ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus
Mathématique

Nguyen Manh Linh

Groupes de Brauer algébriques modulo les constantes d'espaces homogènes et leurs compactifications

Volume 362 (2024), p. 693-700

En ligne depuis le 9 juillet 2024

https://doi.org/10.5802/crmath.587

CENTRE MERSENNE

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1778-3569

ACADÉMIE DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus. Mathématique
2024, Vol. 362, p. 693-700
https://doi.org/10.5802/crmath.587

Article de recherche / *Research article*
Géométrie algébrique, Théorie des nombres / *Algebraic geometry, Number theory*

Groupes de Brauer algébriques modulo les constantes d'espaces homogènes et leurs compactifications

Algebraic Brauer groups modulo constants of homogeneous spaces and their compactifications

Nguyen Manh Linh [a]

[a] Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Bâtiment 307, rue Michel Magat, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay Cedex, France

Courriel : manh-linh.nguyen@universite-paris-saclay.fr

Résumé. Soit X une variété lisse, géométriquement intègre, sans fonctions inversibles non constantes sur un corps K. Alors le quotient du groupe Brauer « algébrique » de X par $\operatorname{Br} K$ s'injecte dans $\mathrm{H}^1(K, \operatorname{Pic} \overline{X})$. Nous montrons que cette inclusion n'est pas toujours un isomorphisme même dans le cas où X est un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe sur K. Un résultat similaire pour les compactifications lisses de X est aussi donné.

Abstract. Let X be a smooth, geometrically integral variety without non-constant invertible functions over a field K. Then the quotient of the "algebraic" Brauer group of X by $\operatorname{Br} K$ injects into $\mathrm{H}^1(K, \operatorname{Pic} \overline{X})$. We show that this inclusion is not always an isomorphism, even in the case where X is a homogeneous space of a connected linear algebraic group over K. A similar result for the smooth compactifications of X is also given.

Classification Mathématique (2020). 14F22.

Financement. L'auteur est financé par un « Contrat doctoral spécifique normalien » de l'École normale supérieure de Paris.

Manuscrit reçu le 22 avril 2022, révisé le 7 mars 2023 et le 20 septembre 2023, accepté le 10 novembre 2023.

1. Contexte du problème

Fixons quelques notations. Si K est un corps, $\overline{K}$ désigne une clôture *séparable* fixée de K et $\Gamma_K := \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$. Pour $r \geq 0$, on note $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r) := \varinjlim_n \mu_n^{\otimes r}$, et $\mu := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ le sous-module de torsion de $\overline{K}^\times$. Si A est un Γ_K-module, on note $A' = \mathscr{H}om_K(A, \overline{K}^\times)$ son dual de Cartier. On définit

$$Ш^1_\omega(K, A) := \operatorname{Ker}\left(\mathrm{H}^1(K, A) \longrightarrow \prod_{\sigma \in \Gamma_K} \mathrm{H}^1(\overline{\langle \sigma \rangle}, A)\right).$$

Si L est une extension finie galoisienne de K déployant A, alors $Ш^1_\omega(L,A)=0$, donc la suite exacte d'inflation-restriction donne

$$Ш^1_\omega(K,A) = Ш^1_\omega(\mathrm{Gal}(L/K),A) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L/K),A) \longrightarrow \prod_{g\in \mathrm{Gal}(L/K)} \mathrm{H}^1(\langle g\rangle, A)\right). \tag{1}$$

Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur K avec $\overline{K}[X]^\times = \overline{K}^\times$. Par convention, le groupe de Brauer de X est toujours le groupe de Brauer–Grothendieck $\mathrm{Br}\,X := \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)$. Le groupe de Brauer *algébrique* de X est $\mathrm{Br}_1 X := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\,X \to \mathrm{Br}\,\overline{X})$, où $\overline{X} := X\times_K \overline{K}$. La flèche naturelle $\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}\,X$ se factorise par $\mathrm{Br}_1 X$ (puisque $\mathrm{Br}\,\overline{K}=0$), et son image est le sous-groupe des éléments *constants* de $\mathrm{Br}_1 X$. On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}\,K \longrightarrow \mathrm{H}^1(K,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)), \tag{2}$$

tirée de la suite spectrale de Hochschild–Serre $\mathrm{H}^p(K,\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)$.

Soit K un corps de caractéristique nulle, et soit X un espace homogène d'un K-groupe linéaire semi-simple simplement connexe G. On suppose que le stabilisateur $\overline{H}$ d'un point géométrique de X est de type ssumult, c'est-à-dire une extension d'un groupe de type multiplicatif par un groupe connexe sans caractères (*cf.* [1, Définition 6.1]). Borovoi, Demarche et Harari ont construit une suite exacte de type (2), qui fait intervenir le groupe de Brauer *non ramifié* de X, c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Br}\,X^c$, où X^c est n'importe quelle compactification lisse de X. On suit les notations du Théorème 8.1 dans [1]. Le quotient torique maximal de G est $T=1$ (puisque G est semi-simple). En outre, S désigne la K-forme canonique du quotient de type multiplicatif maximal de $\overline{H}$. Le complexe $[T'\to S']$ de Γ_K-modules (où T' est en degré -1) est quasi-isomorphe au *complexe de Picard étendu* $\mathrm{UPic}\,\overline{X}$ décalé par 1 (voir [2, Main Theorem 1] pour cet énoncé, ainsi que la définition du complexe UPic). En particulier, $S' \simeq [T'\to S'] \simeq \mathrm{Pic}\,\overline{X}$. Pour conclure, [1, Théorème 8.1] fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}_1 X^c/\mathrm{Br}\,K \longrightarrow Ш^1_\omega(K,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m)). \tag{3}$$

Lorsque $\mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m)=0$ (par exemple si K est un corps local, un corps global, ou encore le corps des fonctions d'une courbe sur l'un de ces corps) ou si $X(K)\neq\varnothing$, la suite exacte (2) (resp. (3)) donne un isomorphisme $\mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}\,K \simeq \mathrm{H}^1(K,\mathrm{Pic}\,\overline{X})$ (resp. $\mathrm{Br}_1 X^c/\mathrm{Br}\,K \simeq Ш^1_\omega(K,\mathrm{Pic}\,\overline{X})$). On est intéressé par la question suivante, soulevée par Harari : ces isomorphismes valent-ils sur un corps quelconque ? Le contexte de cette question est comme suit. Soit k un corps de nombres et soit $f : X\to B$ un morphisme projectif, dominant de k-variétés lisses, on veut étudier l'obstruction de Brauer–Manin pour l'espace total X, connaissant celle pour la base B et pour les fibres au-dessus d'« assez » de k-points de B. Il convient de se déplacer entre les groupes de Brauer de ces fibres. Par exemple, cela est possible si les « flèches de spécialisations » $\mathrm{Br}_1 X_\eta/\mathrm{Br}\,k(\eta) \to \mathrm{Br}_1 X_b/\mathrm{Br}\,k$ sont des isomorphismes pour beaucoup de points $b\in B(k)$, où η désigne le point générique de B (voir [8, Section 4] pour quelques résultats obtenus par cette méthode). Pour ce type d'argument, il est crucial que les éléments de $\mathrm{H}^1(k(\eta),\mathrm{Pic}\,\overline{X_\eta})$ (resp. de $Ш^1_\omega(k(\eta),\mathrm{Pic}\,\overline{X_\eta})$) proviennent de $\mathrm{Br}_1 X_\eta/\mathrm{Br}\,k(\eta)$ (resp. de $\mathrm{Br}_1 X^c_\eta/\mathrm{Br}\,k(\eta)$). Bien entendu, dans le cas où B est une courbe (sur le corps de nombres k) ou f admet une section, ce problème disparaît. Harari a traité le cas où $B=\mathbb{P}^n_k$, mais en utilisant un argument de récurrence qui s'appuie fortement sur la nature des espaces projectifs (qui ne s'étend pas au cas où B est k-rationnelle).

Nous allons donner dans ce texte une réponse négative aux deux parties de la question mentionnée ci-dessus (le Corollaire 3 et le Théorème 5). Pour le groupe $\mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}\,K$, c'est une conséquence simple du théorème de Rost–Voevodsky (anciennement connu sous le nom de la conjecture de Bloch–Kato) dès que la flèche $\mathrm{H}^1(K,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) \to \mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m)$ de (2) est explicitée dans la Section 2. Pour le contre-exemple concernant le groupe $\mathrm{Br}_1 X^c/\mathrm{Br}\,K$, il s'agit de la dualité sur des corps 2-locaux.

2. Une différentielle de la suite spectrale de Hochschild–Serre

Soient K un corps parfait, G un K-groupe linéaire semi-simple simplement connexe, et X un espace homogène de G. On ne suppose pas que X possède un K-point. Notons $\overline{H}$ le stabilisateur d'un $\overline{K}$-point de X, qu'on suppose réductif[1]. Si $\overline{H}$ n'est pas abélien, il n'est pas nécessairement défini sur K. Cependant, on peut toujours associe à X le *K-lien de Springer* L_X (dont le $\overline{K}$-groupe sous-jacent est $\overline{H}$), l'ensemble de 2-cohomologie non abélienne $\mathrm{H}^2(K,L_X)$, ainsi que la *classe de Springer* $\eta_X \in \mathrm{H}^2(K,L_X)$ (voir [6, Section 1] pour leur définition). La neutralité de η_X est une obstruction à l'existence des espaces principaux homogènes de G dominant X.

Il y a une action naturelle de Γ_K sur l'abélianisé $\overline{H}^{\mathrm{ab}} = \overline{H}/[\overline{H},\overline{H}]$. On note H^{ab} la K-forme correspondante, qui est un K-groupe de type multiplicatif ($\overline{H}$ étant réductif). En particulier, $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H}^{\mathrm{ab}}) = H^{\mathrm{ab}}(\overline{K})$. En effet, $\overline{H}^{\mathrm{ab}} = F \times_{\overline{K}} \mathbb{G}_m^r$, où F est un $\overline{K}$-schéma en groupes fini, étale, commutatif, et $r \geq 0$ est un entier. D'une part, $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\overline{X},F) = F(\overline{K})$ comme $\overline{X}$ est connexe. D'autre part $\overline{K}[G]^\times = \overline{K}^\times$ par le lemme de Rosenlicht [14, Proposition 3] (G étant semi-simple), *a fortiori* $\overline{K}[X]^\times = \overline{K}^\times$, d'où $\mathrm{H}^0_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{G}_m^r) = (\overline{K}^\times)^r$.

Notons de plus que le dual de Cartier $H' := (H^{\mathrm{ab}})'$ est un Γ_K-module discret qui est de type fini en tant que groupe abélien. La projection $\rho : \overline{H} \to \overline{H}^{\mathrm{ab}}$ induit un morphisme $L_X \to \mathrm{lien}(H^{\mathrm{ab}})$ de K-liens algébriques. Par surjectivité de ρ, ce morphisme induit une *application* $\mathrm{H}^2(K,L_X) \to \mathrm{H}^2(K,H^{\mathrm{ab}})$ (*a priori*, un morphisme de K-liens induit seulement une *relation* entre les ensembles de 2-cohomologie non abélienne correspondants). On note $\eta_X^{\mathrm{ab}} \in \mathrm{H}^2(K,H^{\mathrm{ab}})$ l'image de η_X par cette application.

Sur $\overline{K}$, on a $\overline{X} = \overline{G}/\overline{H}$. Notons $\overline{Z} = \overline{G}/[\overline{H},\overline{H}]$, alors la projection $\overline{Z} \to \overline{X}$ est un torseur sous $\overline{H}^{\mathrm{ab}}$. Au vu du diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{G} \arrow[dd, "\overline{H}"'] \arrow[dr, "{[\overline{H},\overline{H}]}"] & \\ & \overline{Z} \arrow[dl, "\overline{H}^{\mathrm{ab}}"] \\ \overline{X}, & \end{tikzcd}$$

on peut considérer la classe $[\overline{G}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H})$ (resp. $[\overline{Z}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H}^{\mathrm{ab}})$) du $\overline{X}$-torseur $\overline{G}$ sous $\overline{H}$ (resp. du $\overline{X}$-torseur $\overline{Z}$ sous $\overline{H}^{\mathrm{ab}}$). Leur *type* est par définition le morphisme Γ_K-équivariant

$$\lambda : H' \longrightarrow \operatorname{Pic} \overline{X} = \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\mathbb{G}_m), \qquad \chi \longmapsto \chi_*[\overline{G}] = \chi_*[\overline{Z}].$$

En fait, λ est un isomorphisme (par [2, Section 5], compte tenu du fait que $\overline{K}[G]^\times = \overline{K}^\times$ et que $\operatorname{Pic}\overline{G} = 0$).

Lemme 1. *La classe $[\overline{Z}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H}^{\mathrm{ab}})$ est Γ_K-invariante. De plus, notant*

$$d_2^{0,1} : \mathrm{H}^0(K,\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H}^{\mathrm{ab}})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(K,H^{\mathrm{ab}})$$

la différentielle tirée de la suite spectrale de Hochschild–Serre

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(K,\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X},\overline{H}^{\mathrm{ab}})) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X,H^{\mathrm{ab}}), \tag{4}$$

on a $d_2^{0,1}([\overline{Z}]) = \eta_X^{\mathrm{ab}}$.

Démonstration. Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} K$ le morphisme structural. On considère la suite spectrale de Leray

$$\widetilde{E}_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_{K\text{-grp}}(H',\mathrm{R}^q\pi_*\mathbb{G}_m) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X,H^{\mathrm{ab}}). \tag{5}$$

[1] C'est-à-dire que la composante neutre de $\overline{H}$ est réductive.

Comme $\overline{K}[X]^\times = \overline{K}^\times$ est divisible (K étant parfait), un résultat de Skorobogatov [16, Proposition 2.3.11] compare (4) et (5). En particulier, on dispose d'un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\mathrm{ab}})) \arrow[r, "d_2^{0,1}"] \arrow[d, "\text{type}"] & \mathrm{H}^2(K, H^{\mathrm{ab}}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_{K\text{-grp}}(H', \operatorname{Pic}\overline{X}) \arrow[r, "\widetilde{d}_2^{0,1}"] & \mathrm{H}^2(K, H^{\mathrm{ab}}). \end{tikzcd} \tag{6}$$

Dans (6), $\widetilde{d}_2^{0,1}$ est la différentielle tirée de (5), et l'isomorphisme type : $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\mathrm{ab}}) \to \mathrm{Hom}_{\overline{K}\text{-grp}}(H', \operatorname{Pic}\overline{X})$ associe à chaque classe d'isomorphie de $\overline{X}$-torseurs sous $\overline{H}^{\mathrm{ab}}$ son type. Comme $\lambda \in \mathrm{Hom}_{K\text{-grp}}(H', \operatorname{Pic}\overline{X})$ provient de $[\overline{Z}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\mathrm{ab}})$, on a $[\overline{Z}] \in \mathrm{H}^0(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\mathrm{ab}}))$. Il reste donc à montrer que $\widetilde{d}_2^{0,1}(\lambda) = \eta_X^{\mathrm{ab}}$.

Suivons la preuve de [16, Theorem 9.5.1]. La classe $e(X) := \widetilde{d}_2^{0,1}(\lambda) \in \mathrm{H}^2(K, H^{\mathrm{ab}})$ est appelée *obstruction élémentaire* de X, c'est une obstruction à l'existence des X-torseurs sous H^{ab} de type λ. Elle est représentée par la gerbe $\mathscr{G}_\lambda$ des torseurs sur X de type λ, *i.e.* pour toute extension finie séparable K'/K, la fibre $\mathscr{G}_\lambda(K')$ est le groupoïde des $X_{K'}$-torseurs sous $H^{\mathrm{ab}}_{K'}$ de type λ [7, Chapitre IV, Section 3.2 et Chapitre V, Section 3.1]. D'ailleurs, la classe de Springer $\eta_X \in \mathrm{H}^2(K, L_X)$ est représentée par la gerbe $\mathscr{G}_X$, dont la fibre $\mathscr{G}_X(K')$ est pour toute extension finie séparable K'/K le groupoïde des espaces principaux homogènes de $G_{K'}$ dominant $X_{K'}$ [7, Chapitre IV, Section 5.1]. Si Y est un tel espace principal homogène et $Y \to X_{K'}$ est un morphisme $G_{K'}$-équivariant, le groupe algébrique $\mathrm{Aut}_{G_{K'}}(Y/X_{K'})$ est une K'-forme de $\overline{H}$, qu'on va noter $H_{K'}$, et Y est un $X_{K'}$-torseur sous $H_{K'}$. Le *produit contracté* $W := Y \times^{H_{K'}} H^{\mathrm{ab}}_{K'}$ est un $X_{K'}$-torseur sous $H^{\mathrm{ab}}_{K'}$. Comme $\overline{Y} = \overline{G}$, on a $\overline{W} = \overline{G}/[\overline{H}, \overline{H}] = \overline{Z}$, qui est un $\overline{X}$-torseur sous $\overline{H}^{\mathrm{ab}}$ de type λ. La construction $Y \mapsto W$ définit un morphisme $\mathscr{G}_X \to \mathscr{G}_\lambda$ de K-gerbes algébriques, donc l'application $\mathrm{H}^2(K, L_X) \to \mathrm{H}^2(K, H^{\mathrm{ab}})$ envoie η_X sur $e(X)$, *i.e.* $d_2^{0,1}([\overline{Z}]) = \widetilde{d}_2^{0,1}(\lambda) = e(X) = \eta_X^{\mathrm{ab}}$. □

Proposition 2. *Soient G, X et $\overline{H}$ comme ci-dessus. On utilise le type λ de X pour identifier H' à* $\operatorname{Pic}\overline{X}$. *Alors pour tout $p \geq 0$, la différentielle $d_2^{p,1} : \mathrm{H}^p(K, H') \to \mathrm{H}^{p+2}(K, \mathbb{G}_m)$ de la suite spectrale de Hochschild–Serre $E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est donnée par les cup-produits avec* $\eta_X^{\mathrm{ab}} \in \mathrm{H}^2(K, H^{\mathrm{ab}})$.

Démonstration. Ce calcul est essentiellement pris de [12, Theorem 2.4.4]. Pour tout faisceau $\mathscr{A}$ de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$, on utilisera abusivement la même notation pour sa restriction à $\overline{X}_{\text{ét}}$. Soit $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{G}^0_{\mathscr{A}} \to \mathscr{G}^1_{\mathscr{A}} \to \cdots$ la résolution de Godement de $\mathscr{A}$, alors la suite spectrale de Hochschild–Serre

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^q_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathscr{A})) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathscr{A}) \tag{7}$$

est induite par le complexe double $(\mathrm{C}^\bullet(K, \mathscr{G}^\bullet_{\mathscr{A}}(\overline{X})))$. Sa différentielle $d_2^{p,1}$ est obtenue de la partie

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^p(K, \mathscr{G}^1_{\mathscr{A}}(\overline{X})) \arrow[r] & \mathrm{C}^{p+1}(K, \mathscr{G}^1_{\mathscr{A}}(\overline{X})) & \\ & \mathrm{C}^{p+1}(K, \mathscr{G}^0_{\mathscr{A}}(\overline{X})) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{C}^{p+2}(K, \mathscr{G}^0_{\mathscr{A}}(\overline{X})) \end{tikzcd}$$

de ce complexe, comme suit. Considérons les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow M_{\mathscr{A}} \longrightarrow N_{\mathscr{A}} \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathscr{A}) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}(\overline{X}) \longrightarrow \mathscr{G}^0_{\mathscr{A}}(\overline{X}) \longrightarrow M_{\mathscr{A}} \longrightarrow 0 \tag{9}$$

de Γ_K-modules, où $M_{\mathscr{A}} := \mathrm{Im}(\mathscr{G}^0_{\mathscr{A}}(\overline{X}) \to \mathscr{G}^1_{\mathscr{A}}(\overline{X}))$ et $N_{\mathscr{A}} := \mathrm{Ker}(\mathscr{G}^1_{\mathscr{A}}(\overline{X}) \to \mathscr{G}^2_{\mathscr{A}}(\overline{X}))$. Alors $d_2^{p,1}$: $\mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathscr{A})) \to \mathrm{H}^{p+2}(K, \mathscr{A}(\overline{X}))$ est la composée des morphismes connectants

$$\mathrm{H}^p(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathscr{A})) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{p+1}(K, M_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{p+2}(K, \mathscr{A}(\overline{X}))$$

induits par (8) et par (9). On prend pour $\mathscr{A}$ respectivement H^{ab}_X et $\mathbb{G}_m$. Alors pour tout caractère $\chi \in H'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{H}^{\text{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & \mathscr{G}^0_{H^{\text{ab}}_X}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{G}^0_\chi"] & \mathscr{G}^1_{H^{\text{ab}}_X}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{G}^1_\chi"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \overline{K}^\times \arrow[r] & \mathscr{G}^0_{\mathbb{G}_m}(\overline{X}) \arrow[r] & \mathscr{G}^1_{\mathbb{G}_m}(\overline{X}) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Le fait que le foncteur de Godement soit Γ_K-équivariant nous permet de définir des accouplements

$$\mathscr{G}^p_{H^{\text{ab}}_X}(\overline{X}) \times H' \longrightarrow \mathscr{G}^p_{\mathbb{G}_m}(\overline{X}), \qquad (u, \chi) \longmapsto \mathscr{G}^p_\chi(u)$$

pour tout $p \geq 0$. D'où des accouplements

$$M_{H^{\text{ab}}_X} \times H' \longrightarrow M_{\mathbb{G}_m}, \qquad N_{H^{\text{ab}}_X} \times H' \longrightarrow N_{\mathbb{G}_m}, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{G}^0_{H^{\text{ab}}_X}(\overline{X}) \times H' \longrightarrow \mathscr{G}^0_{\mathbb{G}_m}(\overline{X}),$$

qui, au vu de (8) and (9), sont compatibles avec les accouplements

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\text{ab}}) \times H' \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\overline{X}, \qquad (u, \chi) \longmapsto \chi_* u$$

et

$$H^{\text{ab}}(\overline{K}) \times H' \longrightarrow \overline{K}^\times, \qquad (h, \chi) \longmapsto \chi(h).$$

Par compatibilité des cup-produits avec les morphismes connectants [12, Proposition 1.4.3], on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\text{ab}})) \times \mathrm{H}^p(K, H') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\partial"', shift right=8ex] \arrow[d, equal, shift left=6ex] & \mathrm{H}^p(K, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) \arrow[d, "\partial"] \\
\mathrm{H}^1(K, M_{H^{\text{ab}}_X}) \times \mathrm{H}^p(K, H') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\delta"', shift right=6ex] \arrow[d, equal, shift left=6ex] & \mathrm{H}^{p+1}(K, M_{\mathbb{G}_m}) \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{H}^2(K, H^{\text{ab}}) \times \mathrm{H}^p(K, H') \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^{p+2}(K, \mathbb{G}_m).
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Regardons la classe $[\overline{Z}] \in \mathrm{H}^0(K, \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\overline{X}, \overline{H}^{\text{ab}}))$ et soit $y \in \mathrm{H}^p(K, H')$. Par définition de λ, on a $[\overline{Z}] \cup y = \lambda_* y \in \mathrm{H}^p(K, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$. D'un autre côté, $\delta(\partial([\overline{Z}])) = d_2^{0,1}([\overline{Z}]) = \eta^{\text{ab}}_X$ par le Lemme 1, donc (10) donne

$$d_2^{p,1}(\lambda_* y) = \delta(\partial(\lambda_* y)) = \delta(\partial([\overline{Z}] \cup y)) = \delta(\partial([\overline{Z}])) \cup y = \eta^{\text{ab}}_X \cup y,$$

qui est ce qu'on veut. □

Corollaire 3. *Soit $n \geq 2$ un entier et soit K un corps parfait de caractéristique ne divisant pas n. Supposons que K contient μ_n et que* $\mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)[n] \neq 0$. *Alors il existe un entier m et un K-espace homogène X de* SL_m*, à stabilisateurs géométriques isomorphes à μ_n, tels que la flèche* $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br}\, K \to \mathrm{H}^1(K, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ *de la suite exacte* (2) *ne soit pas surjective.*

Démonstration. Par le théorème de Rost–Voevodsky [17, Theorem 6.16], on a un isomorphisme $K^M_\bullet(K)/n \simeq \mathrm{H}^\bullet(K, \mu_n^{\otimes \bullet})$ d'anneaux anti-commutatifs gradués, où $K^M_\bullet$ désigne la K-théorie de Milnor. D'où $K^M_\bullet(K)/n \simeq \mathrm{H}^\bullet(K, \mathbb{Z}/n)$ puisque K contient μ_n. L'anneau $K^M_\bullet(K)$ étant engendré par les éléments de degré 1, tout élément de $\mathrm{H}^r(K, \mathbb{Z}/n)$ (où $r \geq 1$) est une somme de symboles

$a_1 \cup \cdots \cup a_r$, où $a_1, \ldots, a_r \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)$. Soit $c \in \mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)[n]$ non nul. Comme $\mathrm{H}^3(K, \mu_n) \to \mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)[n]$ est surjectif, c se relève en un élément de $\mathrm{H}^3(K, \mu_n)$, il s'écrit donc comme une somme de symboles de la forme $a \cup b$, où $a \in \mathrm{H}^2(K, \mu_n)$ et $b \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)$. Comme $c \neq 0$, l'un de ces symboles est non nul, *i.e.* il existe $a \in \mathrm{H}^2(K, \mu_n)$ et $b \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)$ tels que $a \cup b \neq 0 \in \mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)$. La construction de Demarche–Lucchini Arteche [4, Corollaire 3.3] assure l'existence d'un entier m et d'un K-espace homogène X de SL_m de lien de Springer $L_X = \mathrm{lien}(\mu_n)$ et de classe de Springer $\eta_X = a \in \mathrm{H}^2(K, \mu_n)$. Au vu de la Proposition 2, on a $\mathrm{Pic}\,\overline{X} = \mathbb{Z}/n$, et l'image de $b \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)$ dans $\mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)$ vaut $a \cup b \neq 0$. Par exactitude de (2), b ne provient pas de $\mathrm{Br}_1 X$. $\square$

Exemple 4. Pour $K = \mathbb{C}((t))((x))((y))$, on a $\mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (voir la Section 3 ci-dessous), d'où un exemple numérique du Corollaire 3.

3. Le contre-exemple

Notre principal résultat est le

Théorème 5. *Il existe un entier m et un espace homogène X de SL_m sur $K := \mathbb{C}((t))((x))((y))$, à stabilisateurs géométriques isomorphes à $\mu_4 \times \mu_4 \times \mu_4$, tels que la flèche $\mathrm{Br}_1 X^c / \mathrm{Br}\, K \to Ш^1_\omega(K, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ de la suite exacte (3) ne soit pas surjective.*

La Proposition 6 ci-dessous mentionne au passage quelques théorèmes de dualités pour des corps locaux supérieurs. Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, on appelle corps d-local tout corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel un corps $(d-1)$-local. Si K est un corps d-local, on notera $K_d := K$, et K_{i-1} le corps résiduel de K_i pour $i \in \{1, \ldots, d\}$. Les points (1) et (2) de la Proposition 6 se démontrent de manière similaire à [11, Theorem 2.17, Lemma 2.18], compte tenu du fait que $\mu \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur toutes les extensions de $\mathbb{C}$, et que le module galoisien $\mathbb{G}_m/\mu$ est uniquement divisible (donc *cohomologiquement trivial*). On pourra consulter [9, Théorème 8.9] pour le point (3). Le point (4) se trouve dans [10, Proposition 3.5].

Proposition 6. *Soit K un corps d-local ($d \geq 1$) avec $K_0 = \mathbb{C}((t))$.*

(1) *On dispose d'un isomorphisme (non canonique) $\mathrm{H}^{d+1}(K, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*
(2) *Pour tout Γ_K-module fini M et $r \in \{0, 1, \ldots, d+1\}$, le cup-produit*

$$\mathrm{H}^r(K, M') \times \mathrm{H}^{d+1-r}(K, M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes finis.
(3) *Pour toute extension finie L/K, la restriction $\mathrm{H}^{d+1}(K, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^{d+1}(L, \mathbb{G}_m)$ est la multiplication par $[L : K]$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*
(4) *Supposons $d = 2$. Soit T un K-tore et S son tore dual, c'est-à-dire $\mathscr{H}om_K(T, \mathbb{G}_m) = \mathscr{H}om_K(\mathbb{G}_m, S)$. Il existe un accouplement parfait*

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^0(K, S)/n \times \mathrm{H}^2(K, T) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

où $\varprojlim_n \mathrm{H}^0(K, S)/n$ est profini et où $\mathrm{H}^2(K, T)$ est discret de torsion.

Corollaire 7. *Soit $K = \mathbb{C}((t))((x))((y))$. Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathrm{H}^3(K, \mu_n)$ s'identifie au sous-groupe $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ de $\mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Le point (4) de la Proposition 6 appliqué au tore $T = \mathbb{G}_m$ donne une dualité parfaite entre $\mathrm{Br}\, K$ et $\varprojlim_n K^\times / K^{\times n}$. Or $k((t))^\times = \mathbb{Z} \times k^\times \times (1 + tk[\![t]\!])$ pour tout corps k, et le groupe $(1 + tk[\![t]\!], \cdot)$ est divisible lorsque k est de caractéristique nulle. Donc $K^\times = \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{C}^\times \times D$ avec D divisible. Comme $\mathbb{C}^\times$ est aussi divisible, $\varprojlim_n K^\times / K^{\times n} = \widehat{\mathbb{Z}}^3$, d'où $\mathrm{Br}\, K = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^3$.

Pour tout entier $n \geq 2$, la suite de Kummer donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\, K/n \longrightarrow \mathrm{H}^3(K,\mu_n) \longrightarrow \mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m)[n] \longrightarrow 0.$$

Or $\mathrm{Br}\, K = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^3$ est divisible, d'où $\mathrm{H}^3(K,\mu_n) \simeq \mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m)[n]$. Finalement, $\mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ au vu de la Proposition 6 (1), d'où le résultat. □

Pour démontrer le Théorème 5, la première étape est de construire un Γ_K-module H avec $Ш^1_\omega(K,H') \neq 0$. La construction suivante est inspirée par un exemple de Serre [15, Chapitre III, 4.7, Lemme 7], et est également réapparue par exemple dans des articles de Borovoi–Kunyavskiĭ [3], Demarche–Lucchini Arteche–Neftin [5, Lemma 5.5] et Rivera-Mesas [13, Lemma 4.1].

Proposition 8. *Soient $n \geq 2$ un entier, K un corps contenant μ_n, de caractéristique ne divisant pas n, et L/K une extension finie galoisienne. Notons $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/K)$, $N = \mathrm{PGCD}(n,|\mathfrak{g}|)$ et $N' = \mathrm{PGCD}(n,\exp(\mathfrak{g}))$. Soit $j : \mu_n \hookrightarrow \mathrm{R}_{L/K}\mu_n$ l'inclusion canonique et soit H le Γ_K-module défini par la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mu_n \xrightarrow{j} \mathrm{R}_{L/K}\mu_n \longrightarrow H \longrightarrow 1. \tag{11}$$

Alors $Ш^1_\omega(K,H')$ est un groupe cyclique d'ordre N/N' dont un générateur est $\delta'(\exp(\mathfrak{g}))$, où $\delta' : \mathbb{Z}/n \to \mathrm{H}^1(K,H')$ est le morphisme connectant induit par la suite exacte duale de (11) *:*

$$1 \longrightarrow H' \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}] \xrightarrow{j'} \mathbb{Z}/n \longrightarrow 1. \tag{12}$$

Démonstration. On vérifie sans peine que j' est l'application d'augmentation, *i.e.* si $(e_g)_{g\in\mathfrak{g}}$ désigne la $(\mathbb{Z}/n)$-base canonique de $(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]$, alors $j'(e_g) = 1$ pour tout $g \in \mathfrak{g}$.

Au vu de (1), $Ш^1_\omega(K,H') = Ш^1_\omega(\mathfrak{g},H') = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{H}^1(\mathfrak{g},H') \to \prod_{g\in\mathfrak{g}} \mathrm{H}^1(\langle g\rangle,H')\big)$. Pour tout $g \in \mathfrak{g}$, (12) donne un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(\mathfrak{g},(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]) \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1(\mathfrak{g},H') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{H}^0(\langle g\rangle,(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]) \arrow[r, "j'"] & \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{H}^1(\langle g\rangle,H') \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{13}$$

où $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g},(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]) = \mathrm{H}^1(\langle g\rangle,(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]) = 0$ par le lemme de Shapiro. En particulier, tout élément $c \in \mathrm{H}^1(\mathfrak{g},H')$ s'écrit sous la forme $\delta'(m)$, où $m \in \mathbb{Z}/n$. Comme j' est l'application d'augmentation et comme la $(\mathbb{Z}/n)$-base $(e_g)_{g\in\mathfrak{g}}$ de $(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}]$ est permutée par $\mathfrak{g}$, on voit que l'image de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g},(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}])$ par j' est $|\mathfrak{g}|(\mathbb{Z}/n)$, et celle de $\mathrm{H}^0(\langle g\rangle,(\mathbb{Z}/n)[\mathfrak{g}])$ est $\mathrm{ord}(g)(\mathbb{Z}/n)$. Donc, $c \in Ш^1_\omega(\mathfrak{g},H')$ si et seulement si $m \in \mathrm{ord}(g)(\mathbb{Z}/n)$ pour tout $g \in \mathfrak{g}$, *i.e.* $m \in \exp(\mathfrak{g})(\mathbb{Z}/n) = N'(\mathbb{Z}/n)$. D'autre part, $c = 0$ si et seulement si $m \in |\mathfrak{g}|(\mathbb{Z}/n) = N(\mathbb{Z}/n)$. D'où $Ш^1_\omega(\mathfrak{g},H') \simeq \frac{N'(\mathbb{Z}/n)}{N(\mathbb{Z}/n)}$ est un groupe cyclique d'ordre N/N', engendré par $\delta'(\exp(\mathfrak{g}))$. □

Lemme 9. *Avec les données de la Proposition 8, on a une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{r-1}(K,H) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^r(K,\mu_n) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{H}^r(L,\mu_n) \longrightarrow \mathrm{H}^r(K,H) \xrightarrow{\delta} \cdots,$$

où δ sont les morphismes connectants induits par (11).

Démonstration. C'est la suite exacte longue induite par (11), compte tenu du fait que $\mathrm{H}^r(K,\mathrm{R}_{L/K}\mu_n) = \mathrm{H}^r(L,\mu_n)$ pour tout $r \geq 1$ par le lemme de Shapiro, et de la compatibilité de $j_* : \mathrm{H}^r(K,\mu_n) \to \mathrm{H}^r(K,\mathrm{R}_{L/K}\mu_n)$ avec la restriction (voir [12, Proposition 1.6.5]). □

Démonstration du Théorème 5. On considère les données suivantes : $K = \mathbb{C}((t))((t_1))((t_2))$, $L = K(\sqrt{t_1},\sqrt{t_2})$ et $n = 4$. Avec les notations de la Proposition 8, on a $N' = 2$ et $N = 4$. Regardons l'élément $a = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^3(K,\mathbb{G}_m)$. Sa restriction à $\mathrm{H}^3(L,\mathbb{G}_m)$ vaut 0 au vu de la Proposition 6 (3).

En vertu du Corollaire 7, on a $a \in \mathrm{H}^3(K, \mu_4)$, et $\mathrm{res}(a) = 0 \in \mathrm{H}^3(L, \mu_4)$. Par le Lemme 9, il existe $x \in \mathrm{H}^2(K, H)$ tel que $a = \delta(x)$.

On prend $y = \delta'(2) \in \mathrm{H}^1(K, H')$. Alors $y \in Ш^1_\omega(K, H')$ et $x \cup y = -2a \in \mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)$ par compatibilité des cup-produits avec les morphismes connectants [12, Corollary 1.4.6]. Or $2a \neq 0$, donc $x \cup y \neq 0$. Soit X un K-espace homogène de SL_m de lien de Springer lien(H) et de classe de Springer $\eta_X = x$, qui existe d'après la construction de Demarche–Lucchini Arteche [4, Corollaire 3.3]. Par la Proposition 2, $\operatorname{Pic} \overline{X} = H'$, et l'image de $y \in \mathrm{H}^1(K, H')$ dans $\mathrm{H}^3(K, \mathbb{G}_m)$ est $x \cup y \neq 0$, donc l'exactitude de (3) assure que y ne provient pas de $\mathrm{Br}_1 X^c$. □

Declaration of interests

The authors do not work for, advise, own shares in, or receive funds from any organization that could benefit from this article, and have declared no affiliations other than their research organizations.

Références

[1] M. V. Borovoi, C. Demarche and D. Harari, « Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **46** (2013), no. 4, p. 651-692.

[2] M. V. Borovoi and J. van Hamel, « Extended equivariant Picard complexes and homogeneous spaces », *Transform. Groups* **17** (2012), p. 51-86.

[3] M. V. Borovoi and B. Kunyavskii, « On the Hasse principle for homogeneous spaces with finite stabilizers », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **6** (1997), no. 3, p. 481-497.

[4] C. Demarche and G. Lucchini Arteche, « Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis », *Compos. Math.* **158** (2019), no. 8, p. 1568-1593.

[5] C. Demarche, G. Lucchini Arteche and D. Neftin, « The Grunwald problem and approximation properties for homogeneous spaces », *Ann. Inst. Fourier* **67** (2017), no. 3, p. 1009-1033.

[6] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer and R. Sujatha, « Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles », *J. Am. Math. Soc.* **11** (1998), no. 3, p. 731-750.

[7] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer, 1971.

[8] D. Harari, « Méthode des fibrations et obstruction de Manin », *Duke Math. J.* **75** (1994), no. 1, p. 221-260.

[9] D. Harari, *Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes*, EDP Sciences, 2017.

[10] D. Izquierdo, « Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs », *Math. Z.* **284** (2016), no. 1-2, p. 615-642.

[11] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, seconde edition, BookSurge, 2006.

[12] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer, 2008.

[13] F. Rivera-Mesas, « Bad places for the approximation property for finite groups », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **34** (2022), no. 1, p. 237-249.

[14] M. Rosenlicht, « Some rationality questions on algebraic groups », *Ann. Mat. Pura Appl.* **43** (1957), p. 25-50.

[15] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne : Cinquième édition, révisée et complétée*, Springer, 1994.

[16] A. N. Skorobogatov, *Torsors and Rational Points*, Cambridge University Press, 2001.

[17] V. A. Voevodsky, « On motivic cohomology with $\mathbf{Z}/l$-coefficients », *Ann. Math.* **174** (2011), no. 1, p. 401-438.