



INSTITUT DE FRANCE  
Académie des sciences

# *Comptes Rendus*

---

## *Mathématique*


Quentin Gendron

**Les strates ne possèdent pas de variétés complètes**

Volume 358, issue 2 (2020), p. 197-200.

<<https://doi.org/10.5802/crmath.34>>

© Académie des sciences, Paris and the authors, 2020.  
*Some rights reserved.*

 This article is licensed under the  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Mathématique* sont membres du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte  
[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)



---

Géométrie, Topologie / *Geometry, Topology*

# Les strates ne possèdent pas de variétés complètes

*The strata do not contain complete varieties*

Quentin Gendron<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Centro de Ciencias Matemáticas-UNAM, Antigua Car. a Pátzcuaro 8701, Col. Ex Hacienda San José de la Huerta, Morelia, Mich., México.

Courriel: [gendron@matmor.unam.mx](mailto:gendron@matmor.unam.mx).

**Résumé.** Cette note donne une preuve élémentaire que les strates des différentiels abéliens ne contiennent pas de variétés algébriques complètes.

**Abstract.** This note gives an elementary proof that the strata of abelian differentials do not contain complete algebraic varieties.

*Manuscrit reçu le 12 février 2020, révisé et accepté le 4 mars 2020.*

## 1. Introduction.

L'existence de variétés algébriques complètes dans les espaces des modules est un sujet qui a attiré l'attention des géomètres depuis longtemps. En particulier dans l'espace des modules de courbes complexes, Diaz [4] a montré que les variétés complètes de  $\mathcal{M}_g$  sont de dimensions inférieures ou égales à  $g - 2$ . Construire ces variétés est un problème difficile et encore très largement non résolu, mais on pourra par exemple consulter [5] pour une construction explicite de courbes complètes dans  $\mathcal{M}_g$  pour  $g \geq 3$ .

Ce problème est encore peu exploré dans le cas des strates de différentielles abéliennes. Chen a montré dans [3] qu'il n'existe pas de variétés complètes dans les strates de différentielles abéliennes méromorphes. Récemment Hamenstädt [6] a affirmé avoir résolu cette question dans le cas holomorphe en montrant que les strates sont affines. Toutefois, il me semble intéressant de donner une preuve élémentaire complètement différente de la non existence de variétés complètes dans les strates en attendant la publication des résultats de Hamenstädt.

Le résultat principal de cette note est le suivant.

**Théorème 1.** *Il n'existe aucune variété algébrique complète dans les strates de différentielles abéliennes.*

On étend immédiatement ce résultat aux strates de  $k$ -différentielles pour tout  $k \geq 2$  via les revêtements canoniques (voir [2, section 2.1] ou [3, section 4.6]).

**Corollaire 2.** *Il n'existe aucune variété algébrique complète dans les strates de  $k$ -différentielles.*

**Remarques.** Le résultat principal nous assure qu'il n'existe pas de variété complète dans les strates  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . Toutefois il pourrait exister des courbes complètes dans la projectivisation des strates  $\mathbb{P}\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . En effet, il y a trois types de fibre singulières possibles : la surface de Riemann sous-jacente peut dégénérer, des singularités de la différentielle peuvent se rencontrer et l'aire de la différentielle peut converger vers 0 ou vers l'infini. S'il existait une courbe génériquement dans  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$  telle que toutes les singularités sont du troisième type (et distinct d'une famille obtenue en multipliant une différentielle constante par une fonction), alors son image dans  $\mathbb{P}\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$  formerait une courbe complète. Plus généralement, il serait intéressant de connaître le nombre minimal et le type des singularités qui apparaissent dans ces courbes.

**Organisation.** La preuve du théorème 1 est présentée dans la section 3. Celle-ci est élémentaire et ne suppose que la base de la théorie des différentielles abéliennes que nous rappelons succinctement dans la section 2.

**Remerciements.** Je voudrais remercier Ferrán Valdez, Dawei Chen et Scott Mullane pour des discussions intéressantes en rapport avec cet article ainsi que le rapporteur anonyme dont les remarques m'ont permis de peaufiner ce texte.

## 2. Rappels

Dans cette courte section nous donnons quelques rappels sur les différentielles abéliennes. Nous nous bornerons au cas holomorphe, le cas méromorphe étant similaire. Ces rappels devraient permettre de suivre l'argument sans se référer à des articles spécialisés. Toutefois, pour apprendre d'avantage sur ce sujet fascinant et ces nombreuses connections, les récents articles de survol [7] et [8] sont très recommandables.

Une *différentielle abélienne* est une paire  $(X, \omega)$  où  $X$  est une surface de Riemann et  $\omega$  est une section non nulle du fibré cotangent de  $X$ . En tout point de  $X$  il existe une coordonnée locale  $z$  telle que  $\omega = f(z)dz$  avec  $f$  une fonction holomorphe. La différentielle  $\omega$  induit une métrique plate sur la surface  $X$ . Les géodésiques de cette métrique qui débutent et terminent en un zéro de  $\omega$  se nomment *lien selles*. Notons qu'un lien selle peut relier deux zéros distincts ou le même zéro.

Le théorème de Riemann–Roch implique qu'une différentielle  $\omega$  possède  $2g - 2$  zéros comptés avec multiplicité. Étant donnée une partition  $\mu = (m_1, \dots, m_n)$  de  $2g - 2$ , on définit donc l'espace des modules des différentielles abéliennes dont les ordres des zéros sont égaux à  $m_1, \dots, m_n$ . Cet espace des modules se nomme *strate* de différentielles abéliennes de type  $\mu$  et se note  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . Ces strates sont des variétés orbifoldes complexes de dimension  $2g - 1 + n$ . Enfin le groupe  $\mathbb{C}^*$  agit sur les strates  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$  en multipliant la différentielle. Le quotient des strates par cette action est noté  $\mathbb{P}\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ .

Pour finir nous introduisons la notion de familles de différentielles abéliennes. Cette notion est discutée en détail au chapitre X.2 de [1]. Une famille de surfaces de Riemann de genre  $g$  sur une variété complexe  $V$  est un morphisme lisse  $\pi: X \rightarrow V$  dont les fibres sont des surfaces de Riemann connexes de genre  $g$ . Une famille de différentielle est alors une section du fibré tangent relatif  $\omega_{X/V}$ . Le point clef de cette notion est le fait que la famille de surfaces de Riemann et la section sont analytiques.

### 3. Preuve du théorème 1

Nous commençons par fixer une strate de différentielles abéliennes holomorphes ou méromorphes  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . Il est clair qu'il suffit de montrer qu'il n'existe pas de courbes complètes dans  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . On fixe une courbe algébrique complète  $C$  et on considère une famille  $\pi: X \rightarrow C$  de courbes lisses munie d'une section  $\omega$  du fibré dualisant relatif  $\omega_{X/C}$  telle que pour tout  $p \in C$  la paire  $(X_p, \omega_p)$  appartient à la strate  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . Nous allons montrer que l'application induite

$$\varphi: C \rightarrow \Omega\mathcal{M}_g(\mu) : p \mapsto (X_p, \omega_p)$$

est constante, ce qui implique le théorème 1.

Soit  $\mathcal{V}(p)$  l'ensemble des liens selles de  $\omega_p$  sur  $X_p$ . Nous considérons la fonction

$$\ell_0: C \rightarrow \mathbb{R}_+ : p \mapsto \min_{v \in \mathcal{V}(p)} \{|v|\},$$

où  $|\cdot|$  désigne la longueur pour la métrique plate sur  $X_p$  naturellement associée à la différentielle  $\omega_p$ . Donc la fonction  $\ell_0$  décrit le minimum des longueurs des liens selles de la différentielle  $\omega_p$ . Notons que ce minimum existe car l'ensemble des longueurs des liens selles d'une différentielle abélienne est discret. De plus la fonction  $\ell_0$  est continue et bornée inférieurement (par 0). Comme  $C$  est complète, elle est compacte pour la topologie analytique, ce qui implique que  $\ell_0$  possède un minimum. Comme la famille est contenue dans la strate  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ , ce minimum est strictement positif. On choisit un point  $p_0 \in C$  et un lien selle  $v_0 \in \mathcal{V}(p_0)$  tels que la longueur  $|v_0|$  est minimale. Nous notons par  $q_0$  le point initial de  $v_0$  et par  $q_1$  le point final de ce lien selle. Notons qu'il est possible que les points  $q_0$  et  $q_1$  coïncident.

Nous allons considérer un disque arbitrairement petit  $\Delta \subset C$  qui contient le point  $p_0$ . Pour ne pas alourdir les notations, nous continuons de noter  $\pi: X \rightarrow \Delta$  et  $\omega$  les restrictions à  $\Delta$  de la famille de courbes et de la famille de différentielles respectivement. Notons  $q_i: \Delta \rightarrow X$  les sections qui sont constituées de singularités de  $\omega$  qui contiennent les points  $q_i$ . Notons que ces sections coïncident dans le cas où  $q_0 = q_1$ . De plus, comme la famille de courbes  $X$  et de différentielles  $\omega$  sont analytiques, les sections  $q_i$  sont analytiques.

Maintenant, quitte à rétrécir le disque  $\Delta$ , il existe une unique famille continue de chemins  $\gamma: \Delta \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que :

- (1)  $\gamma(p_0, \cdot) = v_0$ ,
- (2)  $\gamma(p, \cdot)$  est un lien selle de  $\omega_p$  entre  $q_0(p)$  et  $q_1(p)$ .

Notons  $\gamma_p: [0, 1] \rightarrow X_p$  le chemin  $\gamma(p, \cdot)$  et considérons la fonction

$$\mathfrak{v}: \Delta \rightarrow \mathbb{C} : p \mapsto \int_{\gamma_p} \omega_p.$$

Comme les sections  $q_i$  et la famille de différentielles  $\omega$  sont analytiques cela implique que la fonction  $\mathfrak{v}$  est holomorphe. De plus par hypothèse  $|\mathfrak{v}|$  possède un minimum strictement positif en  $p_0$ . Le principe du maximum implique que  $\mathfrak{v}$  est constante. La famille  $\gamma$  s'étend donc en une famille  $\gamma: C \times [0, 1] \rightarrow X$  de liens selles constants sur  $C$ .

On peut alors considérer pour tout  $p \in C$  l'ensemble  $\mathcal{V}_0(p) = \{\gamma_p : p \in C\} \subset \mathcal{V}(p)$  des liens selles obtenus en déformant  $v_0$ . Nous considérons alors la fonction

$$\ell_1: C \rightarrow \mathbb{R}_+ : p \mapsto \min_{v \in \mathcal{V}(p) \setminus \mathcal{V}_0(p)} \{|v|\}.$$

Nous allons maintenant justifier que cette fonction possède un minimum. Si elle ne possédait pas de minimum, cela impliquerait qu'il existe une suite de liens selles qui convergent vers un lien selle de  $\mathcal{V}_0(p)$ . Toutefois cela impliquerait que deux liens selles non homologues convergent l'un vers l'autre. La différentielle ainsi obtenue serait donc dégénérée, ce qui contredit le fait que la famille appartient à la strate  $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ . Donc il existe un lien selle  $v_1$  de longueur minimale

dans l'ensemble  $\mathcal{V}_0(p)$  pour un  $p \in C$ . L'argument précédent permet de montrer que le lien selle  $\nu_1$  appartient à une famille de liens selles constants.

En répétant cet argument, cela implique que tous les liens selles de la famille  $\omega$  sont constants. Donc la famille de différentielles est constante et la fonction  $\varphi$  est également constante.

## Références

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, *Geometry of algebraic curves. Volume II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 268, Springer, 2011.
- [2] M. Bainbridge, D. Chen, Q. Gendron, S. Grushevsky, M. Möller, « Strata of  $k$ -differentials », *Algebr. Geom.* **6** (2019), n° 2, p. 196-233.
- [3] D. Chen, « Affine geometry of strata of differentials », *J. Inst. Math. Jussieu* **18** (2019), n° 6, p. 1331-1340.
- [4] S. Diaz, « A bound on the dimensions of complete subvarieties of  $\mathcal{M}_g$  », *Duke Math. J.* **51** (1984), p. 405-408.
- [5] G. González Díez, W. Harvey, « On complete curves in moduli space. I. II. », *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **110** (1991), n° 3, p. 461-472.
- [6] U. Hamenstaedt, « On the cohomology of strata of abelian differentials », <https://arxiv.org/abs/2001.03227>, 2020.
- [7] M. Möller, « Teichmüller curves, mainly from the viewpoint of algebraic geometry », in *Moduli spaces of Riemann surfaces*, IAS/Park City Mathematics Series, vol. 20, American Mathematical Society; Institute for Advanced Study, 2013, p. 267-318.
- [8] A. Wright, « Translation surfaces and their orbit closures : an introduction for a broad audience », *EMS Surv. Math. Sci.* **2** (2015), n° 1, p. 63-108.