



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Mathématique


Christian Genest et Magid Sabbagh

Comportement extrémal des copules diagonales et de Bertino

Volume 358, issue 11-12 (2020), p. 1157-1167

Published online: 25 January 2021

<https://doi.org/10.5802/crmath.135>

 This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Mathématique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569



Probabilités / *Probabilities*

Comportement extrémal des copules diagonales et de Bertino

Extremal behavior of diagonal and Bertino copulas

Christian Genest^a et Magid Sabbagh^a

^a Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 805, rue Sherbrooke ouest, Montréal (Québec) Canada H3A 0B9

Courriels : christian.genest@mcgill.ca (C. Genest), magid.sabbagh@mail.mcgill.ca (M. Sabbagh)

Résumé. Les attracteurs maximaux des copules bivariées diagonales et de Bertino sont déterminés sous des conditions de régularité idoines. On en déduit des bornes sur l'attracteur maximal d'une copule symétrique à coupe diagonale donnée, ainsi que des bornes sur le rho de Spearman et le tau de Kendall d'une copule de valeurs extrêmes échangeable dont le coefficient de dépendance caudale supérieure est connu. Certains de ces résultats sont ensuite étendus aux cas de copules bivariées quelconques et de copules multivariées.

Abstract. The maximal attractors of bivariate diagonal and Bertino copulas are determined under suitable regularity conditions. Some consequences of these facts are drawn, namely bounds on the maximal attractor of a symmetric copula with a given diagonal section, and bounds on Spearman's rho and Kendall's tau for an exchangeable extreme-value copula whose upper-tail dependence coefficient is known. Some of these results are then extended to the case of arbitrary bivariate copulas and to multivariate copulas.

Classification Mathématique (2020). 60G70, 62G32.

Financement. Ce travail a bénéficié de l'appui financier du Secrétariat des Chaires de recherche du Canada, du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, ainsi que de l'Institut Trottier pour la science et la politique publique.

Manuscrit reçu le 9 juin 2020, révisé le 15 octobre 2020, accepté le 21 octobre 2020.

Abridged English version

A copula C is the distribution function of a random vector (U_1, \dots, U_k) with uniform margins on the unit interval. Its diagonal section $\Delta(C)$ is the distribution of $\max(U_1, \dots, U_k)$. Several authors have considered the question of what can be said about C when $\Delta(C)$ is known. In dimension $k = 2$, point-wise lower and upper bounds on the joint distribution C of a random pair (U, V) of exchangeable uniform random variables are given by the Fréchet–Hoeffding copulas. The latter correspond to the cases of comonotonic dependence in which either $V = 1 - U$ or $V = U$ almost

surely. Nelsen et al. [26] showed that when $\Delta(C) = \delta$ is known and C is symmetric, it is possible to tighten these bounds. Specifically, one has

$$B_\delta(u, v) \leq C(u, v) \leq K_\delta(u, v),$$

for all $(u, v) \in [0, 1]$, where

$$B_\delta(u, v) = (u \wedge v) - \inf\{t - \delta(t) : t \in [u \wedge v, u \vee v]\},$$

defines the Bertino copula [2] with diagonal section δ and

$$K_\delta(u, v) = u \wedge v \wedge \{\delta(u) + \delta(v)\}/2$$

is another copula with diagonal section δ which Fredricks and Nelsen [8] called a “diagonal copula.” Here and below, $a \wedge b = \min(a, b)$ and $a \vee b = \max(a, b)$ for any reals a and b .

In this paper, the extremal behavior of the copulas B_δ and K_δ is determined under suitable regularity assumptions on δ . It is first shown in Section 2 that if δ admits a left-sided derivative δ' at 1, say $d = \delta'(1^-)$, then K_δ belongs to the max domain of attraction of the copula with parameter $\theta = d/2 \in [1/2, 1]$ defined, for all $(u, v) \in [0, 1]^2$, by

$$D_\theta(u, v) = u \wedge v \wedge (uv)^\theta.$$

Further assume that there exists a real $\epsilon \in (0, 1)$ such that the map $\widehat{\delta} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ defined at each $t \in [0, 1]$ by $\widehat{\delta}(t) = t - \delta(t)$ is decreasing on the interval $(\epsilon, 1)$. Under this additional condition, it is shown in Section 3 that B_δ belongs to the max domain of attraction of the Cuadras–Augé copula with parameter $\theta = 2 - d \in [0, 1]$ defined, for all $(u, v) \in [0, 1]^2$, by

$$Q_\theta(u, v) = (uv)^{1-\theta} (u \wedge v)^\theta.$$

Various consequences of these results are mentioned in Section 4. First and foremost, if C is a symmetric bivariate copula with diagonal section δ meeting the above requirements, and if C^* denotes its max attractor, which is assumed to exist, then for all $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$Q_{2-d}(u, v) \leq C^*(u, v) \leq D_{d/2}(u, v).$$

This string of inequalities immediately entails that the upper-tail dependence coefficient associated with C is given by $\Lambda(C) = \Lambda(C^*) = \Lambda(Q_{2-d}) = \Lambda(D_{d/2}) = 2 - d$. Moreover, if C^* is symmetric with upper-tail dependence coefficient $\Lambda(C^*) = \lambda$, say, and if $\rho(C^*)$ and $\tau(C^*)$ respectively denote the values of Spearman's rho and Kendall's tau associated with C^* , then

$$3\lambda/(4 - \lambda) \leq \rho(C^*) \leq 3\lambda(8 - 5\lambda)/(4 - \lambda)^2 \quad \text{and} \quad \lambda/(2 - \lambda) \leq \tau(C^*) \leq \lambda.$$

These bounds settle a question raised in [22], which Jaworski [18] recently solved differently. Proposition 4 in Section 5 then shows how the symmetry assumption on C can be relaxed.

Finally, Section 6 comments briefly on possible extensions to arbitrary dimension $k > 2$. It is pointed out there that the search for a lower bound is hindered by the fact that the k -variate extension of the bivariate Bertino copula is generally not a distribution unless the diagonal section is Lipschitz increasing of degree $k/(k-1)$, as reported by Arias-García et al. [1]. In contrast, the k -variate extension of the diagonal copula introduced by Jaworski [17] does have a max attractor under the same assumptions as in the bivariate case. See Proposition 5 for details.

1. Introduction

Une copule C est la fonction de répartition d'un vecteur (U_1, \dots, U_k) d'aléas uniformément distribués sur l'intervalle $[0, 1]$. C'est un outil de modélisation statistique pratique et flexible. Pour une recension des écrits sur la théorie des copules et un panorama d'applications en actuariat, en finance, en hydrologie et bien d'autres domaines, voir par exemple [3, 6, 12, 16, 20, 21, 24, 25, 28].

Soit \mathcal{C} la classe des copules bivariées symétriques, c'est-à-dire l'ensemble des lois de paires (U, V) d'aléas échangeables à marges uniformes. On s'intéresse ici aux renseignements que l'on peut déduire sur un élément quelconque de cette classe lorsque sa coupe diagonale est fixée. On entend par *coupe diagonale* d'une copule C l'application $\Delta(C) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui, à chaque réel $t \in [0, 1]$, fait correspondre la valeur de $C(t, t) = \Pr(U \leq t, V \leq t) = \Pr\{\max(U, V) \leq t\}$.

Que peut-on dire de la loi d'un couple (U, V) d'aléas échangeables de loi C lorsque la fonction de répartition de $\max(U, V)$ est connue? Cette question a déjà été abordée en partie, principalement par Roger Nelsen et ses collaborateurs; voir [8, 9, 26, 27]. Ces auteurs ont notamment caractérisé la classe \mathcal{D} des coupes diagonales en montrant que $\delta \in \mathcal{D}$ si et seulement si

- (i) $\delta(1) = 1$;
- (ii) $\delta(t) \leq t$ pour tout $t \in [0, 1]$;
- (iii) $0 \leq \delta(t') - \delta(t) \leq 2(t' - t)$ pour tous $t, t' \in [0, 1]$ tels que $t \leq t'$.

Ils ont aussi montré que si C est une copule bivariée symétrique telle que $\Delta(C) = \delta$, on peut affiner les bornes de Fréchet–Hoeffding, lesquelles stipulent que pour toute paire $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$0 \vee (u + v - 1) \leq C(u, v) \leq u \wedge v,$$

où pour tous réels a et b , on note $a \wedge b = \min(a, b)$ et $a \vee b = \max(a, b)$. En effet, pour toute coupe diagonale $\delta \in \mathcal{D}$, soient les copules bivariées B_δ et K_δ définies en tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ par

$$B_\delta(u, v) = (u \wedge v) - \inf\{t - \delta(t) : t \in [u \wedge v, u \vee v]\},$$

et

$$K_\delta(u, v) = u \wedge v \wedge \{\delta(u) + \delta(v)\}/2.$$

En conjuguant le lemme 3.2 de Nelsen et coll. [26] et la démonstration de leur théorème 3.4, on déduit que si C est symétrique et $\Delta(C) = \delta$, alors on a, en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$B_\delta(u, v) \leq C(u, v) \leq K_\delta(u, v). \tag{1}$$

On appelle B_δ la *copule de Bertino* [2] et K_δ la *copule diagonale* [8] associées à la coupe diagonale $\delta \in \mathcal{D}$. Les copules B_δ et K_δ sont les meilleures bornes ponctuelles possibles sur C puisqu'elles sont toutes les deux symétriques et de coupe diagonale δ . Autrement dit, on a $\Delta(B_\delta) = \Delta(K_\delta) = \delta$.

L'objectif principal de cet article, réalisé aux paragraphes 2 et 3, est de déterminer l'attracteur maximal des copules B_δ et K_δ sous des conditions de régularité idoines sur la coupe diagonale $\delta \in \mathcal{D}$. L'*attracteur maximal* C^* d'une copule bivariée C quelconque est donné en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$ par

$$C^*(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n})$$

lorsque cette limite existe; voir entre autres [11, 30]. La copule C^* , dite *de valeurs extrêmes*, est caractérisée par une fonction convexe $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t \vee (1 - t) \leq A(t) \leq 1. \tag{2}$$

On a plus précisément que pour tout $(u, v) \in (0, 1)^2$,

$$C^*(u, v) = \exp \left[\ln(uv) A \left\{ \frac{\ln(v)}{\ln(uv)} \right\} \right].$$

L'application A , appelée *fonction de dépendance de Pickands* de C , joue un rôle clé dans l'étude du comportement extrémal d'un couple (U, V) d'aléas de loi C , c'est-à-dire la propension des variables U et V à prendre simultanément de grandes valeurs; voir entre autres [11, 14, 15, 24].

Au paragraphe 4, on utilise ces résultats, par l'intermédiaire de la chaîne d'inégalités (1), pour améliorer les bornes données en (2) sur la fonction de dépendance de Pickands de l'attracteur maximal d'un couple (U, V) d'aléas uniformes échangeables de loi C à coupe diagonale donnée.

Le coefficient de dépendance caudale supérieure [19, 30] d'un tel couple, qui revêt un intérêt pratique évident en gestion des risques (voir par exemple [24]), est donné par

$$\Lambda(C) = \lim_{t \uparrow 1} \Pr(V > t \mid U > t) = \lim_{t \uparrow 1} \{1 - 2t + C(t, t)\} / (1 - t) = 2 - 2A(1/2).$$

L'existence de cette limite dépend exclusivement du comportement de la coupe diagonale δ de C au voisinage du point 1. Dans le même esprit qu'en [22], la connaissance de δ et donc de $\Lambda(C)$ permet de déduire des bornes sur diverses autres mesures de dépendance associées à l'attracteur C^* de C , en supposant que celui-ci existe.

Le cas des copules bivariées asymétriques est ensuite abordé au paragraphe 5 et on rapporte au paragraphe 6 une généralisation partielle en dimension $k > 2$. Bien que les résultats présentés ici soient tous élémentaires, ils semblent nouveaux et dignes d'être documentés, ne fût-ce que brièvement.

2. Attracteur maximal d'une copule diagonale

Soit $\delta \in \mathcal{D}$ une coupe diagonale et K_δ la copule diagonale correspondante. L'attracteur maximal de K_δ est précisé ci-dessous dans le cas où la fonction δ admet une dérivée à gauche en 1, de sorte que pour toute valeur de $t \in (0, 1)$ dans un voisinage ouvert de 1, on ait

$$\{\delta(t) - 1\} / (t - 1) = \delta'(1^-) + o(t - 1), \tag{3}$$

où $\delta'(1^-) \in [1, 2]$ en vertu des propriétés (ii) et (iii).

Proposition 1. *Soit $\delta \in \mathcal{D}$ une application vérifiant les conditions (i)–(iii) et (3). La copule diagonale K_δ correspondante appartient alors au domaine d'attraction maximal de la copule de valeurs extrêmes de paramètre $\theta = \delta'(1^-)/2 \in [1/2, 1]$ définie en tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ par l'équation*

$$D_\theta(u, v) = u \wedge v \wedge (uv)^\theta.$$

Démonstration. Il est évident que pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ et tout entier $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$$\{K_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = u \wedge v \wedge 2^{-n} \{\delta(u^{1/n}) + \delta(v^{1/n})\}^n. \tag{4}$$

Or pour tous $u, v \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, il découle du postulat (3) que

$$\delta(u^{1/n}) = 1 + \delta'(1^-)(u^{1/n} - 1) + (u^{1/n} - 1)o(u^{1/n} - 1) = 1 + n^{-1}\delta'(1^-)\ln(u) + o(1/n)$$

et

$$\delta(v^{1/n}) = 1 + \delta'(1^-)(v^{1/n} - 1) + (v^{1/n} - 1)o(v^{1/n} - 1) = 1 + n^{-1}\delta'(1^-)\ln(v) + o(1/n),$$

ce qui permet de déduire que

$$\{\delta(u^{1/n}) + \delta(v^{1/n})\} / 2 = 1 + n^{-1}\theta \ln(uv) + o(1/n)$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \{\delta(u^{1/n}) + \delta(v^{1/n})\}^n = (uv)^\theta.$$

Au vu de l'équation (4), il s'ensuit que pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{K_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = u \wedge v \wedge (uv)^\theta,$$

ce qui est la conclusion annoncée. □

Soit $M = D_0$ la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding et soit A_M sa fonction de dépendance de Pickands, donnée en tout $t \in [0, 1]$ par $A_M(t) = t \vee (1 - t)$. La fonction de dépendance de Pickands correspondant à la copule D_θ est alors donnée en tout $t \in [0, 1]$ par la formule $A_\theta(t) = \theta \vee A_M(t)$. La copule M est la loi du couple (U, U) , où la variable U est équadistribuée sur $[0, 1]$.

3. Attracteur maximal d'une copule de Bertino

Soit $\delta \in \mathcal{D}$ une coupe diagonale et B_δ la copule de Bertino correspondante. L'attracteur maximal de B_δ est précisé ci-dessous sous les mêmes conditions qu'au paragraphe 2, auxquelles s'ajoute la suivante.

Condition D. Il existe un réel $\epsilon \in (0, 1)$ tel que l'application $\widehat{\delta} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie en tout $t \in [0, 1]$ par $\widehat{\delta}(t) = t - \delta(t)$ est décroissante sur l'intervalle $(\epsilon, 1)$.

La condition D est notamment remplie lorsque δ est continument dérivable dans le voisinage de 1 et que $\delta'(1^-) > 1$.

Proposition 2. Soit $\delta \in \mathcal{D}$ une fonction vérifiant les conditions (i)–(iii), (3) et D. La copule de Bertino B_δ correspondante appartient alors au domaine d'attraction maximal de la copule de valeurs extrêmes de paramètre $\theta = 2 - \delta'(1^-) \in [0, 1]$ définie en tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ par l'équation

$$Q_\theta(u, v) = (uv)^{1-\theta} (u \wedge v)^\theta.$$

En d'autres mots, l'attracteur maximal de B_δ est une copule de Cuadras–Augé [4]. Notons au passage que Sibuya [30] avait déjà montré que si $\delta'(1^-) = 1$, alors B_δ appartient au domaine d'attraction maximal de la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding, c'est-à-dire la copule Q_1 .

Démonstration. Au vu de la définition de la copule de Bertino, il est clair que pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B_\delta(u^{1/n}, v^{1/n}) = u^{1/n} \wedge v^{1/n} - \inf\{\widehat{\delta}(t) : t \in [u^{1/n} \wedge v^{1/n}, u^{1/n} \vee v^{1/n}]\}.$$

Sachant que par hypothèse la fonction $\widehat{\delta}$ est décroissante sur un intervalle de la forme $(\epsilon, 1)$, et considérant que pour tout $(u, v) \in (0, 1)^2$, il se trouve que $u^{1/n} \wedge v^{1/n} \rightarrow 1$ et $u^{1/n} \vee v^{1/n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$, on déduit que pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on doit avoir

$$B_\delta(u^{1/n}, v^{1/n}) = u^{1/n} \wedge v^{1/n} - \widehat{\delta}(u^{1/n} \vee v^{1/n}).$$

Il découle alors du postulat (3) que pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, on a

$$u^{1/n} \wedge v^{1/n} - \widehat{\delta}(u^{1/n} \vee v^{1/n}) = 1 + n^{-1} \{\ln(u \wedge v) - \ln(u \vee v) + \delta'(1^-) \ln(u \vee v)\} + o(1/n)$$

et, par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{B_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = (u \wedge v) \times (u \vee v)^{\delta'(1^-)-1} = (u \wedge v)^\theta (u \wedge v)^{1-\theta} (u \vee v)^{1-\theta}.$$

C'est là le résultat annoncé puisque $(u \wedge v) \times (u \vee v) = uv$ pour tous $u, v \in [0, 1]$. □

Notons que la fonction de dépendance de Pickands correspondant à la copule de Cuadras–Augé Q_θ de paramètre $\theta \in [0, 1]$ est donnée en tout $t \in [0, 1]$ par la formule $A_\theta(t) = 1 - \theta + \theta A_M(t)$.

4. Conséquences

Soit C une copule bivariée symétrique de coupe diagonale $\Delta(C) = \delta$ donnée. Supposons que cette coupe diagonale $\delta \in \mathcal{D}$ satisfasse aux conditions (3) et D. Posons $\delta'(1^-) = d \in [1, 2]$ et postulons l'existence d'un attracteur maximal C^* pour C . On déduit alors de la chaîne d'inégalités (1) que

$$\{B_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n \leq \{C(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n \leq \{K_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n$$

pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$ et donc, par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$, que

$$Q_{2-d}(u, v) \leq C^*(u, v) \leq D_{d/2}(u, v). \tag{5}$$

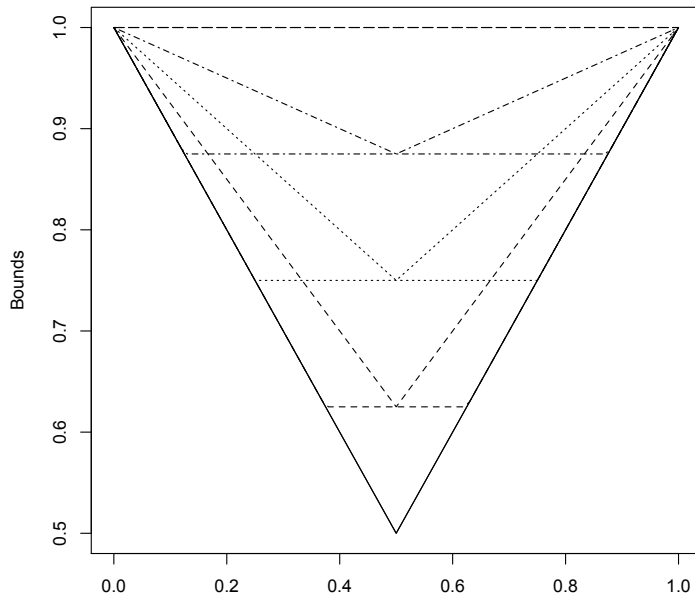


FIGURE 1. Bornes données dans l'équation (6) pour la fonction de dépendance de Pickands de l'attracteur maximal d'une copule bivariee symétrique de coupe diagonale δ telle que $\delta'(1^-) = d$, où $d = 1$ (—), $d = 5/4$ (- - -), $d = 3/2$ (· · ·), $d = 7/4$ (· - ·) et $d = 2$ (---).

Puisque les trois copules apparaissant en (5) sont de valeurs extrêmes, on peut déduire de cette chaîne d'inégalités un encadrement pour la fonction de dépendance A correspondant à C^* . En effet il découle de (5) que pour tout réel $t \in [0, 1]$,

$$d/2 \vee A_M(t) \leq A(t) \leq d - 1 + (2 - d)A_M(t) \tag{6}$$

et qu'en particulier on a nécessairement $A(1/2) = d/2$ puisque $A_M(1/2) = 1/2$.

La figure 1 illustre le graphe des bornes inférieure et supérieure données en (6) pour cinq valeurs possibles de $d = \delta'(1^-)$, à savoir $d \in \{1, 5/4, 3/2, 7/4, 2\}$. On voit que si $d = 1$, les deux bornes sont égales à A_M et que C^* coïncide alors avec M , c'est-à-dire la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding. De même si $d = 2$, les deux bornes sont identiquement égales à 1, dans lequel cas C^* est la copule d'indépendance Π définie en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$ par $\Pi(u, v) = uv$.

On peut en outre conclure de la chaîne d'inégalités (5) que pour toute mesure de dépendance κ au sens de Scarsini [29], on a

$$\kappa(Q_{2-d}) \leq \kappa(C^*) \leq \kappa(D_{d/2}), \tag{7}$$

y compris le coefficient de dépendance caudale supérieure. De fait on a $\Lambda(Q_{2-d}) = \Lambda(C) = \Lambda(C^*) = \Lambda(D_{d/2}) = 2 - d \in [0, 1]$, puisque les coupes diagonales de toutes ces copules coïncident.

Le résultat suivant énonce quelques conséquences un peu moins immédiates de la chaîne d'inégalités (7) concernant d'autres mesures classiques telles que le rho de Spearman et le tau de Kendall, respectivement définis comme suit :

$$\rho(C) = -3 + 12 \iint_{[0,1]^2} uv dC(u, v), \quad \tau(C) = -1 + 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v).$$

Lorsque $C = C^*$ est une copule de valeurs extrêmes dont la fonction de dépendance de Pickands est A , on trouve $\Lambda(C) = 2 - 2A(1/2)$, ainsi que

$$\rho(C) = -3 + 12 \int_0^1 \frac{1}{\{A(t) + 1\}^2} dt, \quad \tau(C) = \int_0^1 \frac{t(1-t)}{A(t)} dA'(t),$$

où A' dénote la dérivée à droite de A sur l'intervalle $[0, 1]$, laquelle existe toujours vu la convexité de A , et où $A'(1)$ est le supremum de A' sur l'ensemble $(0, 1)$. Voir par exemple [11, 15].

Des calculs élémentaires permettent de vérifier que pour tout $\theta \in [1/2, 1]$,

$$\rho(D_\theta) = 12(4\theta + 1)/(\theta + 1)^2 - 15, \quad \tau(D_\theta) = \Lambda(D_\theta) = 2(1 - \theta).$$

De même, on trouve que pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$\rho(Q_\theta) = 3\theta/(4 - \theta), \quad \tau(Q_\theta) = \theta/(2 - \theta), \quad \Lambda(Q_\theta) = \theta.$$

Proposition 3. *Soit C une copule de valeurs extrêmes bivariée symétrique de coupe diagonale $\Delta(C) = \delta$. Soit A sa fonction de dépendance de Pickands et $\lambda = \Lambda(C) = 2 - 2A(1/2) \in [0, 1]$. La coupe diagonale $\delta \in \mathcal{D}$ remplit alors les conditions (3) et D. De plus, pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a*

$$(2 - \lambda)/2 \vee A_M(t) \leq A(t) \leq 1 - \lambda + \lambda A_M(t). \tag{8}$$

En outre,

$$3\lambda/(4 - \lambda) \leq \rho \leq 3\lambda(8 - 5\lambda)/(4 - \lambda)^2 \quad \text{et} \quad \lambda/(2 - \lambda) \leq \tau \leq \lambda.$$

Démonstration. Notons que $\delta(t) = t^{2A(1/2)}$ pour tout $t \in [0, 1]$, de sorte que la coupe diagonale de C est continument différentiable et que l'application $\widehat{\delta}$ est décroissante dans un intervalle de la forme $(\epsilon, 1)$. Les conditions (3) et D sont donc satisfaites d'emblée et $\delta'(1^-) = 2A(1/2)$, ce qui permet d'appliquer les propositions 1 et 2. Qui plus est, la copule C étant de valeurs extrêmes, elle est son propre attracteur maximal; autrement dit, $C^* = C$. La chaîne d'inégalités (5) est donc vérifiée en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, ce qui équivaut à la chaîne d'inégalités (6), qui n'est autre que le premier énoncé reformulé en terme de $\lambda = 2 - d$. Quant aux inégalités portant sur $\rho(C)$ et $\tau(C)$, elles sont justifiées du fait qu'il s'agit de mesures de dépendance au sens de Scarsini [29]. \square

Le calcul des bornes données en (8) résout une question soulevée dans la conclusion de l'article [22] à laquelle Jaworski [18] a récemment répondu d'une autre manière. On remarque au passage que le terme de droite de la chaîne d'inégalités (8) est une combinaison linéaire convexe entre les fonctions de dépendance de Pickands de l'indépendance, identiquement égale à 1, et de la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding, à savoir A_M .

Compte tenu du lien déjà établi entre le coefficient de dépendance caudale supérieure λ et la constante $d = \delta'(1^-)$, la figure 1 peut être réinterprétée comme illustrant le tracé des bornes inférieure et supérieure données en (8) pour cinq valeurs possibles de $\lambda = 2 - d$, soit $\lambda \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. Si $\lambda = 1$, les deux bornes coïncident avec A_M et la copule de valeurs extrêmes $C = M$ n'est autre que la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding. Si $\lambda = 0$, les deux bornes sont identiquement égales à 1, dans lequel cas $C = \Pi$ est la copule d'indépendance.

5. Le cas des copules asymétriques

Les résultats présentés aux paragraphes 3–4 ayant été motivés par la chaîne d'inégalités (1), ils se limitent au cas de copules bivariées et symétriques à coupe diagonale donnée. Si C est une copule bivariée telle que $\Delta(C) = \delta$, que peut-on encore dire si on lève la restriction de symétrie? Dans pareil cas, il découle du théorème 3.3 de Nelsen et coll. [26] que l'on a, en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$B_\delta(u, v) \leq C(u, v) \leq S_\delta(u, v), \tag{9}$$

où

$$S_\delta(u, v) = \begin{cases} u \wedge [v - \sup\{t - \delta(t) : t \in [u, v]\}] & \text{si } u \leq v, \\ v \wedge [u - \sup\{t - \delta(t) : t \in [v, u]\}] & \text{si } v \leq u. \end{cases}$$

Nelsen et coll. [26] ont montré que la fonction S_δ est symétrique et que $S_\delta(u, v) \geq K_\delta(u, v)$ en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$. Toutefois, cette borne n'est en général qu'une quasi-copule au sens de [13]. Les conditions sous lesquelles S_δ est une copule sont précisées au théorème 3.5 de [26] et le cas

échéant, on a $S_\delta = K_\delta$ par le théorème 3.4. Ceci ne se produit toutefois que si la coupe diagonale δ est linéaire par morceaux et que chacun de ses segments est de pente 0, 1 ou 2 avec l'une de ses extrémités située sur le segment $v = u$. Il faut donc que $\delta'(1^-)$ vaille 1 ou 2 pour avoir $S_\delta = K_\delta$.

Supposons plus généralement que $\delta \in \mathcal{D}$ une application vérifiant les conditions (i)–(iii) et (3). En procédant de la même manière que dans la démonstration de la proposition 1, et en posant à nouveau $d = \delta'(1^-) \in [1, 2]$, on se convainc facilement que l'on a, en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_\delta(u^{1/n}, v^{1/n})\}^n = u \wedge v \wedge uv(u \wedge v)^{d-2} = R_d(u, v), \tag{10}$$

où la notation $R_d(u, v)$ permet de simplifier l'énoncé de la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit C une copule bivariable quelconque appartenant au domaine d'attraction d'une copule de valeurs extrêmes C^* . Supposons que la coupe diagonale $\Delta(C) = \delta \in \mathcal{D}$ de C réponde aux conditions (3) et D. Alors, pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$, on a*

$$Q_{2-d}(u, v) \leq C^*(u, v) \leq R_d(u, v),$$

où $d = \delta'(1^-) \in [1, 2]$. De plus, si A dénote la fonction de dépendance de Pickands associée à C^* , alors pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a

$$A_M(t) \vee \{1 - (2 - d)A_M(t)\} \leq A(t) \leq d - 1 + (2 - d)A_M(t).$$

Démonstration. La borne inférieure sur C^* est celle déjà rapportée à l'inégalité (5); elle se traduit par la borne supérieure sur A mentionnée en (6). La borne supérieure sur C^* découle de l'inégalité (9), après un passage à la limite de chaque côté de l'inégalité $C^n(u^{1/n}, v^{1/n}) \leq S_\delta^n(u^{1/n}, v^{1/n})$ qui conduit à la limite (10). Pour déduire la borne inférieure sur A , il suffit de noter que si l'application $A_{R_d} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est définie en tout réel $t \in [0, 1]$ par l'équation

$$A_{R_d}(t) = -\ln \{R_d(e^{-(1-t)}, e^{-t})\},$$

un calcul simple permet de vérifier que l'on a en fait $A_{R_d}(t) = A_M(t) \vee \{1 - (2 - d)A_M(t)\}$. □

La borne supérieure sur C^* énoncée dans la proposition 4 est plus générale que celle donnée en (5) puisqu'elle s'applique au-delà du cas symétrique. Elle est toutefois moins précise que cette dernière puisque $S_d(u, v) \geq K_{d/2}(u, v)$ et donc $R_d(u, v) \geq D_{d/2}(u, v)$ en tout $(u, v) \in [0, 1]^2$. De plus, l'application R_δ n'est pas nécessairement une copule, et encore moins une copule de valeurs extrêmes. La borne inférieure A_{R_d} n'est donc pas toujours convexe.

La figure 2 illustre le graphe des bornes inférieure et supérieure données dans la proposition 4 lorsque $d = 5/4$. La borne inférieure correspondant au cas symétrique, précisée en (6), est également tracée aux fins de comparaison. Tel qu'attendu, le graphe de A_{R_d} n'est pas convexe. Pour qu'il le soit, il faut et il suffit que R_d soit une copule de valeurs extrêmes. Ceci se produit si et seulement si $d \in \{1, 2\}$, ce qui est en concordance avec les théorèmes 3.3 et 3.4 de [26].

Quand $d = 2$, on voit facilement que A_{R_d} est identiquement égal à 1, de sorte que $C^* = \Pi$ est la copule d'indépendance. Si en revanche $d = 1$, les deux bornes coïncident avec A_M puisque l'on a $A_M(t) \geq 1 - A_M(t)$ en tout $t \in [0, 1]$; dans ce cas, $C = M$ est la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding. Notons enfin que peu importe la valeur de $d \in [1, 2]$, on a forcément $A(1/2) = d/2$ puisque $A_M(1/2) = 1/2$, à l'instar de ce qui avait déjà été observé dans le cas symétrique.

6. Généralisations possibles en dimension $k \geq 3$

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'analogue multivarié de l'énoncé (1). Néanmoins, des versions multidimensionnelles des propositions 1 et 2 peuvent être envisagées. À titre illustratif, le résultat suivant concerne une généralisation des copules diagonales due à Jaworski [17]. Si δ est une diagonale en dimension $k \geq 2$ et si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une application définie en tout réel

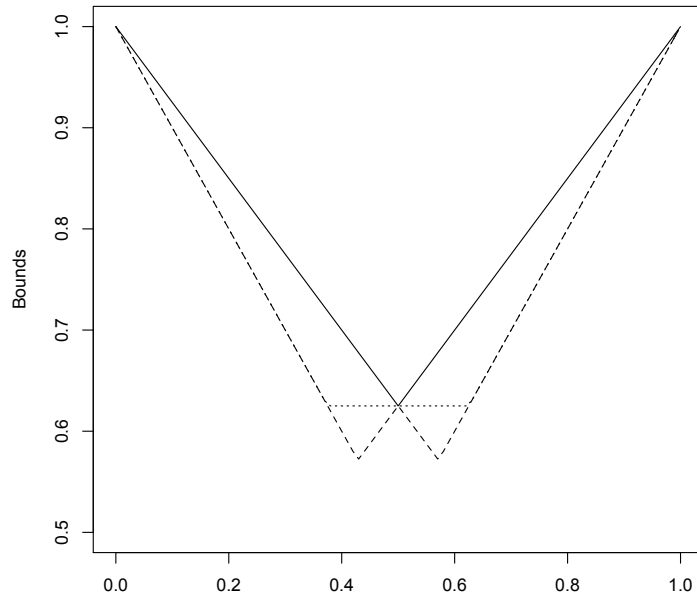


FIGURE 2. Bornes inférieure (- - -) et supérieure (—) données dans la proposition 4 pour la fonction de dépendance de Pickands de l’attracteur maximal d’une copule bivariee quelconque de coupe diagonale δ telle que $\delta'(1^-) = d$, où $d = 5/4$. La borne inférieure correspondant au cas symétrique ($\cdot \cdot \cdot$) est également tracée aux fins de comparaison.

$t \in [0, 1]$ par $f(t) = \{kt - \delta(t)\} / (k - 1)$, la copule diagonale $C_{k,\delta}$ définie par cet auteur s’exprime en tout $(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k$ sous la forme

$$C_{k,\delta}(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(u_{\sigma^i(1)}) \wedge \dots \wedge f(u_{\sigma^i(k-1)}) \wedge \delta(u_{\sigma^i(k)}), \tag{11}$$

où $\sigma^i(j) = j + i \pmod k$ pour tous entiers $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Le résultat suivant étend la proposition 1.

Proposition 5. Soit $k \geq 2$ un entier et δ une diagonale en dimension k telle que, pour tout réel $t \in (0, 1)$ dans un voisinage de 1, $\delta(t) = 1 + \delta'(1^-)(t - 1) + (t - 1)o(t - 1)$. Alors la copule $C_{k,\delta}$ définie en (11) appartient au domaine d’attraction de la copule de valeurs extrêmes multivariée définie en tout $(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k$ par l’équation

$$C_{k,\delta}^*(u_1, \dots, u_k) = \prod_{i=1}^k \left(u_{\sigma^i(1)}^{a_k} \wedge \dots \wedge u_{\sigma^i(k-1)}^{a_k} \wedge u_{\sigma^i(k)}^{b_k} \right), \tag{12}$$

où $a_k = (k - d) / \{k(k - 1)\}$ et $b_k = d / k$ sont des réels positifs dépendant du scalaire $d = \delta'(1^-)$.

Démonstration. Fixons $u = (u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k$ et convenons que les opérations sur les vecteurs s’effectuent terme à terme. Au vu des postulats sur δ , on voit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a à la fois

$$\delta(u^{1/n}) = 1 + n^{-1}d \ln(u) + o(1/n)$$

et

$$\begin{aligned} f(u^{1/n}) &= \frac{1}{k-1} \{ku^{1/n} - \delta(u^{1/n})\} = \frac{1}{k-1} \{k-1 + n^{-1} \ln(u^k) - n^{-1} \ln(u^d) + o(1/n)\} \\ &= 1 + \frac{1}{k-1} n^{-1} \ln(u^{k-d}) + o(1/n). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$C_{k,\delta}(u^{1/n}) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k a_k \ln(u_{\sigma^i(1)}) \wedge \cdots \wedge a_k \ln(u_{\sigma^i(k-1)}) \wedge b_k \ln(u_{\sigma^i(k)}) + o(1/n),$$

d'où l'on tire que

$$\{C_{k,\delta}(u^{1/n})\}^n = \left[1 + \frac{1}{n} \ln \left\{ \prod_{i=1}^k \left(u_{\sigma^i(1)}^{a_k} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma^i(k-1)}^{a_k} \wedge u_{\sigma^i(k)}^{b_k} \right) \right\} + o(1/n) \right]^n,$$

ce qui permet de conclure après un passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$. \square

Il est intéressant de noter que bien qu'elle soit en apparence nouvelle, la copule définie par l'équation (12) est en fait un cas particulier de la construction décrite dans le théorème 2.1 de Liebscher [23]. Ce résultat entraîne entre autres que si C_1, \dots, C_k sont des copules en dimension k et si, pour tous entiers $i, j \in \{1, \dots, k\}$, l'application $g_{ji} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une bijection strictement croissante ou identiquement égale à 1, alors la fonction définie en tous $u_1, \dots, u_k \in [0, 1]$ par

$$C(u_1, \dots, u_k) = \prod_{j=1}^k C_j \{g_{j1}(u_1), \dots, g_{jk}(u_k)\} \quad (13)$$

est une copule dans la mesure où pour tous réel $v \in [0, 1]$ et entier $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

$$g_{1i}(v) \times \cdots \times g_{ki}(v) = v. \quad (14)$$

Pour montrer que la copule définie par l'équation (12) est de cette forme, il suffit de prendre $C_1 = \cdots = C_k = M$ et de poser, pour tous réel $v \in [0, 1]$ et entier $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$g_{1i}(v) = v^{b_k}, \quad g_{2i}(v) = \cdots = g_{ki}(v) = v^{a_k},$$

où les constantes a_k et b_k sont telles que stipulées dans l'énoncé de la proposition 5. La condition (14) est alors satisfaite puisque $(k-1)a_k + b_k = 1$.

Notons au passage que la proposition 5 illustre aussi le fait qu'en général, la copule définie en (13) est de valeurs extrêmes dès lors que ses éléments constitutifs C_1, \dots, C_k sont eux-mêmes des copules de ce type, pourvu que pour tous entiers $i, j \in \{1, \dots, k\}$, il existe un réel $\theta_{ji} \in [0, 1]$ tel que $g_{ji}(v) = v^{\theta_{ji}}$ en tout point $v \in [0, 1]$. D'autres cas particuliers de cette observation élémentaire mais apparemment inédite sont mentionnés dans [5] et [10].

Un analogue en dimension $k \geq 3$ de la copule B_δ de Bertino a également été proposé par Arias-García et coll. [1], mais il ne s'agit d'une copule que si la diagonale donnée au départ est Lipschitz croissante de degré $k/(k-1)$. Dans ce cas, le calcul de l'attracteur maximal de cette copule se ramène à celui déjà présenté en dimension $k = 2$. L'intérêt de ce résultat semble toutefois limité.

Pour de plus amples commentaires sur les défis que pose la construction de copules à coupe diagonale fixée en dimension $k > 2$, le lecteur peut se référer au récent article de synthèse de Fernández-Sánchez et Úbeda-Flores [7].

Références

- [1] J. J. Arias García, H. De Meyer, B. De Baets, « Multivariate Bertino copulas », *J. Math. Anal. Appl.* **434** (2016), n° 2, p. 1346-1364.
- [2] S. Bertino, « Sulla dissomiglianza tra mutabili cicliche », *Metron* **35** (1977), p. 53-88.
- [3] U. Cherubini, E. Luciano, W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, Wiley Finance Series, John Wiley & Sons, 2004.
- [4] C. M. Cuadras, J. Augé, « A continuous general multivariate distribution and its properties », *Commun. Stat., Theory Methods* **A10** (1981), n° 4, p. 339-353.
- [5] F. Durante, G. Salvadori, « On the construction of multivariate extreme value models via copulas », *Environmetrics* **21** (2010), n° 2, p. 143-161.
- [6] F. Durante, C. Sempì, *Principles of Copula Theory*, CRC Press, 2016.
- [7] J. Fernández-Sánchez, M. Úbeda-Flores, « Constructions of copulas with given diagonal (and opposite diagonal) sections and some generalizations », *Depend. Model.* **6** (2018), n° 1, p. 139-155.

- [8] G. A. Fredricks, R. B. Nelsen, « Copulas constructed from diagonal sections », in *Distributions With Given Marginals and Moment Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 129-136.
- [9] ———, « The Bertino family of copulas », in *Distributions With Given Marginals and Statistical Modelling*, Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 81-91.
- [10] C. Genest, K. Ghoudi, L.-P. Rivest, « "Understanding relationships using copulas" by Edward Frees and Emiliano Valdez, January 1998 (Discussion) », *N. Am. Actuar. J.* **2** (1998), n° 3, p. 143-149.
- [11] C. Genest, J. Nešlehová, « Copula modeling for extremes », in *Encyclopedia of Environmetrics*, John Wiley & Sons, 2012, p. 530-541.
- [12] ———, « Modeling dependence beyond correlation », in *Statistics in Action : A Canadian Outlook*, CRC Press, 2014, p. 59-78.
- [13] C. Genest, J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, C. Sempi, « A characterization of quasi-copulas », *J. Multivariate Anal.* **69** (1999), n° 2, p. 193-205.
- [14] C. Genest, J. Segers, « Rank-based inference for bivariate extreme-value copulas », *Ann. Stat.* **37** (2009), n° 5B, p. 2990-3022.
- [15] K. Ghoudi, A. Khoudraji, L.-P. Rivest, « Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles », *Can. J. Stat.* **26** (1998), n° 1, p. 187-197.
- [16] M. Hofert, I. Kojadinovic, M. Mächler, J. Yan, *Elements of Copula Modeling with R, Use R!*, Springer, 2018.
- [17] P. Jaworski, « On copulas and their diagonals », *Inf. Sci.* **179** (2009), n° 17, p. 2863-2871.
- [18] ———, « On extreme value copulas with given concordance measures », in *New Trends in Aggregation Theory, Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 981, Springer, 2019, p. 29-46.
- [19] H. Joe, « Parametric families of multivariate distributions with given margins », *J. Multivariate Anal.* **46** (1993), n° 2, p. 262-282.
- [20] ———, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 73, Chapman & Hall, 1997.
- [21] ———, *Dependence Modeling With Copulas*, Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 134, CRC Press, 2014.
- [22] N. Kamnitsi, C. Genest, P. Jaworski, W. Trutschnig, « On the size of the class of bivariate extreme-value copulas with a fixed value of Spearman's rho or Kendall's tau », *J. Math. Anal. Appl.* **472** (2019), n° 1, p. 920-936.
- [23] E. Liebscher, « Construction of asymmetric multivariate copulas », *J. Multivariate Anal.* **99** (2008), n° 10, p. 2234-2250, erratum in *ibid.* **102** (2011), n° 4, p. 869-870.
- [24] A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 2005.
- [25] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, 2nd éd., Springer Series in Statistics, Springer, 2006.
- [26] R. B. Nelsen, J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, M. Úbeda-Flores, « Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions », *J. Multivariate Anal.* **90** (2004), n° 2, p. 348-358.
- [27] ———, « On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal sections », *Insur. Math. Econ.* **42** (2008), n° 2, p. 473-483.
- [28] G. Salvadori, C. De Michele, N. T. Kottegoda, R. Rosso, *Extremes in Nature : An Approach Using Copulas*, Water Science and Technology Library, vol. 56, Springer, 2007.
- [29] M. Scarsini, « On measures of concordance », *Stochastica* **8** (1984), n° 3, p. 201-218.
- [30] M. Sibuya, « Bivariate extreme statistics. I », *Ann. Inst. Stat. Math.* **11** (1960), p. 195-210.