



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Mathématique


Kenta Higuchi

**Résonances Semiclassiques Engendrées par des Croisements de
Trajectoires Classiques**

Volume 359, issue 6 (2021), p. 657-663

<<https://doi.org/10.5802/crmath.209>>

© Académie des sciences, Paris and the authors, 2021.
Some rights reserved.

 This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Mathématique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org



Équations aux dérivées partielles, Physique mathématique / *Partial differential equations, Mathematical physics*

Résonances Semiclassiques Engendrées par des Croisements de Trajectoires Classiques

Semiclassical Resonances Generated by Crossings of Classical Trajectories

Kenta Higuchi^{ⓧ a}

^a Department of Mathematical Sciences, Ritsumeikan University, 1-1-1 Noji-Higashi, Kusatsu, 525-8577, Japan
Courriel : ra0039vv@ed.ritsumei.ac.jp

Résumé. Nous considérons un système 2×2 d'opérateurs de Schrödinger semiclassique 1D avec petites interactions par rapport au paramètre semiclassique h . Nous étudions l'asymptotique des résonances en limite semiclassique près d'une énergie non-captive pour les deux hamiltoniens classiques correspondants. Nous montrons l'existence de résonances de largeur $T^{-1}h \log(1/h)$, contrairement au cas scalaire, sous la condition que deux trajectoires classiques se croisent et composent une trajectoire périodique de période T .

Abstract. We consider a 2×2 system of one-dimensional semiclassical Schrödinger operators with small interactions with respect to the semiclassical parameter h . We study the asymptotics in the semiclassical limit of the resonances near a non-trapping energy for both corresponding classical Hamiltonians. We show the existence of resonances of width $T^{-1}h \log(1/h)$, contrary to the scalar case, under the condition that two classical trajectories cross and compose a periodic trajectory with period T .

Classification Mathématique (2020). 35P15, 35C20, 35S99, 47A75.

Financement. The author is supported by Ritsumeikan University, KENKYU-SHOREI scholarship A.

Manuscrit reçu le 5 mars 2021, révisé le 2 avril 2021, accepté le 3 avril 2021.

Abridged English version

We are interested in systems of Schrödinger operators and in particular in quantum effects caused by crossings of corresponding classical trajectories. We consider a one-dimensional 2×2 model coming from the Born–Oppenheimer approximation, and show the existence of resonances with imaginary part of order $h \log(1/h)$ generated by crossings of non-trapping trajectories. In the scalar case, non-existence of resonances with imaginary part of $\mathcal{O}(h \log(1/h))$ near a non-trapping energy is well-known [12]. More precisely, we consider the situation where two

classical trajectories cross and compose a periodic trajectory with period T . To localize resonances in a suitable neighborhood of E_0 , we control the asymptotic behavior of the corresponding resonant states in the following sense. In fact, continuing a resonant state u microlocally along the periodic trajectory using Maslov theory at turning points and the connection formula at crossing points obtained in [7], we obtain the principal symbol $C_0(E, h)$ of the multiplicative constant $C(E, h)$ (monodromy constant) such that u becomes Cu after one tour, see (4) and (11). Applying the contradiction argument established in [1, 4], we show the existence and asymptotics of resonances with imaginary part $-T^{-1}h \log(1/h)$. This result optimizes the resonance free region obtained in [10].

1. Introduction

La théorie de résonances quantiques de l'opérateur de Schrödinger a une longue histoire (voir [6]). En particulier leur répartition asymptotique en limite semiclassique a été bien étudié depuis les années 80 où Helffer et Sjöstrand [9] ont montré dans un cadre analytique le non-existence de résonance dans un voisinage d'une énergie non-captive de la mécanique classique correspondante (voir aussi [2]). Dans le cas captif, l'asymptotique de résonances, et surtout leur partie imaginaire (largeur), a été étudié en liaison avec la géométrie de l'ensemble capté [3, 8, 9, 13]. Quand le potentiel n'est pas globalement analytique, la zone sans résonance dans le cas non-captif est plus petite. En effet, il n'y a pas de résonance avec partie imaginaire d'ordre $h \log(1/h)$, Martinez [12].

Dans le cas des opérateurs à valeurs matricielles, il faut tenir compte des interactions entre des systèmes hamiltoniens correspondants à différentes valeurs propres du symbole matriciel. Elles ne sont pas négligeables surtout quand des trajectoires classiques se croisent. Fujiié, Martinez et Watanabe ont traité un croisement entre une trajectoire périodique et une non-captive et obtenu la largeur des résonances qui décrit l'effet du croisement (voir [7] et les références là-dedans).

Motivé par ces résultats, nous nous sommes posé la question : Y a-t-il des résonances engendrées par le croisement de deux trajectoires non-captives ? Ce travail donne une réponse affirmative à cette question en précisant l'asymptotique des résonances d'un modèle unidimensionnel provenant de l'approximation de Born–Oppenheimer. Ce modèle a deux trajectoires classiques non-captives qui se croisent et composent une trajectoire périodique. Nous démontrons l'existence de résonances engendrées par cette trajectoire périodique dont la largeur est $T^{-1}h \log(1/h)$ contrairement au cas scalaire non-captif. Ici, la constante T est la période de la trajectoire. Ce résultat optimise la zone sans résonance obtenu dans [10].

2. Énoncé du résultat

Nous considérons le système d'opérateurs de Schrödinger unidimensionnel suivant :

$$P(h) = \begin{pmatrix} P_1 & hW \\ hW^* & P_2 \end{pmatrix} \quad \text{défini sur} \quad L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2), \quad (1)$$

où h est un paramètre semiclassique, $P_j = h^2 D_x^2 + V_j(x)$ ($j = 1, 2$) un opérateur de Schrödinger avec un potentiel $V_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D_x = -id/dx$. Ici la perturbation est donnée par un opérateur différentiel d'ordre 1, $W = W(x, hD_x)$ et son adjoint formel W^* . Nous étudions les résonances de $P(h)$ en limite semiclassique $h \rightarrow 0_+$ dans un voisinage de $E_0 > 0$ telle que V_1, V_2, W vérifient les hypothèses suivantes (A1)–(A3) :

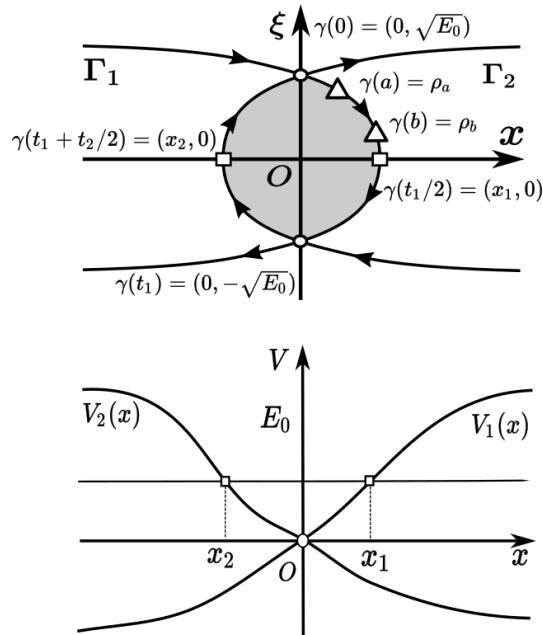


FIGURE 1. Potentiels V_1, V_2 et trajectoires hamiltoniennes Γ_1, Γ_2 .

(A1) Chaque $V_j(x)$ ($j = 1, 2$) vérifie les conditions suivantes :

(a) V_j se prolonge en une fonction bornée et analytique dans un domaine conique complexe

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} x| < (\tan \theta_0) |\operatorname{Re} x|, |\operatorname{Re} x| > R_0\}$$

pour des constantes $0 < \theta_0 < \pi/2$ et $R_0 > 0$.

(b) V_j admet des limites v_j^\pm quand $\operatorname{Re} x \rightarrow \pm\infty$ dans Σ et $v_1^- < E_0 < v_1^+, v_2^- > E_0 > v_2^+$.

(c) $V_j - E_0$ admet un unique zéro $x_j \in \mathbb{R}$, et $V_j'(x_j) \neq 0$. V_j est analytique près de x_j .

(A2) $V_1(x) = V_2(x)$ si et seulement si $x = 0$. De plus $V_1(0) = V_2(0) = 0$ et $V_1'(0) > V_2'(0)$.

(A3) $W(x, hD_x) = r_0(x) + ir_1(x)hD_x$, où $r_0, r_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ se prolongent en des fonctions bornées et analytiques dans Σ . De plus, $W_0 := r_0(0) + ir_1(0)\sqrt{E_0} \neq 0$.

Sous l'hypothèse (A1), l'énergie E_0 est non-captive pour chaque hamiltonien classique $p_j = \xi^2 + V_j$ associé à P_j , c'est à dire que, pour chaque ensemble compact $K \subset p_j^{-1}(E_0)$, il existe $T_K > 0$ telle que

$$(x, \xi) \in K \implies \exp(tH_{p_j})(x, \xi) \notin p_j^{-1}(E_0) \setminus K, |t| > T_K. \tag{2}$$

Ici, $H_{p_j} = 2\xi\partial_x - V_j'(x)\partial_\xi$ est le champ hamiltonien, et $\exp(tH_{p_j})(x, \xi)$ est le flot hamiltonien correspondant dans l'espace des phases $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ à p_j vérifiant $\exp(tH_{p_j})(x, \xi)|_{t=0} = (x, \xi)$.

Nous fixons $r > 0$ arbitrairement grand et cherchons des résonances dans le rectangle

$$R_h(M) := E_0 + h \log(1/h)[-r, r] + i[-Mh \log(1/h), 0], \tag{3}$$

pour une constante positive $M > 0$ (indépendante de h).

Dans $R_h(M)$, les résonances de P sont définies, en tant que valeurs propres de l'opérateur distordu $P_\theta = U_\theta P U_\theta^{-1}$. Ici, $U_\theta u = |\zeta'_\theta(x)|^{1/2} u \circ \zeta_\theta$ où $\zeta_\theta \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vérifie

$$\zeta_\theta(x) = \begin{cases} x & |x| \leq R_0, \\ xe^{i\theta} & |x| \geq 2R_0, \end{cases} \quad 0 < \theta < \theta_0.$$

Pour la méthode des distorsions analytiques, voir par exemple [6, Section 2.7] et les références là-dedans. Remarquons que le spectre de P_θ est discret dans $R_h(M)$ dû à la condition $\nu_j^\pm \neq E_0$ (voir [10, Appendix B]). De plus, il est indépendant de $\theta = M'h \log(1/h)$ pour M' assez grand. L'ensemble de ces résonances est noté $\text{Res}(P)$.

Soit $x_j(E)$ l'unique zéro de $E - V_j(x)$ pour $E \in R_h(M)$. On définit des fonctions d'énergie E qui vont donner la condition de quantification des résonances :

$$S(E) := 2 \left(\int_{x_2(E)}^0 \sqrt{E - V_2(x)} dx + \int_0^{x_1(E)} \sqrt{E - V_1(x)} dx \right), \quad C_0(E; h) := \frac{i h e^{iS(E)/h} \pi W_0}{(V_1'(0) - V_2'(0)) \sqrt{E_0}}, \quad (4)$$

où la branche de la racine carrée de $E - V_j \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ est telle que la partie réelle est positive. On note l'ensemble des racines de $C_0(E; h) = 1$ (dites *pseudo-résonances* dans [1]) par

$$\text{Res}_0(P; M) := \{E \in R_h(M); C_0(E, h) = 1\}. \quad (5)$$

Pour $E \in \text{Res}_0(P; M)$, on a

$$C_0'(E; h) = i h^{-1} S'(E) C_0(E; h) = i h^{-1} S'(E) = i h^{-1} (S'(E_0) + \mathcal{O}(h \log(1/h))).$$

Donc pour h suffisamment petit, $C'(E; h)$ ne s'annule pas. Par suite, les pseudo-résonances sont simples. Nous avons $E \in \text{Res}_0(P; M)$ si et seulement si $E \in R_h(M)$ et vérifiant les deux identités

$$\text{Re}(S(E)) = h[2n + 1]\pi - \arg W_0, \quad \text{Im}(S(E)) = -h \left(\log \frac{1}{h} + \log \frac{\pi |W_0|}{(V_1'(0) - V_2'(0)) \sqrt{E_0}} \right), \quad (6)$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par le développement en série de Taylor de $S(E)$ en E_0 , on a

$$\text{Im} E = -T^{-1} h (\log(1/h) + \mathcal{O}(1)) \quad \text{avec} \quad T = S'(E_0). \quad (7)$$

Par suite, pour tout $M > T^{-1}$, l'ensemble $\text{Res}_0(P; M)$ n'est pas vide pour h suffisamment petit.

Sous les hypothèses (A1) et (A2), il existe une "trajectoire périodique" γ de période T (voir Figure 1), c'est à dire, une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma = p_1^{-1}(E_0) \cup p_2^{-1}(E_0)$ donnée par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \exp(tH_{p_1})(0, \sqrt{E_0}) & t \in [0, t_1], \\ \exp((t - t_1)H_{p_2})(0, -\sqrt{E_0}) & t \in [t_1, T], \end{cases} \quad \gamma(t + T) = \gamma(t), \quad t_j = \left| \int_0^{x_j} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - V_j(x)}} \right|. \quad (8)$$

Alors, $S(E_0) = \int_\gamma \xi dx$ est l'aire du domaine borné par cette trajectoire γ , et $T = t_1 + t_2 = \int_\gamma \xi^{-1} dx$ est sa période.

Théorème 1. *Supposons les hypothèses (A1)–(A3). Quelle que soit $M > T^{-1}$ indépendant de h , il existe une résonance $E \in \text{Res}(P) \cap R_h(M)$ de $P(h)$ pour h suffisamment petit. Plus précisément, pour chaque $\tilde{E} \in \text{Res}_0(P; M)$, il existe une résonance $E \in \text{Res}(P) \cap R_h(M)$ telle que $|E - \tilde{E}| = o(h)$, et inversement, pour chaque $E \in \text{Res}(P) \cap R_h(M)$, il existe $\tilde{E} \in \text{Res}_0(P; M)$ telle que $|E - \tilde{E}| = o(h)$.*

Ce théorème peut se généraliser aux cas traités dans [10] avec plusieurs croisements.

3. Preuve du Théorème 1

Ici, nous allons rappeler des notions de base de l'analyse microlocale et semiclassique renvoyant le lecteur aux livres [5, 11, 14] pour plus de détails. L'opérateur h -pseudodifférentiel correspondant à un symbole $a \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R})$, noté par $a^w(x, hD)$, est défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$a^w(x, hD)u(x) := \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (9)$$

Soit $f = f(x; h) \in L^2(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_{L^2} \leq 1$. On écrit $f \sim 0$ microlocalement en $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}$ s'il existe un symbole $\chi \in \mathcal{S}(T^*\mathbb{R})$ tel que $\chi(x, \xi) \neq 0$ et $\|\chi^w(x, hD)f\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^\infty)$. On écrit $f \sim g$ si $f - g \sim 0$.

Revenons à notre opérateur $P(h)$. Pour chaque $j = 1, 2$, la trajectoire classique $p_j^{-1}(E_0)$ passe par un point tournant $(x_j, 0)$ et elles se croisent aux points $(0, \pm\sqrt{E_0})$. L'ensemble caractéristique

Γ privé de ces 4 points se compose de 8 courbes connexes (voir Figure 1), et le long de chaque courbe, l'espace des solutions microlocales de $(P(h) - E)u \sim 0$ pour $E \in R_h(M)$ est de dimension 1 engendré par une solution BKW. Sur la partie $\gamma([0, t_1/2])$, par exemple, elle est de la forme

$$w \sim e^{i\phi(x)/h} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ h\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } \phi(x) := \int_0^x \sqrt{E - V_1(t)} dt, \quad \sigma_j = (1 + \mathcal{O}(h))\sigma_{j,0}(x, E) = \mathcal{O}(1), \tag{10}$$

avec $\sigma_{1,0}(x, E) = \frac{1}{(E - V_1(x))^{1/4}}, \quad \sigma_{2,0}(x, E) = \frac{r_0(x) - ir_1(x)\sqrt{E - V_1(x)}}{(V_1(x) - V_2(x))(E - V_1(x))^{1/4}}.$

Ici, w est analytique pour $E \in R_h(M)$. De plus, on a $w = \mathcal{O}(h^{-N_1})$ pour un certain $N_1 > 0$ uniformément sur chaque compact dans $]0, x_1[$ car $|\text{Im}E| \leq Mh \log(1/h)$.

On prend deux points $\rho_a = \gamma(a), \rho_b = \gamma(b), 0 < a < b < t_1/2$ sur la courbe $\gamma([0, t_1/2])$ (voir Figure 1). On prolonge une solution microlocale u en ρ_b jusqu'en ρ_a dans les deux directions le long de γ . D'abord, on la prolonge dans la direction négative le long de $\gamma([a, b])$. Si $(P - E)u \sim 0$ microlocalement près de cette courbe et si $u \sim \alpha_b w$ en $\rho_b, u \sim \alpha_a w$ en ρ_a , alors évidemment $\alpha_a = \alpha_b$. Maintenant, on prolonge la solution dans la direction positive le long de $\gamma([b, T + a])$ en supposant que $(P - E)u \sim 0$ près de cette courbe, notant qu'on passe par deux points de croisement et deux points tournants. D'après [7, Section 5], on a le lemme suivant qui dit que la solution microlocale en ρ_a est uniquement déterminée par celle en ρ_b et donne une relation explicite au niveau principal, sous la condition que $u \sim 0$ sur les courbes entrantes $\Gamma_{\text{ent}}^1 = p_1^{-1}(E_0) \cap \{x < 0, \xi > 0\}$ et $\Gamma_{\text{ent}}^2 = p_2^{-1}(E_0) \cap \{x > 0, \xi < 0\}$, la solution microlocale en ρ_a est uniquement déterminée (voir aussi [10, Section 3.2.1]). En utilisant les trois arguments qui suivent :

- le théorème de propagation de singularités standard [14, Theorem 12.5], valide aussi dans le cas des systèmes,
- la théorie de Maslov le long des trajectoires hamiltoniennes du type principale [7, Lemma 6.1], qui permet de définir la solution près des points tournants,
- l'étude microlocale des solutions au voisinage des points de croisements [7, Propositions 5.7 and 5.9], qui permet d'étendre la solution à travers ses points,

nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 2 (cf. [10, Section 3.2.1]). *Supposons que $u \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ avec $\|u\|_{L^2} \leq 1$ vérifie $(P(h) - E)u \sim 0$ microlocalement dans un voisinage de $\gamma([b, T + a])$ et $u \sim 0$ le long de $\Gamma_{\text{ent}}^1 \cup \Gamma_{\text{ent}}^2$. Si $u \sim \alpha_b w$ microlocalement en ρ_b , alors $u \sim \alpha_a w$ microlocalement en ρ_a , où α_a est donné par*

$$\alpha_a = C(E, h)\alpha_b \quad \text{avec } C(E, h) = C_0(E, h)(1 + \mathcal{O}(h \log(1/h))). \tag{11}$$

La formule (4) et l'estimation (11) de l'erreur impliquent que les racines de $C(E; h) = 1$ sont à l'ordre $h^2 \log(1/h)$ approchées par celles de $C_0(E; h) = 1$. En effet, nous avons l'estimation suivante :

$$|C_0(E; h) - 1| = |(E - E_1)C'_0(E_1; h) + \mathcal{O}(h^{-2}(E - E_1)^2)| \gtrsim h^{-1}|E - E_1|,$$

pour $E_1 \in \text{Res}_0(P; M)$ et $E \in R_h(M)$ avec $|E - E_1| = o(h)$, et le théorème de Rouché nous permet de conclure.

Pour la démonstration de Théorème 1 on applique la méthode microlocale établie dans [1] pour les résonances créées par des trajectoires homoclines et hétéroclines d'un opérateur de Schrödinger scalaire multidimensionnel. Les arguments de [1] restent valable tant que $\theta = \mathcal{O}(h \log(1/h))$, et donc s'appliquent à notre problème.

On écrit $B(z; r) = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta - z| < r\}$ ($z \in \mathbb{C}, r > 0$).

Proposition 3. *Quelles que soient $M, \varepsilon > 0$, il n'existe pas de résonance de P dans le domaine*

$$R_h^\varepsilon(M) := R_h(M) \setminus (\text{Res}_0(P; M) + B(0, \varepsilon h)), \tag{12}$$

pour $h > 0$ assez petit. Plus précisément, il existe un nombre $N > 0$ tel que

$$\|(P_\theta - E)^{-1}\| = \mathcal{O}(h^{-N}), \tag{13}$$

uniformément pour $E \in R_h^\varepsilon(M)$. Ici, $\|\cdot\|$ est la norme des opérateurs bornés définis sur $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$.

Démonstration. On démontre cette proposition par l'absurde. Supposons que l'estimation (13) ne soit pas vraie. Alors, il existerait une suite de h , E et u telle que h tend vers 0, $E \in R_h^\varepsilon$ et $u \in H^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ avec $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)} = 1$ et

$$\|(P_\theta - E)u\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)} = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{14}$$

La condition (14) implique que $u \sim 0$ sur les courbes entrantes $\Gamma_{\text{ent}}^1 \cup \Gamma_{\text{ent}}^2$. Donc si on montre que $u \sim 0$ microlocalement près de l'ensemble capté $\gamma([0, T])$, alors on en déduirait $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)} = \mathcal{O}(h^\infty)$ par le même argument que [1, Section 8], d'où la contradiction.

Soient α_a, α_b tels que $u \sim \alpha_a w$ microlocalement en ρ_a et $u \sim \alpha_b w$ microlocalement en ρ_b . Puisque $(P - E)u \sim 0$ le long de γ , Lemme 2 implique $(1 - C(E; h))\alpha_b = \mathcal{O}(h^\infty)$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $c(\varepsilon) > 0$ indépendant de h tel que $|1 - C(E; h)| \geq c(\varepsilon)$ uniformément pour $E \in R_h^\varepsilon(M)$. Cela implique que $\alpha_b = \mathcal{O}(h^\infty)$, et par conséquent, $u \sim 0$ microlocalement en ρ_b . Encore une fois par le théorème de propagation des singularités le long de γ , on en déduit que $u \sim 0$ microlocalement près de l'ensemble capté. \square

Proposition 4. Pour tout $M > T^{-1}$, $\varepsilon > 0$ et $\tilde{E} \in \text{Res}_0(P; M)$, il existe au moins une résonance dans $B(\tilde{E}, \varepsilon h)$ pour h suffisamment petit.

Démonstration. Soit $\tilde{E} \in \text{Res}_0(P; M)$. Prenons $\delta > 0$ petit et des troncatures $\chi, \psi \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R})$ supportées dans un voisinage de $\gamma([0, t_1/2])$ vérifiant

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \quad \text{sur } \gamma([a - 2\delta, a + \delta]), \quad \text{supp } \chi \cap \gamma([0, t_1/2]) \subset \gamma([0, b - \delta]), \\ \psi &= 1 \quad \text{sur } \text{supp}(\nabla \chi) \cap \gamma([0, a - 2\delta]), \quad \text{supp } \psi \cap \gamma([0, t_1/2]) \subset \gamma([0, a - \delta]). \end{aligned}$$

On définit la fonction test v par $v := \psi^w [P, \chi^w] w$, et $u(x, h; E) := (P_\theta - E)^{-1} v$ pour $E \in \partial B(\tilde{E}, \varepsilon h)$. D'après (10), w est analytique et $\mathcal{O}(h^{-N_1})$ pour $E \in B(\tilde{E}, \varepsilon h)$, donc v l'est aussi. L'estimation (13) montre que u est bien définie et $\|u\|_{L^2} \lesssim h^{-(N+N_1)}$ uniformément sur $\partial B(\tilde{E}, \varepsilon h)$. Posons $u_{\text{test}} := \chi^w w$. Alors il vérifie $(P - E)u_{\text{test}} \sim v$ le long de $\gamma([b, T + a])$, $u_{\text{test}} \sim 0$ en ρ_b et $u_{\text{test}} \sim w$ en ρ_a . En effet, on a $[P, \chi^w] \sim 0$ en dehors du $\text{supp}(\nabla \chi)$ et

$$(P - E)u_{\text{test}} = (P - E)\chi^w w \sim \psi^w [P, \chi^w] w = v \quad \text{microlocalement près de } \gamma([b, T + a]).$$

Par contre, $u_{\text{hom}} := u - u_{\text{test}}$ vérifie $(P - E)u_{\text{hom}} \sim 0$ le long de $\gamma([b, T + a])$. D'après Lemme 2, on a $\alpha_a = C\alpha_b$, où α_a, α_b sont les constantes telles que $u_{\text{hom}} \sim \alpha_b w$ en ρ_b et $u_{\text{hom}} \sim \alpha_a w$ en ρ_a . Comme $v \sim 0$ microlocalement près de $\gamma([a, b])$, u est une solution de l'équation homogène. Donc on a $u = u_{\text{hom}} + u_{\text{test}} \sim C\alpha_b w + w \sim Cu + w$ microlocalement en ρ_b , c'est à dire,

$$u \sim (1 - C)^{-1} w \quad \text{microlocalement en } \rho_b. \tag{15}$$

Comme il existe une unique racine simple \tilde{E}_0 de $C(E; h) = 1$ dans $B(\tilde{E}, \varepsilon h)$, la valeur

$$\oint_{\partial B(\tilde{E}, \varepsilon h)} \frac{w(x, h; E)}{1 - C(E; h)} dE = -2\pi i \frac{w(x, h; \tilde{E}_0)}{C'(\tilde{E}_0; h)} \tag{16}$$

ne s'annule pas. Ici, on utilise que $C'(E_0; h)$ est non nulle pour h suffisamment petit. Par contre, s'il n'existait pas de résonance, un pôle de $(P_\theta - E)^{-1}$, dans $B(\tilde{E}, \varepsilon h)$, on aurait aussi

$$\oint_{\partial B(\tilde{E}, \varepsilon h)} u(x, h; E) dE = \oint_{\partial B(\tilde{E}, \varepsilon h)} (P_\theta - E)^{-1} v(x, h; E) dE = 0. \tag{17}$$

Les égalités (16) et (17) sont contradictoires avec l'égalité (15). Par conséquent, il doit y avoir au moins une résonance dans la boule $B(\tilde{E}, \varepsilon h)$. \square

Références

- [1] J.-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond, M. Zerzeri, *Resonances for homoclinic trapped sets*, Astérisque, vol. 405, Société Mathématique de France, 2018.
- [2] P. Briet, J.-M. Combes, P. Duclos, « On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit I. Resonances free domains », *J. Math. Anal. Appl.* **126** (1987), n° 1, p. 90-99.
- [3] ———, « On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II. Barrier Top Resonances », *Commun. Partial Differ. Equations* **12** (1987), n° 2, p. 201-222, erratum in *ibid.* **13** (1988), no. 3, p. 377-381.
- [4] N. Burq, « Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries », *Int. Math. Res. Not.* **2002** (2002), n° 5, p. 221-241.
- [5] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, n° 268, Cambridge University Press, 1999.
- [6] S. Dyatlov, M. Zworski, *Mathematical theory of scattering resonances*, vol. 200, American Mathematical Society, 2019.
- [7] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe, « Widths of resonances above an energy-level crossing », *J. Funct. Anal.* **280** (2021), n° 6, article no. 108918.
- [8] C. Gérard, J. Sjöstrand, « Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type », *Commun. Math. Phys.* **108** (1987), n° 3, p. 391-421.
- [9] B. Helffer, J. Sjöstrand, « Résonances en limite semi-classique », *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.* **24-25** (1986), p. 1-228.
- [10] K. Higuchi, « Resonance free domain for a system of Schrödinger operators with energy-level crossings », *Rev. Math. Phys.* **33** (2021), n° 3, article no. 2150007.
- [11] A. Martinez, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, vol. 994, Springer, 2002.
- [12] ———, « Resonance free domains for non globally analytic potentials », *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), n° 4, p. 739-756.
- [13] J. Sjöstrand, « Semiclassical resonances generated by non-degenerate critical points », in *Pseudo-differential operators*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1256, Springer, 1987, p. 402-429.
- [14] M. Zworski, *Semiclassical analysis*, vol. 138, American Mathematical Society, 2012.