B S T R A C T

We prove two rigidity results for automorphism groups of the spaces $\mathcal{ML}(S)$ of measured laminations on a closed orientable hyperbolic surface S and $\mathcal{PML}(S)$ of projective measured laminations on this surface. The results concern the homeomorphisms of $\mathcal{ML}(S)$ that preserve the geometric intersection between laminations and the homeomorphisms of $\mathcal{PML}(S)$ that preserve the zero sets of these intersection functions.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Soit S une surface fermée orientable de genre $g \geq 2$, $\mathcal{ML}(S)$ l'espace des laminations géodésiques mesurées de S (pour une certaine structure hyperbolique) et $\mathcal{PML}(S)$ le projectifié de cet espace. On désigne par $i(\lambda, \mu)$ le nombre d'intersection géométrique entre deux éléments λ et μ de $\mathcal{ML}(S)$.

Dans cet article, on démontre les deux théorèmes de rigidité suivants.

Théorème 1. Soit $f : \mathcal{ML}(S) \rightarrow \mathcal{ML}(S)$ un homéomorphisme tel que, pour tout λ et μ dans $\mathcal{ML}(S)$, on a $i(\lambda, \mu) = i(f(\lambda), f(\mu))$. Alors, f est induit par un homéomorphisme de S .

Théorème 2. Soit $f : \mathcal{PML}(S) \rightarrow \mathcal{PML}(S)$ un homéomorphisme tel que pour tout λ et μ dans $\mathcal{PML}(S)$, on a l'équivalence $i(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow i(f(\lambda), f(\mu)) = 0$. Alors, f est induit par un homéomorphisme de S .

Adresses e-mail : ohshika@math.sci.osaka-u.ac.jp (K. Ohshika), papadop@math.unistra.fr (A. Papadopoulos).

<https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.06.009>

1631-073X/© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

À partir des théorèmes 1 et 2, on démontre deux autres résultats qui donnent une caractérisation des groupes d'automorphismes de $\mathcal{ML}(S)$ et $\mathcal{PML}(S)$ préservant certaines structures. Avant de les énoncer on introduit quelques notations.

Soit $\text{Mod}(S)$ le groupe modulaire de S , c'est-à-dire le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes de S préservant l'orientation, et $\text{Mod}^*(S)$ le groupe modulaire étendu de S , c'est-à-dire le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes quelconques de S .

Étant donné un homéomorphisme $f : \mathcal{ML}(S) \rightarrow \mathcal{ML}(S)$, on dit que f préserve le nombre d'intersection si pour toutes laminations mesurées λ et μ de $\mathcal{ML}(S)$, on a $i(\lambda, \mu) = i(f(\lambda), f(\mu))$.

On désigne par $\text{Aut}(\mathcal{ML}(S))$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{ML}(S)$ qui préservent le nombre d'intersection. On a un homomorphisme naturel $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{ML}(S))$.

On a alors :

Théorème 3. *Pour tout $g \geq 3$, l'homomorphisme naturel $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{ML}(S))$ est un isomorphisme. Pour $g = 2$, cet homomorphisme est surjectif et son noyau est le groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2$ engendré par l'involution hyperelliptique de S .*

Même si le nombre d'intersection entre deux éléments λ et μ de $\mathcal{PML}(S)$ n'est pas défini, la relation $i(\lambda, \mu) = 0$ a un sens.

On notera par $\text{Aut}(\mathcal{PML}(S))$ le groupe d'homéomorphismes f de $\mathcal{PML}(S)$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout λ et μ dans $\mathcal{PML}(S)$, on a l'équivalence $i(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow i(f(\lambda), f(\mu)) = 0$.

On a un homomorphisme naturel $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{PML}(S))$.

On démontrera aussi le théorème suivant :

Théorème 4. *Pour tout $g \geq 3$, l'homomorphisme naturel $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{PML}(S))$ est un isomorphisme. Pour $g = 2$, cet homomorphisme est surjectif et son noyau est le groupe $\mathbb{Z}/2$ engendré par l'involution hyperelliptique de S .*

On démontrera d'abord le théorème 2, ensuite le théorème 1, et enfin les théorèmes 3 et 4.

On commence par établir quelques lemmes.

Étant donné un élément λ de $\mathcal{PML}(S)$, on lui associe l'espace nul $N(\lambda)$ défini par

$$N(\lambda) = \{\mu \in \mathcal{PML}(S) \mid i(\mu, \lambda) = 0\}.$$

Étant donné un homéomorphisme $f : \mathcal{PML}(S) \rightarrow \mathcal{PML}(S)$ satisfaisant l'hypothèse du théorème 2, on a, pour tout λ dans $\mathcal{PML}(S)$, $N(f(\lambda)) = f(N(\lambda))$.

On notera $|\lambda| \subset S$ le support de λ .

La propriété suivante est immédiate :

(*) si $|\lambda|$ est contenu en $|\lambda'|$, on a $N(\lambda') \subset N(\lambda)$.

En revanche, $N(\lambda') \subset N(\lambda)$ n'implique pas nécessairement $|\lambda| \subset |\lambda'|$.

Étant donnée une lamination géodésique mesurée l , on appelle complétion de l la lamination géodésique mesurée obtenue à partir de l en ajoutant toutes les géodésiques isotopes aux composantes des bords des surfaces de support des composantes minimales de l . Ici, une surface de support d'une composante minimale est une sous-surface à bord non contractible de S contenant cette composante et qui est, à isotopie près, la plus petite par rapport de l'inclusion.

On a alors le lemme suivant.

Lemme 5. *Soient λ et λ' deux éléments de $\mathcal{PML}(S)$. Si $N(\lambda') \subset N(\lambda)$, la complétion de $|\lambda|$ est contenue dans celle de $|\lambda'|$.*

Démonstration. Supposons que $N(\lambda') \subset N(\lambda)$. Comme λ' est contenue dans $N(\lambda') \subset N(\lambda)$, il n'y a pas de composante de λ qui rencontre λ' transversalement. Il s'ensuit que la complétion de $|\lambda|$ ne rencontre pas non plus celle de $|\lambda'|$ transversalement.

Il suffit de prouver qu'il n'y a pas de composante minimale de $|\lambda|$ disjointe de la complétion de $|\lambda'|$. Supposons qu'il y en ait une, l . Alors, on peut trouver une géodésique simple fermée disjointe de $|\lambda'|$ qui rencontre l transversalement, ce qui contredit l'hypothèse que $N(\lambda') \subset N(\lambda)$. \square

Pour abrégé, on appellera « courbe » une géodésique simple fermée de S .

Dans ce qui suit, quand on parle de dimension d'un sous-espace de $\mathcal{ML}(S)$ ou de $\mathcal{PML}(S)$, il s'agit de dimension topologique, au sens de la structure de variété de ces espaces. (On peut se référer ici à la structure linéaire par morceaux, respectivement linéaire-projective par morceaux, de ces espaces.) Il sera sous-entendu que ces espaces sont des sous-variétés de $\mathcal{ML}(S)$ (respectivement $\mathcal{PML}(S)$) et que leur dimension est bien définie.

On démontre facilement le lemme suivant.

Lemme 6. *Un élément λ de $\mathcal{PML}(S)$ est une courbe si et seulement si $\dim N(\lambda) = 6g - 8$.*

Notons que l'hypothèse selon laquelle $g \geq 2$ est essentielle pour ce lemme. En fait, dans le cas du genre 1, la dimension de l'espace nul est toujours 1, et l'on ne peut pas distinguer les courbes des autres laminations par cette dimension.

On déduit du lemme 6 que f préserve l'ensemble des courbes.

On donne maintenant une caractérisation des courbes multiples pondérées de S qui permettra de montrer que f préserve l'ensemble des courbes multiples pondérées à nombre de composantes fixé.

Lemme 7. *Pour tout $n \geq 1$, $\lambda \in \mathcal{PML}(S)$ est une courbe multiple pondérée à n composantes si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (1) $\dim N(\lambda) = 6g - 7 - n$;
- (2) il existe une suite $\lambda_n = \lambda, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1$ telle que pour tout $j = 1, \dots, n$, $N(\lambda_{j+1}) \subset N(\lambda_j)$ et $\dim N(\lambda_j) = 6g - 7 - j$.

Démonstration. La partie « seulement si » découle immédiatement du lemme 6 et de la propriété (*) ci-dessus.

Pour démontrer la partie « si », supposons que λ_{j+1} soit une courbe multiple et que $N(\lambda_{j+1}) \subset N(\lambda_j)$. Par le lemme 5, on sait que $|\lambda_j|$ contient $|\lambda_{j+1}|$. (Notons que la complétion ne change pas $|\lambda_{j+1}|$, comme λ_{j+1} est une courbe multiple.) Si $|\lambda_j| \setminus |\lambda_{j+1}|$ n'est pas une courbe, alors $\dim N(\lambda_j) < \dim N(\lambda_{j+1}) - 1$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Démonstration du théorème 2. Par le lemme 7, l'homéomorphisme f préserve l'ensemble des courbes multiples à nombre de composantes donné, et l'inclusion entre deux courbes multiples. Ainsi, f induit un automorphisme du complexe de courbes $\mathcal{C}(S)$ de S . Par le théorème d'Ivanov [2], cet automorphisme est induit par un homéomorphisme g de S qui induit la même bijection sur $\mathcal{C}(S)$ que f . Comme $\mathcal{C}(S)$ est dense dans $\mathcal{PML}(S)$, la continuité de f et g_* implique que $f = g_*$, où l'on désigne par g_* le homéomorphisme de $\mathcal{PML}(S)$ induit par g . \square

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Pour une lamination géodésique mesurée λ , on définit son espace nul par

$$\mathcal{N}(\lambda) = \{\mu \in \mathcal{ML}(S) \mid i(\lambda, \mu) = 0\}.$$

De la même manière que pour le lemme 6, on démontre que $\dim \mathcal{N}(\lambda) = 6g - 7$ si et seulement si λ est une courbe pondérée. De plus, l'espace nul ne change pas, même si l'on change le poids sur la courbe. Il s'ensuit que, pour toute courbe c , l'homéomorphisme f envoie le rayon \mathbb{R}_+c dans $\mathcal{ML}(S)$ sur le rayon $\mathbb{R}_+f(c)$. Comme les courbes pondérées sont denses dans $\mathcal{ML}(S)$, on voit que f envoie le rayon $\mathbb{R}_+\lambda$ sur le rayon $\mathbb{R}_+f(\lambda)$ pour toute lamination mesurée λ . Donc, l'homéomorphisme f du théorème 1 induit un homéomorphisme $f : \mathcal{PML}(S) \rightarrow \mathcal{PML}(S)$ qui satisfait l'hypothèse du théorème 2. Il existe alors, par le théorème 2, un automorphisme g de S tel que $g_* = f$ sur $\mathcal{PML}(S)$.

Lemme 8. *Soient c_1, c_2 deux courbes pondérées disjointes. Alors $f(c_1 \cup c_2) = f(c_1) \cup f(c_2)$.*

Démonstration. On a $i(\cdot, c_1 \cup c_2) = i(\cdot, c_1) + i(\cdot, c_2)$. Par ailleurs, si $i(\cdot, \lambda) = i(\cdot, c_1) + i(\cdot, c_2)$ pour c_1, c_2 disjointes alors on a $\lambda = c_1 \cup c_2$. Par le théorème 2, on sait que les deux courbes pondérées $f(c_1)$ et $f(c_2)$ sont disjointes. Comme $i(\cdot, f(c_1 \cup c_2)) = i(f^{-1}(\cdot), c_1 \cup c_2) = i(f^{-1}(\cdot), c_1) + i(f^{-1}(\cdot), c_2) = i(\cdot, f(c_1)) + i(\cdot, f(c_2))$, on a $f(c_1 \cup c_2) = f(c_1) \cup f(c_2)$. \square

Étant donnée une courbe c , on pose $f(c) = m_c g(c)$ où g est un automorphisme obtenu par le théorème 2 et m_c un poids. Pour compléter la démonstration du théorème 1, il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme 9. $m_c = 1$ pour toute courbe c .

Démonstration. Montrons que m_c ne dépend pas de c . D'abord, on considère deux courbes disjointes c et d . Comme $f = g_*$ sur $\mathcal{PML}(S)$, on a $f(c \cup d) = m(g(c) \cup g(d))$. Par le lemme 8, on a $f(c \cup d) = f(c) \cup f(d)$, et par définition $f(c) = m_c g(c)$ et $f(d) = m_d g(d)$. Donc on a $m_c = m = m_d$.

Étant données deux courbes quelconques c et d , il existe une suite de courbes $c = c_1, \dots, c_n = d$ telles que c_j et c_{j+1} sont disjointes, par la connexité du complexe des courbes. Donc on a $m_c = m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_d$.

Ainsi, m_c ne dépend pas de c , et de là il découle facilement que $m_c = 1$. \square

Démonstration des théorèmes 3 et 4. Par les théorèmes 1 et 2, les homomorphismes $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{ML}(S))$ et $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{PML}(S))$ sont surjectifs. Pour $g \geq 3$, ils sont tous les deux injectifs, car si deux éléments de $\text{Mod}^*(S)$ ont la même action sur $\mathcal{ML}(S)$ ou sur $\mathcal{PML}(S)$, ils induisent le même automorphisme de $\mathcal{C}(S)$, et l'on sait par [2] que l'homomorphisme $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ est injectif. Pour $g = 2$, le noyau de chacun des homomorphismes $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{ML}(S))$ et $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{PML}(S))$ est $\mathbb{Z}/2$, ce qui découle aussi de [2], où il est montré que dans ce cas l'homomorphisme naturel $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ est surjectif et son noyau est $\mathbb{Z}/2$, engendré par l'involution hyperelliptique de S . \square

Remarque 10. Les résultats de cet article peuvent être considérés comme des variations sur des résultats de Feng Luo dans [3], même si les énoncés et les démonstrations sont différents. En particulier, Luo étudie sur $\mathcal{ML}(S)$ des automorphismes d'espaces de fonctions associées à des courbes, ainsi que des espaces de zéros de ces fonctions, et dans ce cas l'action induite sur le complexe de courbes $\mathcal{C}(S)$ est immédiate.

Remarque 11. Il y a plusieurs autres résultats concernant la rigidité des actions de $\text{Mod}^*(S)$. L'un des premiers en est celui de Royden [8] qui a montré que le groupe d'isométries de l'espace de Teichmüller de S coïncide avec $\text{Mod}^*(S)$. Papadopoulos [6] et Ohshika [4] ont démontré que le groupe d'homéomorphismes de l'espace de laminations non mesurées égale $\text{Mod}^*(S)$. D'autres résultats de rigidité ont été établis pour l'espace de laminations géodésiques avec la topologie de Thurston par Charitos, Papadoperakis et Papadopoulos [1] et pour le bord réduit de Bers de l'espace de Teichmüller par Ohshika [5]. Le lecteur pourra consulter [7] pour une exposition du sujet.

Références

- [1] C. Charitos, I. Papadoperakis, A. Papadopoulos, On the homeomorphisms of the space of geodesic laminations on a hyperbolic surface, *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 (6) (2014) 2179–2191.
- [2] N. Ivanov, Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 1997 (14) (1997) 651–666.
- [3] F. Luo, Automorphisms of Thurston's space of measured laminations, in: *The Tradition of Ahlfors and Bers*, Stony Brook, NY, 1998, in: *Contemp. Math.*, vol. 256, 2000, pp. 221–225.
- [4] K. Ohshika, A note on the rigidity of unmeasured lamination spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (12) (2013) 4385–4389.
- [5] K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 64 (1) (2014) 145–176.
- [6] A. Papadopoulos, A rigidity theorem for the mapping class group action on the space of unmeasured foliations on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (12) (2008) 4453–4460.
- [7] A. Papadopoulos, Actions of mapping class groups, in: *Handbook of Group Actions*, Vol. I, in: *Adv. Lect. Math. (ALM)*, vol. 31, Int. Press, Somerville, MA, USA, 2015, pp. 189–248.
- [8] H. Royden, Automorphisms and isometries of Teichmüller space, in: *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Proc. Conf., Stony Brook, New York, 1969, in: *Ann. Math. Stud.*, vol. 66, 1971, pp. 369–383.