INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Erwann Delay

Une machine à tenseurs TT sur les variétés d'Einstein

Volume 361 (2023), p. 495-506

Published online: 1 February 2023

https://doi.org/10.5802/crmath.404

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569

Comptes Rendus
Mathématique
2023, Vol. 361, p. 495-506
https://doi.org/10.5802/crmath.404

Équations aux dérivées partielles, Physique mathématique / *Partial differential equations, Mathematical physics*

Une machine à tenseurs TT sur les variétés d'Einstein

Erwann Delay [a, b]

[a] Avignon Université, Laboratoire de mathématiques d'Avignon, 84916 Avignon
[b] Aix Marseille Université, F.R.U.M.A.M.- CNRS, 13331 Marseille, France
Courriel : erwann.delay@univ-avignon.fr

Résumé. En toutes dimensions $n \geq 3$, on introduit un opérateur différentiel d'ordre 4 qui, sur les variétés d'Einstein, transforme les (champs de) deux tenseurs symétriques de trace nulle en tenseurs TT. Une large classe de tenseurs TT est obtenue ainsi, la restriction de notre opérateur à ces tenseurs étant la composée de deux Laplaciens de Lichnerowicz translatés.

Abstract. In all dimensions $n \geq 3$, we introduce a differential operator of order 4 which, on Einstein manifolds, transforms the (fields of) trace free symmetric two tensors into TT-tensors. A large class of TT-tensors are obtained in this way, the restriction of our operator to these tensors being the composition of two shifted Lichnerowicz Laplacians.

Classification Mathématique (2020). 35P15, 58J50, 47A53.

Financement. Article financé en partie par l'agence nationale de la recherche ANR-17-CE40-0034 (projet CCEM).

Manuscrit reçu le 6 décembre 2021, révisé le 13 juin 2022 et le 29 juin 2022, accepté le 29 juin 2022.

1. Introduction

En géométrie Riemannienne, comme en relativité générale, les champs de tenseurs symétriques de trace nulle et à divergence nulle, dit tenseurs TT (transverse traceless tensors), sont d'une importance fondamentale puisqu'ils correspondent aux variations de métriques qui sont transverses aux directions conformes ou par difféomorphisme. Les tenseurs TT apparaissent aussi dans la méthode conforme de construction de données initiales relativistes. Il est donc naturel de s'intéresser à leur existence et si possible d'en construire explicitement. Une construction simple sera particulièrement utile pour tester numériquement des problèmes de stabilité de métriques d'Einstein Riemanniennes mais aussi pour la relativité numérique.

En dimension trois, Robert Beig a étudié cette question sur les variétés conformément plates [1], il exhibe un opérateur différentiel d'ordre 3 transformant les tenseurs sans trace en tenseurs TT. Si de surcroît la variété est simplement connexe à seconde cohomologie de De Rham triviale, tous les tenseurs TT peuvent être obtenus ainsi (voir aussi [2] pour d'autres espaces à courbure constante). De même, toujours en dimension trois, des constructions de tenseurs TT à support compact sont données dans [6] en utilisant la dualité de Hodge et dans [8] grâce aux harmoniques sphériques.

En dimensions supérieures paires, les adjoints des linéarisés des tenseurs de Bach ou d'Obstruction, pris en une métrique d'Einstein, auront la même propriété de transformation des tenseurs sans trace en tenseurs TT, mais leur ordre sera égal à la dimension, ce qui rend difficile les calculs en grandes dimensions.

Dans [11], Romain Gicquaud prouve l'existence de tenseurs TT lisses (à support compact) sur l'espace Euclidien en toutes dimensions $n \geq 3$. Inspiré par la transposition du problème via la transformée de Fourier, il met en évidence un opérateur d'ordre 4 transformant les tenseurs symétriques sans trace sur $\mathbb{R}^n$, en tenseurs TT.

Il a aussi été prouvé dans [9] que sur tout ouvert de toute variété riemannienne lisse, l'espace des tenseurs TT lisses à support compact est de dimension infinie, étendant ainsi un résultat de [5]. La preuve est complètement différente, et la construction utilisée purement théorique est difficile à mettre en oeuvre pour une construction explicite.

Le but de cette note est de donner, grâce à un opérateur linéaire d'ordre 4, une machinerie simple pour construire, en toutes dimensions, une large classe de tenseurs TT sur les variétés d'Einstein. La propriété TT étant covariante conforme, on en déduit facilement une construction pour toute métrique conformément Einstein.

Afin de décrire notre résultat, quelques définitions s'imposent. Tout d'abord, Δ_L désignera le Laplacien de Lichnerowicz, $\mathring{\mathscr{L}}$ l'opérateur de Killing conforme, div la divergence sur les 2-tenseurs, enfin d et d^* la différentielle extérieure et la divergence sur les formes différentielles (les définitions précises des opérateurs sont données en section 2, notamment les normalisations et conventions de signe). Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1. *Sur une variété riemannienne lisse (M,g) de dimension $n \geq 3$ et d'Einstein où $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$, l'opérateur autoadjoint*

$$P = (\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right) - \mathring{\mathscr{L}}\left(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \frac{n}{2(n-1)}\mathrm{d}\mathrm{d}^* - \frac{n}{n-1}\lambda\right)\mathrm{div}$$

envoie tout tenseur symétrique de trace nulle sur un tenseur TT. On a ainsi

$$\mathrm{Tr}\, P = 0, \quad \mathrm{div}\, P = 0 \quad \text{et} \quad P\,\mathring{\mathscr{L}} = 0.$$

De plus, si M est compacte sans bord, l'image de P est de codimension finie, dans le sens où dans C^∞ :[1]

$$\mathrm{Im}\, P = \left(\ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} + \ker\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT}\right)^{\perp},$$

l'orthogonal L^2 étant pris dans $TT := \ker \mathrm{Tr} \cap \ker \mathrm{div}$.

Nous verrons que notre opérateur P est en fait la composée de l'adjoint du linéarisé du tenseur de Schouten avec l'adjoint de la linéarisation du tenseur de Ricci sans trace (agissant sur les tenseurs de trace nulle) :

$$P = 4\,D\,\mathrm{Sch}(g)^*\,D\mathring{\mathrm{Ric}}(g)^*.$$

Une variété d'Einstein est dite stable (resp. strictement stable) si l'opérateur $\Delta_L - 2\lambda$ est positif (resp. strictement positif), au sens L^2 sur les tenseurs TT. Cette stabilité sur les variétés compactes sans bord a été étudiée par de nombreux auteurs, en commençant par [13] (voir [7] pour un résultat plus récent ou [14] pour un survey). Il semble qu'il n'y ait aucun exemple d'instabilité si $\lambda \leq 0$ (ce n'est pas le cas si la variété est non compacte ou si λ est strictement positif). Comme sur de telles variétés, tout tenseur TT propre de Δ_L, pour une valeur propre différente de 2λ et

[1] La somme étant L^2-orthogonale si $\lambda \neq 0$.

$\frac{n}{n-1}\lambda$ est clairement dans l'image de P par orthogonalité L^2, le test de stabilité peut ainsi se faire en premier lieu sur des tenseurs TT construits via P.

Au cours de cette note on présentera aussi un opérateur bien connu d'ordre deux, permettant de construire une grande partie des tenseurs symétriques à divergence nulle à partir de tenseurs symétriques. Ces tenseurs ayant aussi leur importance, comme pour la contrainte hamiltonienne des données initiales relativistes.

Remerciements

Je remercie le rapporteur pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

2. Définitions, notations et conventions

Nous décrivons ici certains objets utilisés dans cette note. Tout d'abord, (M,g) désignera une variété riemannienne, et ∇ sa connexion de Levi-Civita.

On notera $\mathcal{T}_r^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang r et contravariants de rang q. Si $q=0$, on notera $\mathcal{S}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques et $\mathring{\mathcal{S}}_r$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques de trace nulle (relativement à g). On appliquera la convention de sommation, en utilisant g_{ij} et son inverse g^{ij} afin d'abaisser ou de remonter les indices.

L^2 est l'espace de Hilbert usuel de fonctions ou tenseurs muni du produit (resp. norme)

$$\langle u,v\rangle_{L^2}=\int_M\langle u,v\rangle_g \mathrm{d}V_g \qquad \left(\text{resp. } |u|_{L^2}=\left(\int_M |u|_g^2\mathrm{d}V_g\right)^{\frac12}\right),$$

où $\langle u,v\rangle_g$ (resp. $|u|_g$) est le produit usuel (resp. norme) de fonctions ou tenseurs relatif à g, et la mesure $\mathrm{d}V_g$ celle induite par g.

On note d la différentielle extérieure agissant sur les formes différentielles, d^* son adjoint formel (pour $L^2(\mathrm{d}V_g)$). Le Laplacien sur les fonctions est défini par

$$\Delta=\nabla^*\nabla=-\operatorname{Tr}\nabla^2=\mathrm{d}^*\mathrm{d},$$

où ∇^* est l'adjoint formel de ∇. Pour les 1-formes on notera de plus

$$\Delta_H=\mathrm{d}^*\mathrm{d}+\mathrm{d}\mathrm{d}^*=\nabla^*\nabla+\operatorname{Ric}(g), \tag{1}$$

le Laplacien de Hodge correspondant (la deuxième égalité étant une identité de Weitzenböck classique sur les 1-formes).

La divergence d'un 2-tenseur symétrique est donnée par :

$$(\operatorname{div} h)_i=-\nabla^j h_{ij}$$

On considère aussi pour $\alpha\in\mathbb{R}$ la famille d'opérateurs suivants :

$$({}^\alpha\mathcal{L}X)_{ij}=\nabla_i X_j+\nabla_j X_i-\alpha\nabla^k X_k g_{ij}\,,\quad {}^\alpha\mathcal{L}^*=2\operatorname{div}+\alpha\mathrm{d}\operatorname{Tr}.$$

Pour $\alpha=0$, on reconnaît l'opérateur de Killing

$$(\mathcal{L}X)_{ij}=\nabla_i X_j+\nabla_j X_i\,,\quad \mathcal{L}^*=2\operatorname{div},$$

On peut ainsi écrire

$${}^\alpha\mathcal{L}=\mathcal{L}+\alpha\mathrm{d}^*(\cdot)g.$$

Si $\alpha=\frac{2}{n}$, l'opérateur de Ahlfors ou de Killing conforme apparaît :

$$\mathring{\mathcal{L}}=\mathcal{L}+\frac{2}{n}\mathrm{d}^*(\cdot)g={}^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}\,,\quad \mathring{\mathcal{L}}^*=2\operatorname{div}+\frac{2}{n}\mathrm{d}\operatorname{Tr},$$

ce dernier donnant lieu au Laplacien dit vectoriel (en utilisant l'identité de Weitzenböck (1)) :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathring{\mathscr{L}} &= \nabla^*\nabla - \operatorname{Ric}(g) + \frac{n-2}{n}\mathrm{dd}^* \\ &= \Delta_{\mathrm{H}} - 2\operatorname{Ric}(g) + \frac{n-2}{n}\mathrm{dd}^* \\ &= \mathrm{d}^*\mathrm{d} + 2\frac{n-1}{n}\mathrm{dd}^* - 2\operatorname{Ric}(g).\end{aligned} \tag{2}$$

L'opérateur de Bianchi et son adjoint ressortiront aussi ($\alpha = 1$) :

$$\mathscr{B} = 2\operatorname{div} + d\operatorname{Tr}$$
$$\mathscr{B}^* = \mathscr{L} + \mathrm{d}^*(\cdot)g = {}^1\mathscr{L}.$$

Le Laplacien de Lichnerowicz est défini en coordonnées locales par

$$\Delta_L h_{ij} = -\nabla^k\nabla_k h_{ij} + R_{ik}h^k_j + R_{jk}h^k_j - 2R_{ikjl}h^{kl},$$

où R_{ij} est la courbure de Ricci de g et R_{ijkl} sa courbure de Riemann. On rappelle que la linéarisation des opérateurs de Ricci et de courbure scalaire sont (voir [4] par exemple) :

$$D\operatorname{Ric}(g) = \frac{1}{2}\Delta_L - \frac{1}{4}\mathscr{L}\mathscr{B},$$
$$D\mathrm{R}(g) = \mathrm{d}^*\operatorname{div} + \Delta\operatorname{Tr} - \langle\operatorname{Ric}(g),\cdot\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{d}^*({}^2\mathscr{L})^* - \langle\operatorname{Ric}(g),\cdot\rangle.$$

Ainsi si l'on pose pour $\kappa, \Lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

alors

$$D\operatorname{Ein}(g)h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{4}\mathscr{L}\mathscr{B}\,h + \kappa(\mathrm{d}^*\operatorname{div}h + \Delta\operatorname{Tr}h - \langle\operatorname{Ric}(g),h\rangle)g + (\kappa R(g) + \Lambda)h.$$

Si $\operatorname{Ric}(g) = \lambda g$, ce dernier vaut alors

$$D\operatorname{Ein}(g)h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{4}\mathscr{L}\mathscr{B}\,h + \kappa(\mathrm{d}^*\operatorname{div}h + \Delta\operatorname{Tr}h - \lambda\operatorname{Tr}h)g + (\Lambda + \kappa n\lambda)h.$$

Les adjoints respectifs étant

$$D\operatorname{Ric}(g)^* = \frac{1}{2}(\Delta_L - \mathscr{B}^*\operatorname{div}),$$
$$D\mathrm{R}(g)^* = \nabla\nabla + \Delta(\cdot)g - \operatorname{Ric}(g) = \frac{1}{2}{}^2\mathscr{L}\,d - \operatorname{Ric}(g),$$

et

$$D\operatorname{Ein}(g)^*h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathscr{B}^*\operatorname{div}h + \kappa(\nabla\nabla\operatorname{Tr}h + \Delta\operatorname{Tr}hg - \operatorname{Tr}h\operatorname{Ric}(g)) + (\kappa R(g) + \Lambda)h.$$

Si $\operatorname{Ric}(g) = \lambda g$, on a ainsi

$$D\operatorname{Ein}(g)^*h = \frac{1}{2}\Delta_L h - \frac{1}{2}\mathscr{B}^*\operatorname{div}h + \kappa(\nabla\nabla\operatorname{Tr}h + \Delta\operatorname{Tr}h - \lambda\operatorname{Tr}h)g + (\Lambda + \kappa n\lambda)h,$$

et on peut réécrire

$$D\mathrm{R}(g)^* = \operatorname{Oba}(g) - [\operatorname{Tr}\operatorname{Oba}(g)(\cdot)]g \quad \text{avec } \operatorname{Oba}(g) = \nabla\nabla + \frac{\lambda}{n-1}(\cdot)g.$$

Deux tenseurs particuliers ressortiront, correspondants respectivement à $(\kappa,\Lambda) = (-\frac{1}{n},0)$ et $(\kappa,\Lambda) = (-\frac{1}{2(n-1)},0)$, le tenseur de Ricci sans trace

$$\mathring{\operatorname{Ric}}(g) = \operatorname{Ric}(g) - \frac{1}{n}R(g)g,$$

et le tenseur de Schouten

$$\operatorname{Sch}(g) = \operatorname{Ric}(g) - \frac{1}{2(n-1)}R(g)g.$$

3. Composition et commutation

Nous étudions ici la composition de certains opérateurs définis précédemment, notamment d'éventuelles commutations.

Lemme 2. *Pour tous réels α et β on a*

$$^{\beta}\mathscr{L}^*(^{\alpha}\mathscr{L}) = {}^{\alpha}\mathscr{L}^*(^{\beta}\mathscr{L}) = 2\left(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \left(2-\alpha-\beta+\frac{n}{2}\alpha\beta\right)\mathrm{dd}^* - 2\,\mathrm{Ric}(g)\right).$$

Démonstration. On a déjà, grâce à (1),

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(^{\alpha}\mathscr{L}) &= \nabla^*\nabla_g - \mathrm{Ric}(g) + (-\alpha+1)\mathrm{dd}^*\\ &= \Delta_{\mathrm{H}} - 2\,\mathrm{Ric}(g) + (-\alpha+1)\mathrm{dd}^*\\ &= \mathrm{d}^*\mathrm{d} + (2-\alpha)\,\mathrm{dd}^* - 2\,\mathrm{Ric}(g).\end{aligned}$$

Ensuite comme

$$\mathrm{Tr}(^{\alpha}\mathscr{L}) = (n\alpha-2)\mathrm{d}^*,$$

on en déduit

$$^{\beta}\mathscr{L}^*(^{\alpha}\mathscr{L}) = 2(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + (2-\alpha)\,\mathrm{dd}^* - 2\,\mathrm{Ric}(g)) + \beta(n\alpha-2)\mathrm{dd}^*.$$ □

Remarque 3. Pour tout α dans $\mathbb{R}$,

$$^{\alpha}\mathscr{L}^*(^{\alpha}\mathscr{L}) = 2\left(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \left(\frac{n}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\mathrm{dd}^* - 2\,\mathrm{Ric}(g)\right),$$

en particulier pour $\alpha = 0$:

$$\mathrm{div}\,\mathscr{L} = \nabla^*\nabla_g + \mathrm{dd}^* - \mathrm{Ric}(g) = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + 2\mathrm{dd}^* - 2\,\mathrm{Ric}(g).$$

Nous aurons aussi besoin de la variante suivante d'un résultat de André Lichnerowicz.

Proposition 4. *Si (M,g) est Ricci parallèle (c-à-d $\nabla\,\mathrm{Ric}(g) = 0$) alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$(^{\alpha}\mathscr{L})^*\,\Delta_L = \Delta_H\,(^{\alpha}\mathscr{L})^*, \quad (^{\alpha}\mathscr{L})\,\Delta_H = \Delta_L\,(^{\alpha}\mathscr{L}),$$

en particulier

$$\mathrm{div}\,\Delta_L = \Delta_H\,\mathrm{div}, \quad \Delta_L\mathscr{L} = \mathscr{L}\Delta_L, \quad \Delta_L\mathring{\mathscr{L}} = \mathring{\mathscr{L}}\Delta_L$$

Démonstration. Pour $\alpha = 0$, c'est un résultat bien connu de A. Lichnerowicz [15]. Ainsi par linéarité, pour la première égalité il suffit de vérifier que

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,\Delta_L = \Delta_H\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}.$$

Or cette égalité découle du fait que sur toute variété riemannienne (pas forcément Ricci parallèle) on a

$$\mathrm{Tr}\,\Delta_L = \Delta\,\mathrm{Tr} \quad \text{et} \quad \Delta_H\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\,\Delta.$$

La deuxième égalité de la proposition a simplement lieu par dualité de la première, et les autres correspondent à $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{2}{n}$. □

Rappelons la proposition classique suivante.

Proposition 5. *Si (M,g) est à courbure scalaire constante,*

$$D\mathrm{R}(g)\mathscr{L} = 0 \quad et \quad \mathrm{div}\,D\mathrm{R}(g)^* = 0.$$

Si de plus g est d'Einstein ($\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$),

$$(D\,\mathrm{Ric}(g) - \lambda)\mathscr{L} = 0 \quad et \quad \mathrm{div}(D\,\mathrm{Ric}(g)^* - \lambda) = 0.$$

Démonstration. Pour tout champ X lisse sur M, on considère le flot à un paramètre associé ϕ_t, avec $\phi_0 = \mathrm{Id}$. Si g est à courbure scalaire constante

$$D\mathrm{R}(g)\mathscr{L}_X(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R(\phi_t^* g)_{|t=0} = 0,$$

où $\mathscr{L}_X(g)$ est la dérivée de Lie de g dans la direction de X, la première égalité de la proposition est prouvée. La deuxième égalité est simplement la duale de la première. Si g est d'Einstein, on procède de même en dérivant l'équation

$$\mathrm{Ric}(\phi_t^* g) - \lambda \phi_t^* g = 0$$

□

Remarque 6. Comme utilisé dans la preuve précédente, on rappelle qu'un opérateur L linéaire à valeur dans les tenseurs symétriques vérifie $\operatorname{div} L = 0$ ssi $L^* \mathscr{L} = 0$. Par la suite nous utiliserons aussi souvent le fait que $\mathrm{Tr}\, L = 0$ ssi $\forall\ u \in C^\infty(M)$, $L^*(ug) = 0$.

Enfin rappelons le calcul bien connu suivant de transformation conforme, qui prouve que la propriété TT est covariante conforme et que l'opérateur de Schouten varie agréablement par transformation conforme (voir [4] par exemple).

Lemme 7. *Si $g' = e^f g$, pour une fonction f sur M, alors pour tout 2-tenseur symétrique h*

$$\operatorname{div}_{g'} h = e^{-\frac{n}{2} f} \operatorname{div}(e^{\frac{n-2}{2} f} h) + \frac{1}{2} e^{-f} (\mathrm{Tr}_g h) \mathrm{d}f$$

et pour toute 1−forme ω,

$$\mathring{\mathscr{L}}_{g'} \omega = e^f \mathring{\mathscr{L}}_g (e^{-f} \omega).$$

On a aussi

$$\mathrm{Sch}(g') = \mathrm{Sch}(g) - \frac{n-2}{2} \nabla\nabla f + \frac{n-2}{4} \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f - \frac{n-2}{8} |\mathrm{d}f|_g^2 g.$$

4. Tenseurs symétriques à divergence nulle

Si l'on désire simplement construire des tenseurs symétriques à divergence nulle, un opérateur naturel d'ordre deux suffit.

Proposition 8. *Sur une variété d'Einstein telle que $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$, pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, l'opérateur*

$$\mathscr{P} = \Delta_L - \mathscr{B}^* \operatorname{div} - 2\lambda + 2\kappa(\nabla\nabla + \Delta(\cdot) g - \lambda(\cdot) g) \mathrm{Tr}(\cdot) = 2(D\mathrm{Ein}(g)^*),$$

avec $\Lambda = -(1 + n\kappa)\lambda$, envoie tout tenseur symétrique sur un tenseur symétrique à divergence nulle :

$$\operatorname{div} \mathscr{P} = 0.$$

Si de plus M est compacte sans bord, on a dans C^∞, si $\kappa \neq -\frac{1}{n}$:

$$\mathrm{Im}\, \mathscr{P} = TT \cap \left(\ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}\right)^{\perp_{L^2}} \oplus \mathrm{Im}\, D\mathrm{R}(g)^*,$$

où $TT = \ker \operatorname{div} \cap \ker \mathrm{Tr}$. Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, l'image est :

$$\mathrm{Im}\, \mathscr{P} = TT \cap \left(\ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}\right)^{\perp_{L^2}} \oplus \mathrm{Im}\, D\mathrm{R}(g)^* \mathrm{d}^*.$$

Démonstration. Pour simplifier commençons par le cas où $\kappa = 0$. On peut alors utiliser la proposition 5 directement ou le calcul suivant (qui découle de la proposition 4) :

$$\operatorname{div} \mathscr{P} = \operatorname{div} \Delta_L - \operatorname{div} \mathscr{B}^* \operatorname{div} - 2\lambda \operatorname{div} = \Delta_H \operatorname{div} - (\Delta_H - 2\lambda) \operatorname{div} - 2\lambda \operatorname{div} = 0.$$

Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, d'après [3], tout tenseur symétrique lisse h se décompose en

$$h = h_{TT} + \mathring{\mathscr{L}} w + ug,$$

avec h_{TT} tenseur TT, la décomposition étant L^2-orthogonale. On a

$$\mathscr{P}h_{TT} = (\Delta_L - 2\lambda)h_{TT},$$

et comme par la proposition 4, $\Delta_L\mathscr{L} = \mathscr{L}\Delta_H$ et que $(\mathrm{d}^*)^2 = 0$ on trouve

$$\mathscr{P}\mathscr{L}w = -\mathscr{L}\mathrm{d}\mathrm{d}^*w - 2\Delta\mathrm{d}^*w\,g + 2\lambda\mathrm{d}^*w\,g = -2(\nabla\nabla\mathrm{d}^*w + \Delta\mathrm{d}^*w\,g - \lambda\mathrm{d}^*w\,g).$$

Par ailleurs pour toute fonction u, on a

$$\mathscr{P}(ug) = 2(\nabla\nabla u + \Delta u\,g - \lambda ug) = 2D\mathrm{R}(g)^*u,$$

on remarque ainsi que $\mathscr{P}\mathscr{L} = \mathscr{P}(-\mathrm{d}^*(\cdot)g)$ en particulier

$$\mathscr{P}\mathring{\mathscr{L}} = \left(\frac{2}{n} - 1\right)\mathscr{P}(\mathrm{d}^*(\cdot)g) = 2\left(\frac{2}{n} - 1\right)D\mathrm{R}(g)^*\,\mathrm{d}^*.$$

Si maintenant κ est quelconque, la courbure scalaire étant constante, on a $D\mathrm{R}(g)\mathscr{L} = 0$ on retrouve ainsi $\operatorname{div} D\mathrm{R}(g)^* = 0$. Pour toute constante $\kappa \in \mathbb{R}$, on aura donc aussi

$$\operatorname{div}(\mathscr{P}) = 0.$$

Ensuite par des calculs similaires à ceux qui précèdent on obtient

$$\mathscr{P}\mathscr{L} = -2(2\kappa + 1)D\mathrm{R}^*(g)\mathrm{d}^*,$$

et

$$\mathscr{P}(ug) = 2(1 + \kappa n)D\mathrm{R}^*(g)u,$$

il en résulte

$$\mathscr{P}^\alpha\mathscr{L} = -2(1 - \alpha + (2 - n\alpha)\kappa)D\mathrm{R}^*(g)\mathrm{d}^*,$$

en particulier

$$\mathscr{P}\mathring{\mathscr{L}} = -2(1 - \frac{2}{n})D\mathrm{R}^*(g)\mathrm{d}^*.$$

Ainsi l'image de $\mathscr{P}$ est la même pour toute valeur de $\kappa \neq -\frac{1}{n}$ (on ne produit pas d'autres tenseurs à divergence nulle par changement de κ). Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, pour toute fonction u, on trouve $\mathscr{P}(ug) = 0$, et l'image de notre opérateur devient celle annoncée. Il reste à vérifier que

$$\operatorname{Im}(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} \cap \operatorname{Im} D\mathrm{R}(g)^* = \{0\}.$$

On considère donc un tenseur $k = (\Delta_L - 2\lambda)h = D\mathrm{R}(g)^*f$ pour un tenseur $h \in TT$ et une fonction f. Comme $(\Delta_L - 2\lambda)$ respecte le scindage $TT \oplus \operatorname{Im}\mathring{\mathscr{L}}$, k est un TT-tenseur, en particulier $D\mathrm{R}(g)^*f$ est égal à sa partie sans trace qui est $\frac{1}{2}\mathring{\mathscr{L}}\mathrm{d}f$. Ainsi k est un TT-tenseur dans $\operatorname{Im}\mathring{\mathscr{L}}$, il est donc trivial. □

Remarque 9. On pourrait aussi linéariser l'identité de Bianchi

$$\mathscr{B}(\operatorname{Ric}(g)) = 0,$$

grâce au linéarisé de $\mathscr{B}$ et de Ric (voir par exemple [10]) et ainsi obtenir un opérateur $\widetilde{P}$ du même type mais dont l'image est dans le noyau de $\mathscr{B}$. Pour avoir un opérateur à image dans $\ker\operatorname{div}$ il faudra alors prendre $\widetilde{P} - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\widetilde{P}(\cdot)g$.

Remarque 10.

- Si $\kappa \neq -\frac{1}{n}$, L'image de $\mathscr{P}\mathring{\mathscr{L}}$ est la même que celle de $\mathscr{P}^\alpha\mathscr{L}$ pour toute valeur de $\alpha \neq \frac{1+2\kappa}{1+n\kappa}$, et si $\alpha = \frac{1+2\kappa}{1+n\kappa}$,

$$\mathscr{P}^\alpha\mathscr{L} = 0.$$

- Si $\kappa = -\frac{1}{n}$, comme $\mathscr{P}(ug) = 0$, on en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathscr{P}\mathring{\mathscr{L}} = \mathscr{P}\,{}^{\alpha}\mathscr{L}$.

  Comme $\mathscr{P}$, avec $\kappa = -\frac{1}{n}$, sera un des opérateurs utilisés pour la construction des tenseurs TT, nous allons décrire aussi ici son noyau. On a déjà
$$\ker\mathscr{P} = \ker\left[\mathscr{P}_{|\ker \mathrm{Tr}}\right] \oplus C^{\infty}(M)g = \ker\left[(\Delta_L - 2\lambda - \mathscr{B}^* \operatorname{div})_{|\ker\mathrm{Tr}}\right] \oplus C^{\infty}(M)g.$$
  Soit $h = h_{TT} + \mathring{\mathscr{L}}w$ dans le noyau de $\mathscr{P}$, avec h_{TT} tenseur TT. On a
$$\mathscr{P}h = (\Delta_L - 2\lambda)h_{TT} - 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)D\mathrm{R}^*(g)\mathrm{d}^* w = 0,$$
  La trace de cette équation implique $(\Delta - \frac{\lambda n}{n-1})\mathrm{d}^* w = 0$, qui une fois réinsérée dans l'équation donne
$$(\Delta_L - 2\lambda)h_{TT} - 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathring{\mathrm{Hess}}\,\mathrm{d}^* w = 0.$$
  Ensuite $\Delta_L - 2\lambda$ respectant la décomposition $\mathrm{TT} \oplus \mathrm{Im}\,\mathring{\mathscr{L}}$ (voir proposition 4), on a aussi $\mathring{\mathrm{Hess}}\,\mathrm{d}^* w = 0$, finalement $\mathrm{d}^* w$ est dans le noyau de $\left(\nabla\nabla + \frac{\lambda(\cdot)}{n-1}g\right)$. Or ce noyau est trivial si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 0$ et (M, g) n'est pas la sphère cannonique [16], égal à $\mathbb{R}$ si $\lambda = 0$, enfin un espace de dimension $n+1$ (engendré par la restriction à la sphère unité des fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$) si (M, g) est la sphère cannonique [16]. Ainsi dans le premier cas $\mathrm{d}^* w = 0$, dans le deuxième $\mathrm{d}^* w$ est constant or étant d'intégrale nulle, on a aussi $\mathrm{d}^* w = 0$, enfin dans le dernier cas, on a $\mathrm{d}^* w = f$, avec $\nabla\nabla f + \frac{\lambda f}{n-1}g = 0$. Or dans cette situation $\mathrm{d}^* w = \frac{n-1}{\lambda n}\mathrm{d}^*\mathrm{d}f$, ainsi $w = \frac{n-1}{\lambda n}\mathrm{d}f + \omega$ avec $\mathrm{d}^*\omega = 0$, par conséquent
$$\mathring{\mathscr{L}}w = \frac{n-1}{\lambda n}\mathring{\mathscr{L}}\mathrm{d}f + \mathring{\mathscr{L}}\omega = \mathring{\mathscr{L}}\omega.$$
  En conclusion sur toute variété compacte sans bord on aura
$$\ker\mathscr{P} = \ker[(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT}] \oplus \mathring{\mathscr{L}}\left(\ker \mathrm{d}^*\right) \oplus C^{\infty}(M)g.$$

Il peut aussi être utile de construire des tenseurs dans le noyau de certains ${}^{\alpha}\mathscr{L}^*$ comme pour la contrainte hamiltonienne des données initiales relativistes, correspondant à $\alpha = 2$ (voir [2] par exemple en dimension 3) ou l'opérateur de Bianchi ($\alpha = 1$). Pour cela, il suffit de décaler notre opérateur $\mathscr{P}$ via sa trace comme suit.

Corollaire 11. *Pour $\alpha \neq \frac{2}{n}$, l'opérateur*
$${}^{\alpha}\mathscr{P} = \mathscr{P} + \frac{\alpha}{2 - n\alpha}\mathrm{Tr}\,\mathscr{P}(\cdot)g$$
envoie tout tenseur symétrique sur un tenseur symétrique dans le noyau de $({}^{\alpha}\mathscr{L})^* = (2\operatorname{div} + \alpha d\,\mathrm{Tr})$:
$$({}^{\alpha}\mathscr{L})^*\,{}^{\alpha}\mathscr{P} = 0$$

Démonstration. Un calcul direct permet de vérifier que $\operatorname{div} h = 0$ si et seulement si
$${}^{\alpha}\mathscr{L}^*\left(h + \frac{\alpha}{2 - n\alpha}\mathrm{Tr}\,hg\right) = 0.$$
□

Remarque 12.

- La composition de la trace et de $\mathscr{P}$ peut se réécrire simplement
$$\mathrm{Tr}\,\mathscr{P} = [(2\kappa(n-1)+1)\Delta - 2(1+\kappa n)\lambda]\,\mathrm{Tr} + (n-2)\mathrm{d}^*\operatorname{div}.$$
- Comme précédemment avec $\alpha = 0$, si l'on désire caractériser l'image de ${}^{\alpha}\mathscr{P}$ sur une variété compacte sans bord, il sera pratique ici de décomposer un tenseur symétrique en une partie dans l'image de ${}^{\alpha}\mathscr{L}$ et une dans le noyau de son adjoint.
- Lorsque $\alpha = 2$ et $n = 3$ un opérateur similaire à ${}^{2}\mathscr{P}$ est introduit dans [2]

5. Tenseurs TT

En dimension 3, sur les variétés conformément plates, le linéarisé du 2-tenseur de Cotton-York est un opérateur différentiel d'ordre 3 qui transforme les tenseurs symétriques sans trace en tenseurs TT. Si M est simplement connexe à seconde cohomologie de De Rahm nulle, tous les tenseurs TT sont obtenus ainsi [1]. En dimension 4, l'opérateur d'ordre 4, adjoint du linéarisé du tenseur de Bach joue un rôle similaire, de même que l'adjoint du linéarisé du tenseur d'Obstruction en dimension paire $n = 2m \geq 4$, l'opérateur sera alors d'ordre n.

Le théorème 1 montre que sur toute variéte d'Einstein de dimension $n \geq 3$, il existe un opérateur linéaire d'ordre 4 constructeur d'une grande partie des tenseurs TT. Passons maintenant à la preuve de cette affirmation.

Démonstration du théorème 1. On pose $c = \frac{n}{n-1}$. Par la proposition 4 on a la propriété de commutation

$$\operatorname{div} \Delta_L = \Delta_H \operatorname{div},$$

et par l'équation (2), on a la composition

$$\operatorname{div} \mathring{\mathscr{L}} = \left(\mathrm{dd}^* + \frac{2}{c}\mathrm{d}^*\mathrm{d} - 2\lambda\right),$$

ainsi

$$\operatorname{div} P = \left[(\Delta_H - 2\lambda)(\Delta_H - c\lambda) - (\mathrm{dd}^* + \frac{2}{c}\mathrm{d}^*\mathrm{d} - 2\lambda)(\mathrm{dd}^* + \frac{c}{2}\mathrm{d}^*\mathrm{d} - c\lambda)\right] \operatorname{div}$$

or comme $\Delta_H = \mathrm{dd}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$ et que $\mathrm{d}^2 = (\mathrm{d}^*)^2 = 0$ on obtient immédiatement que le terme entre crochet est nul, ainsi $\operatorname{div} P = 0$. De même par un calcul similaire ou simplement par dualité, on obtient $P\mathring{\mathscr{L}} = 0$.

Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, d'après [3], tout tenseur symétrique lisse sans trace $\mathring{h}$ se décompose en

$$\mathring{h} = \mathring{h}_{TT} + \mathring{\mathscr{L}} w,$$

avec $\mathring{h}_{TT}$ à divergence (et trace) nulle, la décomposition étant L^2-orthogonale. On a clairement

$$P\mathring{h} = P\mathring{h}_{TT} = (\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)\mathring{h}_{TT}$$

ainsi par l'alternative de Fredholm,

$$TT := \ker \operatorname{div} \cap \ker \operatorname{Tr} = \operatorname{Im} P_{|TT} \oplus \ker(\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT},$$

la somme directe étant L^2 orthogonale, ou encore

$$TT = \operatorname{Im} P \oplus \ker\left[(\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT}\right].$$

Or on a

$$\ker\left[(\Delta_L - 2\lambda)\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT}\right] = \ker(\Delta_L - 2\lambda)_{|TT} + \ker\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT},$$

en effet l'inclusion de droite à gauche est directe, pour l'autre sens il faut distinguer deux cas :

Si $\lambda = 0$ et $h \in \ker(\Delta_L)^2$, alors $\|\Delta_L h\|^2_{L^2} = \langle(\Delta_L)^2 h, h\rangle_{L^2} = 0$, et si $\lambda \neq 0$, et $h \in \ker(\Delta_L - 2\lambda)(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda)$ alors

$$h = \frac{n-1}{(2-n)\lambda}\left[(\Delta_L - 2\lambda)h - \left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right)h\right] \in \ker\left(\Delta_L - \frac{n}{n-1}\lambda\right) \oplus \ker(\Delta_L - 2\lambda) \qquad \square$$

Remarque 13. Comme pour $\alpha \neq \frac{2}{n}$, on a

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \frac{c}{2}\mathrm{dd}^* - 2\operatorname{Ric}(g) = \operatorname{div}({}^{\frac{4-c}{2}}\mathscr{L}) = \frac{1}{2}({}^{\frac{c+2\alpha-4}{n\alpha-2}}\mathscr{L}^*)({}^{\alpha}\mathscr{L}),$$

on peut aussi écrire notre opérateur par exemple sous la forme

$$P=(\Delta_L-2\lambda)\left(\Delta_L-\frac{n}{n-1}\lambda\right)-\frac{1}{2}\mathring{\mathscr{L}}\left(\operatorname{div}\left(\tfrac{3n-4}{2(n-1)}\mathscr{L}\right)+\left(2-\frac{n}{n-1}\right)\lambda\right)\mathring{\mathscr{L}}^*.$$

Remarque 14. Sur une variété riemannienne compacte sans bord et lisse, on vérifie facilement que dans C^∞ par exemple

$$\operatorname{Ker}P=\ker(\Delta_L-2\lambda)_{|TT}+\ker\left(\Delta_L-\frac{n}{n-1}\lambda\right)_{|TT}\oplus\operatorname{Im}\mathring{\mathscr{L}}.$$

Remarque 15. Si g est Ricci plate, alors en restriction aux tenseurs TT, on a

$$P=(\nabla^*\nabla)^2.$$

Sur une variété compacte sans bord, le noyau de ce dernier est réduit aux tenseurs parallèles. Dans certains cas comme sur les variétés à courbure constante, les 2-tenseurs symétriques parallèles sont les multiples de g donc nuls si leur trace l'est, ainsi le noyau est trivial et tous les tenseurs TT sont dans l'image de P, on peut ainsi traiter les cas exclus par [1] en dimension 3 mais aussi les dimensions supérieures.

Lorsque P agit sur les tenseurs TT, on remarque que c'est (4 fois) la composée des versions linéaires des tenseurs de Schouten et de Ricci sans trace. Nous allons vérifier que c'est aussi le cas lorsqu'il agit sur tous les tenseurs sans trace (modulo adjoint).

Proposition 16. *Sur une variété d'Einstein telle que* $\operatorname{Ric}(g)=\lambda g$*, on a*

$$P=4\,D\operatorname{Sch}(g)^*\,D\mathring{\operatorname{Ric}}(g)^*.$$

Démonstration. On rappelle que si $\operatorname{Ric}(g)=\lambda g$ alors

$$D\operatorname{Sch}(g)h=\frac{1}{2}\left(\Delta_L h-\frac{n\lambda}{n-1}h\right)-\frac{1}{4}\mathscr{L}\mathscr{B}h-\frac{D\operatorname{R}(g)h}{2(n-1)}g,$$

a pour adjoint

$$D\operatorname{Sch}(g)^*h=\frac{1}{2}\left(\Delta_L h-\frac{n\lambda}{n-1}h\right)-\frac{1}{2}\mathscr{B}^*\operatorname{div}h-\frac{1}{2(n-1)}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{Tr}h,$$

et

$$D\mathring{\operatorname{Ric}}(g)h=\frac{1}{2}(\Delta_L h-2\lambda h)-\frac{1}{4}\mathscr{L}\mathscr{B}h-\frac{D\operatorname{R}(g)h}{n}g,$$

a pour adjoint

$$D\mathring{\operatorname{Ric}}(g)^*h=\frac{1}{2}(\Delta_L h-2\lambda h)-\frac{1}{2}\mathscr{B}^*\operatorname{div}h-\frac{1}{n}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{Tr}h$$

La composée, agissant sur les tenseurs sans trace est, en posant $c=\frac{n}{n-1}$, et puisque $\operatorname{div}D\mathring{\operatorname{Ric}}(g)^*=0$:

$$4\,D\operatorname{Sch}(g)^*\,D\mathring{\operatorname{Ric}}(g)^*=[(\Delta_L-c\lambda)-\frac{c}{n}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{Tr}][(\Delta_L-2\lambda)-\mathscr{B}^*\operatorname{div}].$$

Cette dernière quantité est égale à la somme des termes suivants :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I})&=(\Delta_L-c\lambda)(\Delta_L-2\lambda),\\
(\mathrm{II})&=-(\Delta_L-c\lambda)\mathscr{B}^*\operatorname{div}=-\mathscr{B}^*(\Delta_H-c\lambda)\operatorname{div},\\
(\mathrm{III})&=-\frac{c}{n}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{Tr}(\Delta_L-2\lambda)=-\frac{c}{n}D\operatorname{R}(g)^*(\Delta-2\lambda)\operatorname{Tr}=0\\
(\mathrm{IV})&=\frac{c}{n}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{Tr}\mathscr{B}^*\operatorname{div}=\frac{c(n-2)}{n}D\operatorname{R}(g)^*\operatorname{d}^*\operatorname{div}\\
&=\frac{c(n-2)}{2n}[\mathscr{B}^*d+(\Delta-2\lambda)(\cdot)g]\operatorname{d}^*\operatorname{div}.
\end{aligned}$$

Or on a

$$(\mathrm{II})+(\mathrm{IV})=-\mathscr{B}^*\left(\Delta_H-\frac{c(n-2)}{2n}\mathrm{dd}^*-c\lambda\right)\mathrm{div}+\frac{c(n-2)}{2n}[(\Delta-2\lambda)(\cdot)g]\mathrm{d}^*\,\mathrm{div}.$$

Comme $\mathscr{B}^*=\mathring{\mathscr{L}}+(1-\frac{2}{n})\mathrm{d}^*(\cdot)g$ et

$$\Delta_H-\frac{c(n-2)}{2n}\mathrm{dd}^*-c\lambda=\mathrm{d}^*\mathrm{d}+\frac{n}{2(n-1)}\mathrm{dd}^*-\frac{n\lambda}{n-1},$$

dont la divergence vaut

$$\frac{n}{2(n-1)}\Delta\mathrm{d}^*-\frac{n\lambda}{n-1}\mathrm{d}^*=\frac{n}{2(n-1)}(\Delta-2\lambda)\mathrm{d}^*,$$

il en résulte

$$(\mathrm{II})+(\mathrm{IV})=-\mathring{\mathscr{L}}(\mathrm{d}^*\mathrm{d}+\frac{n}{2(n-1)}\mathrm{dd}^*-\frac{n\lambda}{n-1})\,\mathrm{div}.$$

Finalement, on a bien (I) + (II) + (III) + (IV) = P. □

Comme $\mathscr{P}$ envoie les 2-tenseurs symétriques sans trace (ou avec) en tenseurs à divergence nulle, on peut aussi chercher un opérateur $\mathscr{Q}$ envoyant les tenseurs symétriques à divergence nulle en tenseurs TT, la composée $\mathscr{Q}\mathscr{P}$ aura les propriétés recherchées. L'opérateur suivant répond à cette problématique :

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}h:&=\left(\Delta_L-\frac{n}{n-1}\lambda\right)\left(h-\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,h\,g\right)-\frac{1}{2(n-1)}\mathring{\mathscr{L}}\mathrm{d}\,\mathrm{Tr}\,h\\&=\left(\Delta_L-\frac{n}{n-1}\lambda\right)\left(h-\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,h\,g\right)-\frac{1}{n-1}\mathring{\mathrm{Hess}}\,\mathrm{Tr}\,h,\end{aligned}$$

$\mathring{\mathrm{Hess}}$ désignant la partie sans trace de la hessienne. On peut vérifier que

$$\mathscr{Q}_{|\ker\mathrm{div}}=D\,\mathrm{Sch}(g)^*_{|\ker\mathrm{div}}.$$

Proposition 17. *Sur une variété d'Einstein telle que* $\mathrm{Ric}(g)=\lambda g$*, on a*

$$\mathscr{Q}(\ker\mathrm{div})\subset\ker\mathrm{div}\cap\ker\mathrm{Tr},$$

de plus

$$P=\mathscr{Q}\mathscr{P}.$$

6. Détours non-linéaires

L'opérateur P étant (4 fois) la composée des adjoints des linéarisés de Sch et $\mathring{\mathrm{Ric}}$ en une métrique d'Einstein, on aimerait le retrouver par linéarisation d'un opérateur non-linéaire « naturel ». On peut commencer par l'opérateur hautement non-linéaire

$$\mathring{\mathrm{Ric}}\mathrm{Sch}:=\mathring{\mathrm{Ric}}\circ\mathrm{Sch},$$

qui a bien un sens au voisinage d'une métrique d'Einstein avec $\mathrm{Ric}(g)=\lambda g$ si $\lambda\neq 0$ ce que nous supposerons désormais. D'une part pour tout difféomorphisme ϕ, on a

$$\mathring{\mathrm{Ric}}\mathrm{Sch}(\phi^*g)=\mathring{\mathrm{Ric}}(\phi^*\,\mathrm{Sch}(g))=\phi^*\mathring{\mathrm{Ric}}\mathrm{Sch}(g)=0,$$

puisque $\mathrm{Sch}(g)=\frac{(n-2)\lambda}{2(n-1)}g$ est d'Einstein, ce qui implique

$$D\mathring{\mathrm{Ric}}\mathrm{Sch}(g)\mathscr{L}=0,$$

ou la version duale :

$$\mathrm{div}\,[D\mathring{\mathrm{Ric}}\mathrm{Sch}(g)]^*=0.$$

D'autre part comme pour tout t réel et toute fonction f, par le lemme 7, on a

$$\mathrm{Sch}(e^{tf}g)=\mathrm{Sch}(g)-\frac{n-2}{2}t\nabla\nabla f+\frac{n-2}{4}t^2\mathrm{d}f\,\mathrm{d}f-\frac{n-2}{8}|\mathrm{d}f|^2_g t^2 g,$$

alors
$$\mathrm{Sch}(e^{tf}g) = \mathrm{Sch}(g) - \frac{n-2}{2}t\nabla\nabla f + O(t^2) = \frac{(n-2)\lambda}{2(n-1)}\left(g - \frac{(n-1)}{\lambda}t\nabla\nabla f + O(t^2)\right).$$
Si l'on note ϕ_t le flot local associé au champ de vecteur $X = -\frac{(n-1)}{\lambda}\nabla f$, il en découle
$$\mathrm{Sch}(e^{tf}g) = \phi_t^* \,\mathrm{Sch}(g) + O(t^2),$$
ainsi
$$\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(e^{tf}g) = O(t^2),$$
finalement la dérivée relativement à t en $t = 0$, donne pour toute fonction f
$$D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)(fg) = 0.$$
La version duale de cette dernière égalité étant :
$$\mathrm{Tr}\,[D\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}(g)]^* = 0.$$
En conclusion, l'opérateur $\mathring{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Sch}$ ayant les propriétés recherchées des tenseurs de Bach ou d'Obstruction, mais en version infinitésimale, on comprend que l'adjoint de son linéarisé envoie aussi les tenseurs symétriques sans trace sur des tenseurs TT.

Remarque 18. Des opérateurs d'ordres 4 semblables à P apparaissent aussi dans les problèmes de stabilité de points critiques de fonctionnelles quadratiques en la courbure. Compte tenu du théorème 3.10 de [12] (avec convention opposée de signe pour Δ_L) on peut remarquer que P^* et la variation seconde de $2\widetilde{\mathscr{F}}_\tau$ de [12] avec $\tau = \frac{4-3n}{n(n-1)}$ coïncident sur les tenseurs TT, mais nous n'avons pas poussé plus loin la comparaison.

Références

[1] R. Beig, « TT-tensors and conformally flat structures on 3-manifolds », in *Mathematics of gravitation. Part I : Lorentzian geometry and Einstein equations (Warsaw, 1996)*, Banach Center Publications, vol. 41, Polish Academy of Sciences, 1996, p. 109-118.

[2] R. Beig, P. T. Chruściel, « On linearised vacuum constraint equations on Einstein manifolds », *Class. Quant. Grav.* **37** (2020), nº 21, article no. 14.

[3] M. Berger, D. G. Ebin, « Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold », *J. Differ. Equations* **3** (1969), p. 379-392.

[4] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 10, Springer, 1987.

[5] J.-P. Bourguignon, D. G. Ebin, J. E. Marsden, « Sur le noyau des opérateurs pseudo-différentiels à symbole surjectif et non injectif », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **282** (1976), p. 867-870.

[6] J. Corvino, « On the existence and stability of the Penrose compactification », *Ann. Henri Poincaré* **8** (2007), nº 3, p. 597-620.

[7] X. Dai, X. Wang, G. Wei, « On the stability of Riemannian manifold with parallel spinors », *Invent. Math.* **161** (2005), nº 1, p. 151-176.

[8] S. Dain, H. Friedrich, « Asymptotically Flat initial data with prescribed regularity at infinity », *Commun. Math. Phys.* **222** (2001), nº 3, p. 569-609.

[9] E. Delay, « Smooth compactly supported solutions of some underdetermined elliptic PDE, with gluing applications », *Commun. Partial Differ. Equations* **37** (2012), nº 10, p. 1689-1716.

[10] ———, « Inversion d'opérateurs de courbures au voisinage d'une métrique Ricci parallèle », *Ann. Inst. Fourier* **67** (2017), nº 2, p. 521-538.

[11] R. Gicquaud, « Linearization stability of the Einstein constraint equations on an asymptotically hyperbolic manifold », *J. Math. Phys.* **51** (2010), nº 7, article no. 072501 (14 pages).

[12] M. J. Gursky, J. A. Viaclovsky, « Rigidity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functionals », *J. Reine Angew. Math.* **700** (2015), p. 37-91.

[13] N. Koiso, « Non-deformability of Einstein metrics », *Osaka J. Math.* **15** (1978), p. 419-433.

[14] K. Kröncke, « Variational Stability and Rigidity of Compact Einstein Manifolds », in *Quantum mathematical physics. A bridge between mathematics and physics (Regensburg, 2014)*, Birkhäuser/Springer, 2016, p. 497-513.

[15] A. Lichnerowicz, « Propagateurs et commutateurs en relativité générale », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **10** (1961), p. 293-344.

[16] M. Obata, « Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere », *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), nº 3, p. 333-340.