



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Théorie des groupes/Systèmes dynamiques

## Stabilité analytique et convergence locale de translatées en dynamique homogène $S$ -arithmétique



### *Analytic stability and local convergence of translates in $S$ -arithmetic homogeneous dynamics*

Rodolphe Richard<sup>a</sup>, Tomasz Zamojski<sup>b</sup><sup>a</sup> DPMMS, University of Cambridge, United Kingdom<sup>b</sup> École polytechnique fédérale de Lausanne, Switzerland

#### INFO ARTICLE

##### Historique de l'article :

Reçu le 11 septembre 2018

Accepté après révision le 28 février 2019

Disponible sur Internet le 15 mars 2019

Présenté par le comité de rédaction

#### RÉSUMÉ

Nous présentons le résultat principal de Richard et Zamojski [14] concernant, en dynamique homogène, le problème général de la dynamique des suites de translatées d'une certaine mesure dans un espace de réseaux  $S$ -arithmétiques.

© 2019 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

#### ABSTRACT

We present the main result of Richard and Zamojski [14] concerning, in homogeneous dynamics, the general problem of the dynamics of sequences of translates of a certain measure in a space of  $S$ -arithmetic lattices.

© 2019 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

Nous présentons le résultat principal de [14], qui est la pierre angulaire de la démonstration [12], obtenue par l'un des auteurs avec A. Yafaev, de ce que la conjecture d'André–Pink–Zannier, restreinte au cas de  $S$ -orbites de Hecke dans une variété de Shimura, en contrepartie de raffinements, est une conséquence de la conjecture de Shafarevich (formulée pour cette  $S$ -orbite de Hecke). Voir la note [8] pour un résumé de cette application, [12] pour une version prépubliée. Mentionnons encore [13] et [6] pour approfondir.

Mentionnons l'approche concurrentement appliquée par M. Orr [5] pour étudier cette conjecture, à savoir la stratégie «  $O$ -minimale » de Pila–Zannier et le théorème de Ax–Lindemann hyperbolique [16,4]. Les outils exposés dans cette note permettent de réaliser une approche indépendante, l'approche « ergodique », laquelle rapporte en bonus des raffinements.

Notre énoncé est un énoncé de dynamique homogène. On s'attaque au problème général de la dynamique des suites de translatées  $\mu_n = g_n \cdot \mu_\Omega$  d'une certaine mesure  $\mu_\Omega$  dans un espace de réseaux  $S$ -arithmétiques  $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$ , où  $\mathbf{Q}_S =$

Adresses e-mail : [rodolphe.richard@normalseup.org](mailto:rodolphe.richard@normalseup.org) (R. Richard), [thomas.zamojski@gmail.com](mailto:thomas.zamojski@gmail.com) (T. Zamojski).

$\prod_{v \in S} \mathbf{Q}_v$  pour un ensemble fini  $S$  de places  $v$  de  $\mathbf{Q}$ , où  $G$  est un groupe algébrique semi-simple sur  $\mathbf{Q}$ , et  $\Gamma$  est un réseau  $S$ -arithmétique. La mesure initiale  $\mu_\Omega$  provient d'un ouvert borné non vide  $\Omega$  d'un sous-groupe  $H$  réductif dans  $G(\mathbf{Q}_S)$  : on restreint à  $\Omega$  une mesure de Haar de  $H$ , et  $\mu_\Omega$  est obtenue par image directe suivant  $G(\mathbf{Q}_S) \rightarrow G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$ . La notion de sous-groupe réductif est prise dans un sens très général, au sujet duquel nous renvoyons à [14].

Nous travaillons sous une hypothèse, technique, de *stabilité analytique* sur la suite des  $g_n$ . Nous lui consacrons la prochaine section.

Nos résultats :

- décrivent les mesures limites de telles suites de mesures  $\mu_n$ ,
- décrivent les suites de  $g_n$  qui conduisent à de telles limites.

Ce sont des résultats aboutis dans le cadre de cette hypothèse.

On généralise plusieurs travaux. Le travail de thèse [10] qui, dans le même contexte, établissait l'étroitesse des suites de mesures considérées, était une généralisation de [2] d'Eskin, Mozes et Shah. Le travail ici présenté est la généralisation correspondante des résultats de dynamique contenus dans [1] par ces mêmes auteurs. Notre méthode est plus souple et notre contexte plus général, élargissant d'autant le champ des applications.

Nous passons d'abord en revue la notion de stabilité analytique de [11], technique, mais fondamentale dans [11]. Nous présentons ensuite le contenu du résultat de Richard et Zamojski [14], et terminons par les grandes lignes de la démonstration.

## 2. L'hypothèse de stabilité analytique

Dans une représentation linéaire  $G \rightarrow GL(N, K)$ , la question de savoir si une orbite adhère en l'origine s'exprime, depuis Mumford, par le terme de *stabilité*. Dans un contexte métrique, où  $K$  est un corps archimédien ou ultramétrique, on examinera plutôt combien une orbite s'approche de l'origine.

Appliqué aux orbites des points d'un réseau  $\Lambda$  de  $K^N$ , cela mène à savoir, à la lumière du critère de Mahler, si l'orbite de ce réseau diverge dans l'espace des réseaux  $GL(N, K)/GL(\Lambda)$ . Plutôt que l'orbite  $G \cdot \{\Lambda\}$  toute entière, on peut se restreindre à une trajectoire  $g_n \cdot \Lambda$ , pour une suite de  $g_n$  dans ce groupe  $G$ .

Nous nous intéressons à un problème de divergence « simultanée » : est-ce que l'image  $g_n \cdot \Omega \cdot \{\Lambda\}$  d'une famille bornée de réseaux  $\Omega \cdot \{\Lambda\}$  diverge uniformément ? D'après les théorèmes de Dani–Margulis et leur généralisations, pour des « bonnes familles » de réseaux, il suffit d'appliquer le critère de Mahler pour un élément du réseau, choisi uniformément sur  $\Omega$  : c'est-à-dire  $g_n \Omega \lambda_n \simeq 0$ , où  $\lambda_n \in \Lambda \setminus \{0\}$  ne dépend pas de  $\omega \in \Omega$ . On peut même remplacer  $\Omega$  par un sous-ensemble fini.

La notion suivante suppose  $G$  algébrique sur  $\mathbf{Q}$ . On pourrait aussi formuler un analogue  $S$ -arithmétique pour un ensemble fini de places  $S$ .

**Définition 2.1.** Nous disons qu'une partie  $Y$  de  $G(\mathbf{R})$ , définie sur  $\mathbf{Q}$ , satisfait l'hypothèse de stabilité arithmétique si, pour toute dimension finie  $N$ , pour toute représentation  $G \rightarrow GL(N)$  définie sur  $\mathbf{Q}$  et tout réseau  $\Lambda$  dans  $\mathbf{Q}^N$ , la constante

$$c = \inf_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \inf_{y \in Y} \sup_{\omega \in \Omega} \|y \cdot \omega \cdot \lambda\|$$

est strictement positive.

Quitte à changer de constante, le choix de métrique est arbitraire. Une condition sur  $Y$  plus contraignante est la suivante.

**Définition 2.2.** Une partie  $Y$  de  $G(K)$  satisfait l'hypothèse de stabilité analytique si, pour toute représentation  $G \rightarrow GL(N)$ , la constante

$$c = \inf_{\substack{\lambda \in K^N \\ \|\lambda\|=1}} \inf_{y \in Y} \sup_{\omega \in \Omega} \|y \cdot \omega \cdot \lambda\|$$

est strictement positive.

On peut relier ces deux constantes par la systole  $\inf_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \|\lambda\|$  de  $\Lambda$ . Notamment, une partie analytiquement stable est arithmétiquement stable.

Quitte à changer de constante, ces hypothèses sont insensibles à la multiplication à gauche de  $Y$  par une partie bornée  $B$  de  $G$  : on peut substituer  $B \cdot Y$  à  $Y$ .

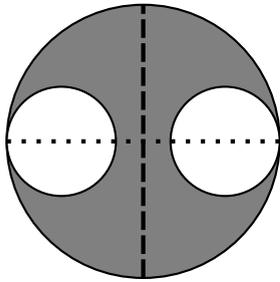
Nous nous intéressons au cas où  $H$  est réductif dans  $G(\mathbf{R})$  et où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $H$ . Alors, l'hypothèse de stabilité analytique est satisfaite pour une partie  $Y$  « orthogonale » au centralisateur  $Z_G(H)$ , au sens de la décomposition de Mostow, et d'une variante dans le cas ultramétrique. Il s'agit de [9,11,7].

Dans [10] on démontre des propriétés d'étroitesse, ou « non-divergence », de translatées de mesures associées à  $\Omega$  (voir §3 ci-après). Dans cette note, nous voyons que l'hypothèse de stabilité analytique s'applique à d'autres questions dynamiques que la divergence : l'étude de la convergence vers une mesure limite.

*Orthogonal au centralisateur* Dans le cas réel, cette décomposition de Mostow est associée à un sous-groupe réductif  $Z \leq G$  et à un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$  compatible à  $Z$ . Elle consiste en l'homéomorphisme  $K \times P \times S \rightarrow G$  où  $K$  et  $Z$  ont algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{z}$  et où  $P = \exp(\mathfrak{k}^\perp \cap \mathfrak{z}^\perp)$  et  $S = \exp(\mathfrak{k}^\perp \cap \mathfrak{z})$  est l'espace symétrique de  $Z$ . L'orthogonalité s'entend au sens du produit scalaire associé à  $K$ , ou de la forme de Killing. Cela induit une décomposition « orthogonale »  $P \times S \rightarrow K \backslash G$  de l'espace symétrique  $K \backslash G$ . Nous utilisons la partie  $Y = K \cdot P$ .

Pour les places ultramétriques, il s'agit de la construction de [7], qui utilise le fait que  $Z$  est le centralisateur d'un groupe réductif  $H$  et un sous-groupe ouvert compact  $\mathbf{k}$  de  $H$  contenu dans un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ . On introduit un analogue approché de la décomposition de Mostow, où  $K \backslash G$  est plongé dans l'immeuble de Bruhat–Tits  $I$ , sur lequel on fait agir  $\mathbf{k}$  par conjugaison. Le rôle de  $S$  est joué par le lieu fixe  $I^{\mathbf{k}}$  de cette action, et s'écrit  $C \cdot Z$  pour un compact  $C$  de  $S$ . Le lieu  $P$  est remplacé par les points  $p$  de  $K \backslash G$ , dont la  $\mathbf{k}$ -orbite  $\mathbf{k} \cdot p$  dans  $I$  contient, dans son enveloppe convexe dans  $I$ , un point de  $C$ .

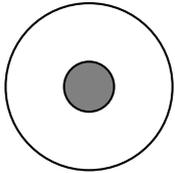
*Exemple* Décrivons quelques parties  $Y$  pour  $G = SL(2, \mathbf{R})$  et  $H = Z$  le tore diagonal, qui est son propre centralisateur. Alors,  $K = SO(2, \mathbf{R})$  convient et  $\mathfrak{k}^\perp \cap \mathfrak{z}^\perp$  a pour base  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



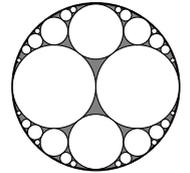
Prenant  $B = SO(2, \mathbf{R})$ , nous travaillons sur l'espace  $SL(2, \mathbf{R})/SO(2, \mathbf{R})$ , représenté dans la figure par un disque de Poincaré centré en la classe neutre. L'orbite  $S$  du centralisateur  $H = Z$  par la classe neutre est décrite par l'horizontale pointillée  $[-1; 1]$ . Son orthogonal de Mostow  $P$  est décrit par la verticale  $[-i; i]$  en tirets. Cette verticale est un exemple de partie  $Y$  (ou  $Y \cdot B/SO(2, \mathbf{R})$ , rigoureusement). Voir [11].

Deux petits disques décrivent des voisinages, dans le disque de Poincaré, des points à l'infini de l'horizontale. Leur complémentaire, grisé, décrit un autre exemple de partie  $Y$ , plus grande : [11] n'est pas optimal.

N.B. Les saturés  $Z \cdot Y$  par  $Z$  de ces parties  $Y$  couvrent  $SL(2, \mathbf{R})$ .



Prenons pour  $\Omega = H$  dans  $SL(2, \mathbf{R})$  le sous-groupe trivial et alors  $Z = SL(2, \mathbf{R})$ . En grisé :  
 – à gauche un lieu analytiquement stable : un lieu borné, loin du bord réel de  $Z$  ;  
 – à droite un lieu arithmétiquement stable : un lieu borné modulo  $SL(2, \mathbf{Z})$ , loin du bord rationnel de  $Z$ .



N.B. Ce dernier exemple est un lieu arithmétiquement stable, qui n'est pas analytiquement stable.

### 3. Translatées locales en dynamique homogène

Nous en venons à notre énoncé principal, lequel nous avons partagé en quatre propositions.

Nous fixons un groupe semisimple  $G$  sur  $\mathbf{Q}$ , un nombre fini  $S$  de places, et un sous-groupe de Lie<sup>1</sup>  $S$ -adique  $H$  Zariski connexe et réductif<sup>2</sup> dans  $G(\mathbf{Q}_S)$ , où nous notons<sup>3</sup>  $\mathbf{Q}_S = \prod_{p \in S} \mathbf{Q}_p$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné non vide de  $H$  et  $\nu$  la mesure de Haar sur  $H$  normalisée par  $\nu(\Omega) = 1$ . Fixons un réseau  $S$ -arithmétique  $\Gamma$  de  $G(\mathbf{Q}_S)$ . Nous notons  $\mu_\Omega$  la probabilité image directe dans  $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$  de la restriction  $\nu|_\Omega$  de  $\nu$  à  $\Omega$ .

Plutôt que de considérer une mesure quotient de  $\nu$  dans  $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$ , qui peut ne pas être une probabilité, ni même être localement finie, nous étudions un problème local, par le biais de  $\Omega$ . Cela permet davantage de flexibilité.

Nous considérons une suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  dans  $G(\mathbf{Q}_S)$  ainsi que  $(\mu_n)_{n \geq 0} = (y_n \cdot \mu_\Omega)_{n \geq 0}$ .

Nous requerrons que la partie  $Y = \{g_n | n \geq 0\}$  satisfasse l'hypothèse de stabilité analytique. (H)

L'article [14] consiste d'un théorème général, dont le contenu tient en les propositions suivantes et de sa preuve, qui occupe une cinquantaine de pages (voir section suivante).

Le premier résultat suivant provient de [10]. Rappelons qu'une suite de probabilités est dite *tendue* si elle évolue dans compact de l'espace des probabilités. Voir à ce sujet le théorème de Prokhorov.

**Proposition 3.1.** La suite  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  est tendue.

<sup>1</sup> On peut aussi considérer plus généralement un sous-groupe de Lie plongé.

<sup>2</sup> À adhérence de Zariski sur  $\mathbf{Q}_S$  réductive et connexe.

<sup>3</sup> Dans [12,8], on prend pour  $S$  un ensemble de place finies, et on travaille avec  $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_S$  en lieu et place de notre  $\mathbf{Q}_S$ .

Ainsi, toute limite faible est alors une mesure de probabilité. Quelles sont ces limites ?

Elles s'expriment en termes de la théorie de Ratner. Nous considérons la classe  $\mathcal{R}$  des sous-groupes de  $G$  définis sur  $\mathbf{Q}$  qui sont engendré comme  $\mathbf{Q}$ -groupe par leurs unipotents définis sur  $\mathbf{Q}_S$ . Pour  $L$  dans  $\mathcal{R}$ , nous notons  $N$  son normalisateur unitaire (i.e. conservant la mesure de Haar). Notons

$$F = \bigcap_{\omega \in \Omega} \omega N \omega^{-1} \text{ et } M = \bigcap_{\omega \in \Omega} \omega L \omega^{-1}.$$

Le réseau  $\Gamma$  intersecte  $L(\mathbf{Q}_S)$  en un réseau de ce dernier. Il s'ensuit une mesure de probabilité  $L(\mathbf{Q}_S)$ -invariante dans  $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$  supportée par  $L(\mathbf{Q}_S)\Gamma/\Gamma$ . Ici  $L(\mathbf{Q}_S)^+$  désigne le sous-groupe de  $L(\mathbf{Q}_S)$  engendré par ses unipotents. Nous introduisons un sous-groupe ouvert suffisamment petit  $L^\ddagger \leq L(\mathbf{Q}_S)$ , disons  $L(\mathbf{Q}_S) = L(\mathbf{Q}_S) \cap \overline{L(\mathbf{Q}_S)^+ \cdot \Gamma}$ , et notons  $\mu_{L^\ddagger}$  la mesure de probabilité  $L^\ddagger$ -invariante qui s'ensuit dans  $G(\mathbf{Q}_S)/\Gamma$ . Si  $\mathbf{Q}_S = \mathbf{R}$ , alors on peut aussi prendre pour  $L(\mathbf{R})^\ddagger$  la composante neutre de  $L(\mathbf{R})$ .

Quitte à extraire, nous pouvons supposer qu'il existe une limite étroite

$$\mu_\infty = \lim(\mu_n)_{n \geq 0}. \quad (1)$$

Nous introduisons le sous-groupe  $W$  engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre qui stabilisent  $\mu_\infty$ . Une première étape pour identifier  $\mu_\infty$  est via sa décomposition  $W$ -ergodique, ce qui s'exprime dans les termes du théorème de décomposition ergodique de Ratner.

**Proposition 3.2.** *Les composantes  $W$ -ergodiques de  $\mu_\infty$  sont (presque toutes) des translatées de  $\mu_{L^\ddagger}$  pour un même groupe  $L$  de classe  $\mathcal{R}$ .*

Notons que cela ne détermine  $L$  qu'à conjugaison près par  $\Gamma$ .

Pour la description explicite de  $\mu_\infty$ , il nous faut possiblement décomposer en un nombre fini de sous-suites, à chacune desquelles nous attachons un groupe  $L$  de classe  $\mathcal{R}$ . Nous considérons une telle sous-suite. La description de  $\mu_\infty$  fait intervenir l'action par convolution de  $\nu \upharpoonright_\Omega$  (plutôt que  $\mu_\Omega$ , qui ne peut agir par convolution).

**Proposition 3.3.** *Il existe  $n_\infty$  dans  $N$  et  $g_\infty$  dans  $G$  tels que*

$$\mu_\infty = g_\infty \cdot \nu \upharpoonright_\Omega \star n_\infty \cdot \mu_{L^\ddagger}.$$

Une dernière question est de savoir pour quelles suites  $(g_n)_{n \geq 0}$  on aboutit à la mesure limite ci-dessus (pour ce  $L$  donné, cet  $n_\infty$  et ce  $g_\infty$ ). Cette question est importante dans les applications, pour déterminer, par exemple, à quel groupe  $L$  nous ferons face. C'est un point crucial dans l'application [1] au comptage de points entiers (dite problématique du *focusing*), et crucial aussi dans [12].

**Proposition 3.4.** *Dans le cas de l'énoncé précédent, la suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  est de la forme*

$$O(1) \cdot (Z_G(H) \cap F) \cdot M,$$

au sens où il existe une factorisation  $g_n = b_n f_n m_n$  où  $(b_n)_{n \geq 0}$  est bornée, où  $f_n$  appartient à  $(Z_G(H) \cap F)$  et  $m_n$  à  $M$ .

Le facteur  $b_n$  ne participe pas à la dynamique, mais ne peut bien sûr être évité. Le facteur  $m_n$  est le principal responsable de l'équidistribution et, en l'absence des autres facteurs, précise l'idée générale selon laquelle l'équidistribution est « interne » depuis le dedans : le support de la mesure limite contient le support des mesures s'équidistribuant. Le facteur  $f_n$  est plus subtil, et propre au contexte très général dans lequel on travaille. Il commute à  $\Omega$ , donc, pris isolément, il ne participe pas à la dynamique.

#### 4. Grandes lignes de la démonstration

Nous présentons les grandes lignes de la preuve. Si les théorèmes de Ratner constituent un ingrédient inamovible, ils se font toutefois discrets : l'essentiel de la démonstration s'inscrit dans le contexte de la *linéarisation* (en dynamique homogène), un mouvement initié par les travaux de Dani et Margulis, eux-mêmes employés dans la théorie de Ratner. Nous nous reposons sur les développements plus récents des méthodes de linéarisation, par Eskin, Mozes, Shah, Margulis, Kleinbock, Tomanov et d'autres.

La proposition 3.1 est issue de [10]. L'hypothèse de stabilité analytique (H) est déjà cruciale pour ce point, ainsi que la réductivité du sous-groupe  $H$ .

Nous travaillons donc avec une suite convergente (1), et nous décomposons  $W$ -ergodiquement sa limite  $\mu_\infty$  par le théorème de décomposition ergodique de Ratner. Ce qui importe est le lien entre cette décomposition ergodique et les restrictions  $\mu_\infty \upharpoonright_{X(L,W)}$  aux divers *ensembles singuliers* introduits par Dani–Margulis

$$X(L, W) = \text{Conj}(W, L)^{-1} = \{g \in G \mid g^{-1}Wg \subseteq L\} \subseteq G, \tag{2}$$

lorsque  $L$  décrit les groupes de classe  $\mathcal{R}$ , et leur image  $X([L], W) = X(L, W)\Gamma/\Gamma$  dans  $G/\Gamma$ , qui ne dépend que de la classe de  $\Gamma$ -conjugaison  $[L]$  de  $L$ . Dani–Margulis introduisent une représentation linéaire auxiliaire  $V$  et une orbite  $G \cdot p_L$  de  $G$  (avec  $p_L$  défini sur  $\mathbf{Q}$ ), puis expriment l'ensemble singulier  $X(L, W)$  comme image inverse d'un certain sous-vecteuriel  $V_W$  par l'application orbite  $G \rightarrow G \cdot p_L$ .

Alors au moins l'un des  $\mu_\infty(X([L], W))$  est non nul. On aimerait introduire l'image directe de  $\mu_\infty$  sur l'orbite  $G \cdot p_L$ , et utiliser le fait qu'elle donne une mesure non nulle à  $V_W$ . Or  $\mu_\infty$  vit, non sur  $G$ , mais sur  $G/\Gamma$ . Cette indétermination, le passage de  $G/\Gamma$  à  $G$ , porte le nom de *unfolding* (dépliement). On considère les relevés de la forme  $g_n \cdot \nu \upharpoonright_\Omega \cdot \gamma$ , définis quant à eux dans  $G$ , et on étudie les ensembles  $g_n \cdot \Omega \cdot \gamma \cdot p_L$ , pour  $\gamma$  dans  $\Gamma$ . Pour  $n$  de plus en plus grand, ces ensembles, pour un certain  $\gamma = \gamma_n$  dépendant de  $n$ , vont s'approcher d'une partie bornée de  $V_W$ . *A priori*, il faut faire dépendre  $\gamma_n$  de  $\omega \in \Omega$  : on a recours, pour pallier cela, à la théorie des fonctions  $(C, \alpha)$ -good, dans le contexte  $S$ -adique, telle que développée par Kleinbock et Tomanov [3]. En quelques mots, la fonction  $\omega \mapsto g_n \cdot \omega \cdot \gamma \cdot p_L \pmod{V_W}$  est suffisamment régulière pour que, si, sur une partie de  $\Omega$  de mesure suffisante, elle s'approche suffisamment de 0, alors elle s'approche autant que voulu de 0  $\pmod{V_W}$  uniformément sur  $\Omega$ .

Nous voici confrontés à la version linéarisée de notre problème de convergence : que dire des suites de translatées  $g_n \cdot \Omega \cdot p$ , dans une représentation  $V$ , qui restent uniformément bornées ? C'est l'objet de [11], qui étend [9,7] et utilise de manière cruciale l'hypothèse de stabilité analytique (H) et la réductivité de  $H$ . En passant à une représentation associée à  $V$ , on ramène le problème au cas où  $g_n \cdot \Omega \cdot p$  converge vers l'origine, qui est la version linéarisée du problème de la divergence traité par [9,7,10]. On conclut :

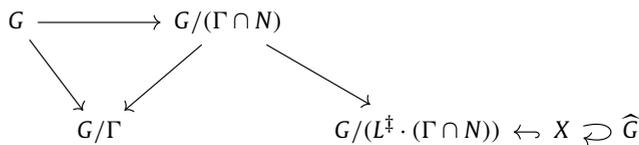
- qu'il suffit de ne considérer qu'un ensemble fini d'éléments  $\gamma_n$ , et quitte à extraire, un seul, et quitte à conjuguer par cet élément, le supposer neutre et l'ignorer,
- que la suite  $g_n$  est de la forme  $O(1) \cdot F$ .

Ces conclusions utilisent l'hypothèse de stabilité analytique plutôt que seulement la stabilité arithmétique. Ce point était une pierre d'achoppement des travaux antérieurs de linéarisation, qui se contournait par des restrictions *ad hoc*, au risque de devoir restreindre notre cadre général. Ici le prix payé est l'hypothèse de stabilité analytique, mais, en contrepartie, on peut poursuivre dans l'esprit des méthodes de linéarisation.

On ignore sans autre le facteur borné  $O(1)$  et on suppose  $g_n \in F$ . À partir de ce moment, le groupe  $L$  auquel  $F$  est associé est uniquement déterminé, plus seulement à conjugaison près, par  $\Gamma$ .

Les informations obtenues ont de très utiles conséquences, comme le fait que  $\mu_\Omega$  est concentrée dans le fermé  $\overline{\Omega N}\Gamma/\Gamma \subseteq X([L], W)$ , lequel est stable par  $F$ , donc par nos  $g_n$ . C'est donc dans ce fermé que se passe toute la dynamique. Notamment,  $\mu_\infty$  est concentrée dans  $X(L, W)\Gamma/\Gamma$ , ce qui signifie que ses composantes  $W$ -ergodiques sont associées à des sous-groupes de  $L$ . Ayant pris soin de travailler avec  $L$  de dimension minimale, on conclut qu'il n'y a qu'un type de composant ergodique, au sens de la proposition 3.2. D'après la variante appropriée des théorèmes de Ratner, telle que formulée dans [15], explicités au moyen de  $L^\ddagger$ , on retrouve la proposition 3.2 et ses mesures  $\mu_{L^\ddagger}$ .

La suite de la démonstration se conçoit peut-être mieux via le diagramme



On part d'une décomposition  $W$ -ergodique de  $\mu_\infty$  dans  $G/\Gamma$ . Dans  $G$ , tout se situe dans  $\Omega N \subseteq HN$ . Une première étape consiste à relever la convergence  $\mu_n \rightarrow \mu_\infty$  en une convergence  $\widetilde{\mu}_n \rightarrow \widetilde{\mu}_\infty$  dans  $G/(\Gamma \cap N)$ . Les  $\mu_n$  sont images de mesures dans  $G$ , dont l'image dans  $G/(\Gamma \cap N)$  fournit les relevements naturels  $\widetilde{\mu}_n$ . Pour relever  $\mu_\infty$ , on utilise les propriétés d'auto-intersection de Dani–Margulis : l'obstruction pour remonter de  $X(L, W)\Gamma/\Gamma$  à  $X(L, W)/(\Gamma \cap N)$  provient des ensembles singuliers  $X(L', W)$  de dimension inférieure. Par la proposition 3.2, notre  $\mu_\infty$  ne pondère pas ces sous-ensembles singuliers, et peut se relever sans obstruction. Par des arguments généraux, on montre alors la convergence entre ces relevés  $\widetilde{\mu}_n \rightarrow \widetilde{\mu}_\infty$ .

Mieux encore, presque toute composante ergodique de  $\mu_\infty$  ne pondère pas ces sous-ensembles singuliers et se relève sans obstruction. On identifie ces relevés et on reconnaît une décomposition  $W$ -ergodique de  $\widetilde{\mu}_\infty$  en composants de la forme  $\widetilde{\mu}_{L^\ddagger} \cdot g$ , où  $\widetilde{\mu}_{L^\ddagger}$  est la mesure de probabilité sur  $G/(\Gamma \cap N)$  déduite de  $L^\ddagger$ .

Un intérêt de remonter à  $G/(\Gamma \cap N)$  est que  $L(\mathbf{Q}_S)$  agit à droite, et que nos composants ergodiques sont des mesures associées à des orbites à droite de  $L^\ddagger \subseteq L(\mathbf{Q}_S)$ . Ces composants ergodiques, leur somme intégrale  $\widetilde{\mu}_\infty$  et, plus généralement, les mesures de probabilité  $L^\ddagger$ -invariante à droite sur  $G/(\Gamma \cap N)$  correspondent chacune, univoquement, à une mesure de probabilité sur  $G/(L^\ddagger \cdot (\Gamma \cap N))$  : son image directe. La convergence  $\widetilde{\mu}_n \rightarrow \widetilde{\mu}_\infty$  peut ainsi s'étudier en travaillant dans le quotient  $G/(L^\ddagger \cdot (\Gamma \cap N))$ , et on s'attend à se retrouver dans une situation où on a tué toute la dynamique.

Notons  $\widehat{\mu}_n \rightarrow \widehat{\mu}_\infty$  au quotient. Cette convergence se passe dans  $X = \frac{HN(\Gamma \cap N(L))}{((\Gamma \cap N(L)) \cdot L^\ddagger)}$ , où  $N(L)$  est le normalisateur de  $L$  ;  $\widehat{G} = HF/M^\ddagger$ , pour un certain  $M^\ddagger$  ouvert dans  $M$ , agit sur  $X$ . Ce  $\widehat{G}$  est presque algébrique, extension

finie d'un sous-groupe ouvert de  $\check{G}(\mathbf{Q}_S)$  pour un certain groupe algébrique  $\check{G}$  sur  $\mathbf{Q}_S$ . On adapte alors les arguments classiques de théorie de Ratner : si la dynamique est non triviale, alors on construit un groupe unipotent à un paramètre non trivial qui stabilise  $\widehat{\mu}_\infty$ . Ces unipotents se relèvent dans  $W$ , que l'on a choisi maximal ; or,  $W$  est tué par le passage au sous-quotient  $\widehat{G}$ . La dynamique est donc triviale au sens où l'image  $\widehat{g}_n$  de la suite  $g_n$  dans  $\widehat{G}$  est produit d'un facteur borné par un facteur commutant à l'image de  $H$ , ce qui est explicité par la proposition 3.4. La limite  $\widehat{\mu}_\infty$  s'identifie immédiatement, ce qui détermine  $\widetilde{\mu}_\infty$ , puis son image directe  $\mu_\infty$ , démontrant la proposition 3.3.

## Références

- [1] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties, *Ann. of Math.* (2) 143 (2) (1996) 253–299.
- [2] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, Non divergence of translates of certain algebraic measures, *GAFAGeom. Funct. Anal.* 7 (1997) 48–80.
- [3] D. Kleinbock, G. Tomanov, Flows on  $S$ -arithmetic homogeneous spaces and applications to metric Diophantine approximation, *Comment. Math. Helv.* 82 (2007) 519–581.
- [4] B. Klingler, E. Ullmo, A. Yafaev, The hyperbolic Ax–Lindemann–Weierstrass conjecture, *Pub. Math. IHES* 123 (2016) 333–360.
- [5] M. Orr, La conjecture de André–Pink : orbites de Hecke et sous-variétés faiblement spéciales, thèse, université Paris-Sud, Orsay, 2013.
- [6] R. Richard, Sur quelques questions d'équidistribution en géométrie arithmétique, thèse, université de Rennes-1, 2009, Disponible sur <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00438515/>.
- [7] R. Richard, Résultat géométrique sur les représentations de groupes réductifs sur un corps ultramétrique, preprint, available on Arxiv, arXiv:1706.00301, 2017.
- [8] R. Richard, Topological and equidistributional refinement of the André–Pink–Zannier conjecture at finitely many places, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 357 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.01.013>.
- [9] R. Richard, Geometric result on representations of reductive Lie groups.
- [10] R. Richard, On narrowness for translated algebraic probabilities in  $S$ -arithmetic homogeneous spaces.
- [11] R. Richard, N. Shah, Geometric results on linear actions of reductive Lie groups for applications to homogeneous dynamics, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 38 (7) (2018) 2780–2800.
- [12] R. Richard, A. Yafaev, Inner Galois equidistribution in  $S$ -Hecke orbits, in: R. Richard, A. Yafaev, T. Zamojski (Eds.), *Homogeneous Dynamics and Unlikely Intersections*, available on Arxiv.
- [13] R. Richard, A. Yafaev, T. Zamojski, Homogeneous dynamics and unlikely intersections, available on Arxiv.
- [14] R. Richard, T. Zamojski, Limit distribution of translated pieces of possibly irrational leaves in  $S$ -arithmetic homogeneous spaces, in: R. Richard, A. Yafaev, T. Zamojski (Eds.), *Homogeneous Dynamics and Unlikely Intersections*, available on Arxiv.
- [15] G. Tomanov, Orbits on homogeneous spaces of arithmetic origin and approximations, in: *Analysis on Homogeneous Spaces and Representation Theory of Lie Groups*, Okayama, Kyoto, 1997, in: *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 26, 2000, pp. 265–297.
- [16] E. Ullmo, A. Yafaev, Hyperbolic Ax–Lindemann theorem in the co-compact case, *Duke Math. J.* 163 (2) (2014) 433–463.