INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Erwann Delay

Spectre du Laplacien agissant sur les r-tenseurs symétriques sur l'espace hyperbolique

Volume 359, issue 5 (2021), p. 625-630

<https://doi.org/10.5802/crmath.201>

Comptes Rendus
Mathématique
2021, 359, nº 5, p. 625-630
https://doi.org/10.5802/crmath.201

Physique mathématique, Théorie spectrale / *Mathematical physics, Spectral theory*

Spectre du Laplacien agissant sur les r-tenseurs symétriques sur l'espace hyperbolique

Erwann Delay [a]

[a] Laboratoire de Mathématiques d'Avignon, Université d'Avignon, Campus Jean-Henri Fabre, 301 rue Baruch de Spinoza, BP 21239, 84916 Avignon Cedex 9, France
Courriel : erwann.delay@univ-avignon.fr

Résumé. Sur l'espace hyperbolique, nous donnons le spectre du Laplacien agissant sur les champs de tenseurs symétriques sans trace de tous rangs.

Abstract. On the hyperbolic space, we give the spectrum of the Laplacian acting on trace free symmetric tensors fields of any rank.

Classification mathématique par sujets (2010). 35P15, 58J50, 47A53.

Financement. Article financé en partie par l'agence nationale de la recherche ANR-17-CE40-0034 (projet CCEM).

Manuscrit reçu le 18 mars 2021, accepté le 23 mars 2021.

1. Introduction

L'étude des Laplaciens agissants sur les (champs de) tenseurs symétriques de rang r, comme le Laplacien de Licnerowicz Δ_L, est importante pour aborder certains problèmes en géométrie riemannienne comme en relativité générale [2].

Sur l'espace hyperbolique, le spectre de Δ_L est déjà connu lorsque $r = 2$. Dans la littérature physique $r \geq 3$ apparaît naturellement dans l'étude des champs spins élevés, en théorie des cordes et dans la correspondance ADF/CFT (voir [10] par exemple). Ainsi par souci de complétude, il faut calculer ce spectre pour toute valeur de $r \in \mathbb{N}^*$ sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$. Le spectre essentiel de Δ_L découle du travail de J. M. Lee [7, propositions D et E] pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et le spectre par l'auteur mais seulement pour $r = 2$ [3]. On peut aussi rappeler ici qu'il est montré dans [4] qu'il n'y a pas de tenseur propre L^2, toujours pour $r = 2$.

Le but de cette courte note est de prouver que sur $\mathbb{H}^{n+1}$, il n'y a pas de valeur propre en dessous du spectre essentiel pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Une conséquence est la suivante :

Théorème 1. *Sur l'espace hyperbolique de dimension $(n+1)$, le spectre du Laplacien de Lichnerowicz agissant sur les r-tenseurs symétriques de trace nulle est la demi-droite :*

$$\sigma(\Delta_L) = \left[\frac{n^2}{4} - r(n+r-2), +\infty\right[.$$

On peut en déduire facilement le spectre de tout Laplacian de la forme $\Delta_L +$ termes de courbure, certains sont donnés en section 4.

Pour $r \geq 2$, tout r-tenseur symétrique peut être décomposé en tenseur symétrique sans trace et un $(r-2)$-tenseur symétrique tensorisé (symétriquement) avec la métrique, et le Laplacien de Lichnerowicz préserve cette décomposition. Ainsi le spectre sur les fonctions, les 1-formes et les tenseurs symétriques de trace nulle, permet d'obtenir le spectre sur tous les tenseurs symétriques.

Afin d'obtenir des estimées fines pour la méthode employée ici, il sera pratique de rappeler un Laplacien auxiliaire Δ_K agissant aussi sur les r-tenseurs symétriques et d'utiliser une formule de Weitzenböck.

Remerciements

Je remercie Harold C. Steinacker de m'avoir demandé une référence donnant une borne inférieure pour le Laplacien agissant sur les champs de spins élevés (higher spin fields) sur $\mathbb{H}^3$.

2. Définitions, notations et conventions

Nous décrivons ici certains objets utilisés dans cette note.

Tout d'abord, (M, g) désignera une variété riemannienne, et ∇ sa connexion de Levi-Civita.

On notera $\mathscr{T}_r^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang r et contravariants de rang q. Si $q = 0$, on notera $\mathscr{S}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques et $\mathring{\mathscr{S}}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques de trace nulle (relativement à g). On appliquera la convention de sommation, en utilisant g_{ij} et son inverse g^{ij} afin d'abaisser ou de remonter les indices.

L^2 est l'espace de Hilbert usuel de fonctions ou tenseurs munit du produit (resp. norme)

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_M \langle u, v\rangle_g \mathrm{d}V_g \quad \left(\text{resp. } |u|_{L^2} = \left(\int_M |u|_g^2 \mathrm{d}V_g\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

où $\langle u, v\rangle_g$ (resp. $|u|_g$) est le produit usuel (resp. norme) de fonctions ou tenseurs relatif à g, et la mesure $\mathrm{d}V_g$ celle induite par g.

Le Laplacian (brut) est définit par

$$\triangle = -\operatorname{tr}\nabla^2 = \nabla^*\nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel de ∇ pour $L^2(\mathrm{d}V_g)$.

Le modèle de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$ de dimension $(n+1)$, que nous choisissons ici est (B, g) où B est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $g = \rho^{-2}\delta$ où δ est la métrique euclidienne standard et ρ la fonction sur B définie par

$$\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|_\delta^2).$$

3. Laplacien sur les q-formes à valeurs dans E

Nous rappelons ici quelques définitions données dans [7] nécessaires pour la compréhension des calculs. Soit E un fibré tensoriel géométrique au dessus de M (dans le sens de [7]). Soit $\Lambda^q E :=$

$E\otimes\Lambda^q M$ le fibré des q formes sur M à valeurs dans E. On note $D : C^\infty(M;\Lambda^q E)\to C^\infty(M;\Lambda^{q+1}E)$ la différentielle extérieure covariante sur les formes à valeurs dans E :

$$D(\sigma\otimes\alpha)=\nabla\sigma\wedge\alpha+\sigma\otimes \mathrm{d}\alpha,$$

pour $\alpha\in C^\infty(M;\Lambda^q M)$ et $\sigma\in C^\infty(M;E)$. Le produit extérieur ci-dessus doit être compris comme le produit de la composante 1-forme de $\nabla\sigma$ avec α afin d'obtenir une section de $\Lambda^{q+1}E$. Nous aurons besoin du Laplacien de Laplace–Beltrami sur les formes à valeurs dans E, donné par (voir N. Koiso [6] si $E=\Lambda^1 M$)[1]

$$\Delta_K=D^*D+DD^*,$$

où D^* est l'adjoint formel de D. Pour une 1-forme scalaire α, on note $\alpha\vee : \Lambda^{q+1}E\to\Lambda^q E$ le g-adjoint de l'opérateur $\alpha\wedge : \Lambda^q E\to\Lambda^{q+1}E$:

$$\langle\alpha\wedge\omega,\eta\rangle_g=\langle\omega,\alpha\vee\eta\rangle_g.$$

Notons que pour deux 1-formes scalaires $\alpha\vee\beta=\langle\alpha,\beta\rangle_g$.

Pour un champ de 2-tenseurs symétriques continu Z, on définit l'endomorphisme $Z : \Lambda^1 M\to\Lambda^1 M$, que l'on étend à $\Lambda^q M$ comme une dérivation. Ainsi dans une base orthonormée, si Z_{ij} sont les composantes de Z, alors

$$Z\omega=\sum_{i,j}Z_{ij}e_i\wedge(e_j\vee\omega).$$

Cet endomorphisme est étendu à $\Lambda^q E$ en le faisant agir uniquement sur la composante correspondant à la forme différentielle..

Pour une fonction $u\in C^2(M)$, on note $H(u)=\nabla^2 u$ sa hessienne, ainsi $H(u)$ définit un endomorphisme de $\Lambda^q E$ comme ci-dessus.

On peut maintenant énoncer le lemme 7.9 de [7] :

Lemme 2. *Pour toute section lisse à support compacte ω de $\Lambda^q E$, et toute fonction C^2 strictement positive φ sur M, on a la formule intégrale suivante :*

$$\langle\omega,\Delta_K\omega\rangle_{L^2}\geq\int_M\left\langle\omega,[\varphi^{-1}\Delta\varphi+2H(\ln\varphi)]\omega\right\rangle_g \mathrm{d}V_g$$

Ce lemme a été utilisé par J. M. Lee [7] afin de prouver des inégalités asymptotiques et ainsi calculer le bas du spectre essentiel de toute variété asymptotiquement hyperbolique, ceci par un choix judicieux de φ. Sur l'espace hyperbolique on peut prendre, comme dans [3], une meilleure fonction et ainsi obtenir une inégalité globale.

Corollaire 3. *Sur l'espace hyperbolique, pour toute section lisse à support compact ω de $\Lambda^q E$, on a les inégalités globales :*

$$\langle\omega,\Delta_K\omega\rangle_{L^2}\geq\frac{(n-2q)^2}{4}|\omega|^2_{L^2}\qquad si\ \ q<\frac{n}{2},$$
$$\langle\omega,\Delta_K\omega\rangle_{L^2}\geq\frac{(n-2q+2)^2}{4}|\omega|^2_{L^2}\quad si\ \ 1+\frac{n}{2}<q\leq n.$$

Démonstration. Sur l'espace hyperbolique la fonction ψ définie par

$$\psi=\rho^{-1}-1\in[1,+\infty),$$

est solution de l'équation de type Obata :

$$H(\psi)=\psi g.$$

[1] Δ_K est noté Δ dans [7], donc différent du $\Delta=\nabla^*\nabla$ ici

En particulier on a $\Delta\psi = -(n+1)\psi$. Pour $s \in \mathbb{R}$ que nous choisirons plus tard, on définit $\varphi = \psi^{-s}$ ainsi
$$H(\ln\varphi) = s(\psi^{-2}\mathrm{d}\psi \otimes \mathrm{d}\psi - g),$$
puis
$$\langle\omega, H(\ln\varphi)\omega\rangle = s\left(\left\langle\omega, \frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} \wedge \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} \vee \omega\right)\right\rangle_g - q|\omega|_g^2\right) = s\left(\left|\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} \vee \omega\right|_g^2 - q|\omega|_g^2\right).$$
Maintenant comme
$$\partial_i\rho = -x^i\,, \quad \text{donc } |\mathrm{d}\rho|_g^2 = \rho^2(1-2\rho),$$
on obtient
$$\frac{|\mathrm{d}\psi|_g^2}{\psi^2} = \frac{|\mathrm{d}\rho|_g^2}{(\rho^{-1}-1)^2\rho^4} = \frac{1-2\rho}{1-2\rho+\rho^2} < 1.$$
D'autre part, on a aussi
$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\Delta\varphi &= \psi^s\Delta(\psi^{-s})\\ &= -s\psi^{-1}\Delta\psi - s(s+1)\frac{|\mathrm{d}\psi|_g^2}{\psi^2}\\ &= s(n+1) - s(s+1)\frac{|\mathrm{d}\psi|_g^2}{\psi^2}.\end{aligned}$$
On obtient ainsi pour $s \geq 0$,
$$\left\langle\omega, [\varphi^{-1}\Delta\varphi + 2H(\ln\varphi)]\omega\right\rangle_g \geq [s(n+1-s-1) - 2sq]|\omega|_g^2 = s(n-s-2q)|\omega|_g^2,$$
et pour $s \leq 0$,
$$\begin{aligned}\left\langle\omega, [\varphi^{-1}\Delta\varphi + 2H(\ln\varphi)]\omega\right\rangle_g &\geq [s(n+1) - 2q]|\omega|_g^2 + [-s(s+1) + 2s]\psi^{-2}|\mathrm{d}\psi|_g^2|\omega|_g^2\\ &\geq s(n-s-2q+2)|\omega|_g^2.\end{aligned}$$
Si $q \leq n/2$, on choisit $s = \frac{n-2q}{2}$ alors $\langle\omega, \Delta_K\omega\rangle_{L^2} \geq \frac{(n-2q)^2}{4}|\omega|_{L^2}^2$, et si $q \geq \frac{n}{2}+1$ on prend $s = \frac{n-2q+2}{2}$, ainsi $\langle\omega, \Delta_K\omega\rangle_{L^2} \geq \frac{(n-2q+2)^2}{4}|\omega|_{L^2}^2$. □

Remarque 4. Une démonstration alternative serait d'adapter la preuve du lemme 5.1 dans [7] afin de montrer que certaines inégalités géométriques asymptotiques L^2 deviennent globales sur $\mathbb{H}^{n+1}$.

4. Laplaciens sur les tenseurs symmétriques

Ici nous utilisons le corollaire 3 avec $E = \mathcal{T}^0_{r-1}$. Rappelons tout d'abord quelques opérateurs d'ordre zéro agissants sur les r-tenseurs définis dans [7] :
$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(u)_{i_1\ldots i_{r-1}j} = R_j{}^k u_{i_1\ldots i_{r-1}k},$$
$$\widetilde{\mathrm{Riem}}(u)_{i_1\ldots i_{r-1}j} = \sum_{p=1}^{r-1} R_{i_p}{}^l{}_j{}^k u_{i_1\ldots l\ldots i_{r-1}k}.$$
Dans le lemme 7.11 de [7] il est prouvé que l'identification d'un r-tenseur covariant avec une 1-forme à valeur dans les $(r-1)$-tenseurs covariants donne la formule de Weitzenbock
$$\Delta_K = \nabla^*\nabla + \widetilde{\mathrm{Ric}} - \widetilde{\mathrm{Riem}}.$$

On s'intéresse aussi à deux autres Laplaciens classiques. Pour cela, on définit

$$\mathrm{Ric}(u)_{i_1\dots i_r} = \sum_{p=1}^{r} R^l_{i_p} u_{i_1,\dots l\dots i_r},$$
$$\text{et}\quad \mathrm{Riem}(u)_{i_1\dots i_r} = \sum_{k\neq l} R_{i_k}{}^p{}_{i_l}{}^q u_{i_1\dots p\dots q\dots i_r}.$$

le Laplacien de Lichnerowicz agissant sur les r-tenseurs [8] est

$$\Delta_L = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric} - \mathrm{Riem}.$$

Le Laplacien de Sampson agissant sur les r-tenseurs [9] est

$$\Delta_S = \nabla^*\nabla - \mathrm{Ric} + \mathrm{Riem},$$

aussi (en fait auparavant) définit sur les tenseurs symétriques par :

$$\Delta_S = D_S^* D_S - D_S D_S^*,$$

où D_S est la dérivée covariante symétrique et D_S^* son adjoint formel.

Si on se spécialise au cas de la courbure constante K et aux r-tenseurs symétriques de trace nulle, alors

$$R_{ikjl} = K(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj}), \quad R_{ik} = Kng_{ij},$$

donc

$$\Delta_L = \nabla^*\nabla + Kr(n+r-1),$$
$$\Delta_K = \nabla^*\nabla + K(n+r-1)$$
$$\text{et}\quad \Delta_S = \nabla^*\nabla - Kr(n+r-1)$$

D'après le corollaire 3 avec $q=1$ et $E = \mathscr{T}^0_{r-1}$ et la proposition E de [7] on déduit

Corollaire 5. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Sur l'espace hyperbolique de dimension $(n+1)$ avec $n > 1$, le spectre du Laplacien correspondant agissant sur les r-tenseurs covariants symétriques de trace nulle est la demi-droite*

$$\sigma(\Delta_K + c) = \left[\frac{(n-2)^2}{4} + c, +\infty\right[.$$

En particulier, on a

$$\sigma(\Delta) = \left[\frac{n^2}{4} + r, +\infty\right[,$$
$$\sigma(\Delta_L) = \left[\frac{n^2}{4} - r(n+r-2), +\infty\right[,$$
$$\sigma(\Delta_S) = \left[\frac{n^2}{4} + r(n+r), +\infty\right[.$$

5. Remarque sur les variétés asymptotiquement hyperboliques statiques

Comme pour l'espace hyperbolique, il est tentant d'utiliser une fonction spéciale pour d'autres variétés asymptotiquement hyperboliques (AH pour abréviation, voir [7] pour une définition précise). L'existence d'une solution non triviale de l'équation de type Obata $H(\psi) = \psi g$ dans le contexte AH va caractériser l'espace hyperbolique [11], il faut donc être plus modéré pour une généralisation.

Regardons le cas des variétés AH statiques (M, g, ψ) (des familles de dimensions infinies de telles variétés existent [1]). (M, g) est alors une variété AH de courbure scalaire constante $R = -n(n+1)$ et ψ une fonction sur M vérifiant :

$$H(\psi) + \Delta\psi g - \psi\,\mathrm{Ric}(g) = 0,$$

donc aussi
$$\Delta\psi + (n+1)\psi = 0.$$
Ici on supposera $\psi > 0$ et que la courbure k du bord conforme est constante (de telles solutions comme le AdS soliton existent aussi). Il est prouvé dans [5] que
$$|\mathrm{d}\psi|^2 - \psi^2 + k \le 0,$$
ainsi si $k = 0, 1$ alors
$$\frac{|\mathrm{d}\psi|}{\psi} \le 1.$$
Si l'on définit $\mathring{\mathrm{Ric}}(g) = \mathrm{Ric}(g) + ng$ la partie sans trace de la courbure de Ricci alors
$$H(\psi) = \psi g + \psi \mathring{\mathrm{Ric}}(g).$$
Notons que $|\mathring{\mathrm{Ric}}(g)|_g \to 0$ à l'infini. En calquant la preuve donnée sur $\mathbb{H}^{n+1}$ pour le corollaire 3 on obtient

Corollaire 6. *Sur une variété AH statique dont le bord conforme à l'infini est à courbure constante positive ou nulle, pour toute section lisse à support compacte ω de $\Lambda^q E$, on a les inégalités globales :*
$$\langle \omega, (\Delta_K + (n-2q)\mathring{\mathrm{Ric}}(g))\omega\rangle_{L^2} \ge \frac{(n-2q)^2}{4}|\omega|^2_{L^2} \qquad si\ \ q < \frac{n}{2},$$
$$\langle \omega, (\Delta_K + (n-2q+2)\mathring{\mathrm{Ric}}(g))\omega\rangle_{L^2} \ge \frac{(n-2q+2)^2}{4}|\omega|^2_{L^2} \quad si\ \ 1 + \frac{n}{2} < q \le n.$$

Références

[1] M. T. Anderson, P. T. Chruściel, E. Delay, « Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant. II : (n>4) », in *AdS/CFT correspondence : Einstein metrics and their conformal boundaries*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 8, European Mathematical Society, 2005, p. 165-205.

[2] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 10, Springer, 1987.

[3] E. Delay, « Essential spectrum of the Lichnerowicz Laplacian on symmetric 2-tensors on asymptotically hyperbolic manifolds », *J. Geom. Phys.* **43** (2002), p. 33-44.

[4] ———, « TT-eigentensors for the Lichnerowicz laplacian on some asymptotically hyperbolic manifolds with warped products metrics », *Manuscr. Math.* **123** (2007), nº 2, p. 147-165.

[5] G. J. Galloway, E. Woolgar, « On static Poincaré–Einstein metrics », *J. High Energy Phys.* **2015** (2015), nº 6, article no. 51 (18 pages).

[6] N. Koiso, « Non-deformability of Einstein metrics », *Osaka J. Math.* **15** (1978), p. 419-433.

[7] J. M. Lee, *Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 864, American Mathematical Society, 2006.

[8] A. Lichnerowicz, « Propagateurs et commutateurs en relativité générale », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **10** (1961), p. 5-56.

[9] J. H. Sampson, « On a theorem of Chern », *Trans. Am. Math. Soc.* **177** (1973), p. 141-153.

[10] H. C. Steinacker, « Higher-spin kinematics & no ghosts on quantum space-time in Yang–Mills matrix models », *Adv. Theor. Math. Phys.* **25** (2021), nº 4, to appear.

[11] Y. Tashiro, « Complete Riemannian manifolds and some vector fields », *Trans. Am. Math. Soc.* **117** (1965), p. 251-275.