ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus
Mathématique

Alexandre Aleksandrov

Sur certains invariants des algèbres artiniennes commutatives

Volume 362 (2024), p. 751-759

En ligne depuis le 17 septembre 2024

https://doi.org/10.5802/crmath.589

CENTRE
MERSENNE

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1778-3569

ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus. Mathématique
2024, Vol. 362, p. 751-759
https://doi.org/10.5802/crmath.589

Article de recherche / *Research article*
Algèbre, Géométrie algébrique / *Algebra, Algebraic geometry*

Sur certains invariants des algèbres artiniennes commutatives

On certain invariants of commutative artinian algebras

Alexandre Aleksandrov [a]

[a] Institut du Contrôle Automatique de l'Académie des sciences de Russie, 65, rue Profsoyuznaya, GSP-7, Moscou, 117997, Fédération de Russie

Courriel : ag_aleksandrov@mail.ru

Résumé. Dans cette note, on étudie les propriétés des invariants algébriques, topologiques et analytiques des algèbres artiniennes commutatives et les relations remarquables entre eux. Par exemple, on montre que la longueur du module des différentielles de Kähler de toute algèbre artinienne locale de Gorenstein sur $\mathbb{C}$ est supérieure ou égale à la longueur de l'algèbre lui-mème moins un. On obtient alors, grâce à la dualité canonique dans le complexe cotangent, que si le point épais correspondant est lissifiable, on a l'inégalité $\tau \geqslant \mu$ pour ses nombres de Tjurina et de Milnor.

Abstract. We study properties of algebraic, topological and analytic invariants of commutative artinian algebras and relationships between them. For example, we show that the length of the module of Kähler differentials of any local artinian Gorenstein algebra over $\mathbb{C}$ is greater than or equal to the length of the algebra itself minus one. We then prove, employing the canonical duality in the cotangent complex, that if the corresponding thick point is smoothable, then its Tjurina and Milnor numbers satisfy the inequality $\tau \geqslant \mu$.

Manuscrit reçu le 5 décembre 2022, révisé le 18 mai 2023 et le 24 juillet 2023, accepté le 10 novembre 2023.

Abridged English version

We will denote by k the field of complex numbers and by P the convergent power series ring $\mathsf{k}\langle z_1, \dots, z_m\rangle$ in m variables. Let $(X, \mathfrak{o})$ be a germ of complex analytic space and let $(A, \mathfrak{m}_A, \mathsf{k})$ be its dual local analytic algebra. Then there is an isomorphism $A \cong P/I$, where the ideal I is generated by elements $f_1, \dots, f_k \in P$. We will often refer to any such algebra A, as well as to the corresponding germ X, as a *singularity*. For *zero-dimensional* germs (that are often called thick, fat or multiple points) and their dual artinian algebras we will use notations X_0 and A_0, respectively.

Let $\Omega^1_{A/\mathsf{k}}$ be the module of Kähler differentials of A over k, let $\mathrm{T}_i(A/\mathsf{k}, M)$ and $\mathrm{T}^i(A/\mathsf{k}, M)$, $i \geqslant 0$, be the homology and cohomology groups of the cotangent complex with coefficients in an A-module M (see, e.g., [13]). To simplify notations, we will denote the modules $\mathrm{T}_i(A/\mathsf{k}, A)$ and $\mathrm{T}^i(A/\mathsf{k}, A)$ by $\mathrm{T}_i(A)$ and $\mathrm{T}^i(A)$, respectively. Then there are natural isomorphisms $\mathrm{T}_0(A) \cong \Omega^1_{A/\mathsf{k}}$, $\mathrm{T}^0(A) \cong \mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/\mathsf{k}}, A)$, etc. Next, we will denote by $\mathrm{Soc}(M)$ the *socle* of an A-module M. If M is a module over a local *artinian* ring A_0, then $\mathrm{Soc}(M) = (0 \colon \mathfrak{m}_{A_0})_M \cong \mathrm{Hom}_{A_0}(\mathsf{k}, M)$ (see, e.g., [8]).

For any artinian k-algebra A_0 and A_0-module M the following numerical invariants are defined: the embedding dimension of A_0, the lengths of M and $\mathrm{Soc}(M)$, and the dimension of the space $\mathrm{T}^1(A_0)$ of the first order infinitesimal (flat) deformations of A_0. These invariants will be denoted by $e(A_0)$, $\ell(M)$, $\gamma(M)$ and $\tau(A_0)$, respectively. Thus, $e(A_0) = \dim_{\mathsf{k}}(\mathfrak{m}_{A_0}/\mathfrak{m}^2_{A_0})$, $\ell(M) = \dim_{\mathsf{k}}(M)$, $\gamma(M) = \dim_{\mathsf{k}}(\mathrm{Soc}(M))$, $\tau(A_0) = \dim_{\mathsf{k}} \mathrm{T}^1(A_0)$. For the corresponding multiple point X_0 we will often use similar notation $e(X_0)$, $\tau(X_0)$, etc. The integer $\tau(X_0)$ is often called the Tjurina number of X_0. It should be remarked that for any *smoothable* germ X_0 the equality $\ell(A_0) = \mu(X_0) + 1$ holds, where $\mu(X_0)$ is the Milnor number of X_0. Recall also that an artinian ring A_0 is called Gorenstein if $\gamma(A_0) = 1$, that is, if the socle of A_0 is *principal.*

Among other things, our goal here is to prove the inequality $\tau(X_0) \geqslant \mu(X_0) + e(X_0) - 1$ for zero-dimensional complete intersections and an analogous relation for thick Gorenstein points. The corresponding statements were conjectured by the author in 1991-92 (see [2], [3, § 6, Note]) and verified in the weighted homogeneous case.

Our proof is based on the canonical duality in the cotangent complex of artinian algebras (see [3, Theorem 3.2]) and on simple properties of *faithful* modules. First we recall that any module M over a unitary ring A is faithful over the quotient ring $A/\mathrm{Ann}_A M$ (see [4]).

Proposition 1. *Let A_0 be a local Gorenstein algebra and let Δ be a generator of the A_0-module* $\mathrm{Soc}(A_0)$. *Then* $\mathrm{Ann}_{A_0}(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}})$ *is a principal ideal generated by* Δ.

Corollary 2. *Under the same assumptions, the module $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$ is faithful over the quotient ring* $A_0/\Delta A_0$.

Theorem 3. *Let A_0 be a local Gorenstein algebra. Then*

$$\ell\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) \geqslant \ell(A_0) - 1.$$

The proof is based on the Matlis theory of irreducible decompositions of modules (see, e.g., [8]). We also exploit some arguments of [7, Theorem 1] and a little known property of the module of Kähler differentials of Gorenstein algebras. More precisely, we will prove the following statement.

Proposition 4. *Under the same conditions, there are two equalities:*

$$\gamma\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) = \gamma(A_0/\Delta A_0) = e(A_0).$$

Theorem 5. *Let X_0 be a Gorenstein zero-dimensional germ. Then*

$$\tau(X_0) \geqslant \ell(A_0) + e(X_0) - 2.$$

First we remark that for complete intersection germs $\ell(\mathrm{T}_i(X_0)) = \ell(\mathrm{T}^j(X_0))$ for all $i, j \leqslant 1$ (see [2] or [3]) and $\mathrm{T}_i(A_0) = \mathrm{T}^i(A_0) = 0$ for $i \geqslant 2$. Next, for Gorenstein multiple points $\ell(\mathrm{T}^1(X_0)) \geqslant \ell(\mathrm{T}^0(X_0))$ (see [3, Theorem 4.3]). On the other hand, $\ell(\mathrm{T}^0(X_0)) = \ell(\Omega^1_{X_0/\mathsf{k}})$ in view of the functorial duality between homology and cohomology groups of the cotangent complex. Then we apply Theorem 3, taking into account that $\tau(X_0) = \ell(\mathrm{T}^1(X_0))$.

Corollary 6. *Let X_0 be a smoothable Gorenstein zero-dimensional germ. Then*

$$\tau(X_0) \geqslant \mu(X_0) + e(X_0) - 1.$$

Indeed, $\ell(A_0) = \mu(X_0) + 1$ for any smoothable singularity X_0. Of course, the obtained relation remains valid for zero-dimensional complete intersections as well.

1. Introduction

Soient $X = (X, \mathfrak{o})$ un germe analytique complexe d'intersection complète ayant une singularité isolée au point $\mathfrak{o}$, $\dim X = n$ et $n \geqslant 0$. Donc les deux invariants suivants de X sont bien définis. Le premier (topologique) est le nombre de Milnor $\mu(X)$ qui est égale au $n^{\text{ième}}$ nombre de Betti d'une fibre voisine non singulière (moins un si $n = 0$), tandis que le second (analytique) est le nombre de Tjurina $\tau(X)$ qui est égale à la dimension de l'espace de base d'une déformation miniverselle du germe.

Il est bien connu qu'il y a l'inégalité $\mu \geqslant \tau$ dans le cas des singularités d'hypersurfaces. Cette inégalité reste valable pour les intersections complètes de dimension *positive* (voir [12]), pour les singularités lissifiables de Gorenstein de dimension un et deux, etc.

Cependant, dans le cas des singularités de dimension positive qui ne sont pas de Gorenstein, l'inégalité *opposé* $\tau \geqslant \mu$ est généralement vérifiée. En plus, la même inégalité est vraie pour toutes les courbes réduites lissifiables (connues de l'auteur) qui ne sont pas de Gorenstein. Dans ces cas, la différence $\tau - \mu$ peut être interprétée comme le nombre des "cocycles non evanescentes" dans la cohomologie de la fibre non singulière de la déformation semiuniverselle (voir [1, Proposition 6]).

Dans cette note, entre autres, on montre que l'inégalité $\tau \geqslant \mu$ est vraie dans le cas des intersections complètes et singularités lissifiables de Gorenstein de dimension *nulle*. Par définition, une algèbre artinienne est *lissifiable* si le point épais correspondant appartient à une famille plate irréductible des points épais dont le membre général est lisse, c'est-à-dire, il est réunion de points ordinaires. Rappelons aussi qu'il existe des algèbres artiniennes de Gorenstein *non* lissifiables de longueur 14 (voir [9]). De toute façon, on peut compléter la définition de Milnor en posant $\mu(X) = \ell(A) - 1$, où $\ell(A)$ est la longueur de l'algèbre duale de la singularité X de dimension nulle.

Cet énoncé avait été conjecturé par l'auteur (voir [2] et [3, §6, Note]). En fait, il est facile de vérifier que $\tau \geqslant \mu$ dans le cas homogène pondéré. Notre démonstration utilise la dualité dans le complexe cotangent des algèbres analytiques et une propriété peu connue du socle. En effet, nous montrons que le socle de l'algèbre artinienne de Gorenstein engendre l'annulateur du module des différentielles de Kähler et du module des dérivations également. Le résultat principal est une conséquence immédiate des propriétés des algèbres qui sont quotients des algèbres de Gorenstein par leur socles.

2. Le complexe cotangent et la dualité

Soient k le corps des complexes, $X = (X, \mathfrak{o})$ un germe analytique, $A = (A, \mathfrak{m}_A)$ l'algèbre analytique duale de X avec l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$. Alors $A \cong P/I$, où P est l'anneau $\mathsf{k}\langle z_1, \dots, z_m\rangle$ de séries convergentes en m indéterminées. Nous appellerons souvent (quand il n'y aura pas d'ambiguïté) le germe X et l'algèbre locale A la singularité. On note $e(X)$ la dimension plongée (où la dimension d'immersion) de la singularité et $\ell(M)$ la longueur d'un A-module M. Autrement dit, on a $e(X) = \dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ et $\ell(M) = \operatorname{long}_A(M)$.

On utilisera les notations $\mathrm{T}_i(A/\mathsf{k}, M)$ et $\mathrm{T}^i(A/\mathsf{k}, M)$ pour l'homologie et la cohomologie du complexe cotangent de l'algèbre A sur k avec des valeurs dans un module M (voir [13]). On note aussi $\mathrm{T}_i(A)$ et $\mathrm{T}^i(A)$ les groupes correspondants $\mathrm{T}_i(A/\mathsf{k}, A)$ et $\mathrm{T}^i(A/\mathsf{k}, A)$. En particulier, il y a des isomorphismes naturelles $\mathrm{T}_0(A) \cong \Omega^1_{A/\mathsf{k}}$ et $\mathrm{T}^0(A) \cong \mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/\mathsf{k}}, A)$, où $\Omega^1_{A/\mathsf{k}}$ est le module des différentielles de Kähler de A sur k et $\mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A)$ est le module des k-dérivations de A.

Nous noterons désormais X_0 le germe de dimension *nulle* (on l'appelle souvent le point épais) et A_0 son algèbre duale. Donc A_0 est un anneau local *artinien*. Dans ce cas toutes les homologies et cohomologies du complexe cotangent sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur k. Nous désignons par $\tau(X_0)$ la dimension de l'espace vectoriel des déformations (plates) infinitésimales d'ordre un du germe X_0. C'est-à-dire, $\tau(X_0) = \dim_{\mathsf{k}} \mathrm{T}^1(A_0)$; cet entier est parfois appelé le nombre de Tjurina de la singularité X_0. On remarque encore que pour toute point épais *lissifiable* on a $\ell(A_0) = \mu(X_0) + 1$, où $\mu(X_0)$ est le nombre de Milnor de X_0. Par la suite, nous noterons $K(A_0)$ le module *canonique* (dualisant) de A_0 qui est unique à isomorphisme près. En effet, le module $K(A_0)$ est isomorphe à l'enveloppe injective du corps résiduel de l'anneau local A_0 et $\ell(K(A_0)) = \ell(A_0)$ (voir [8, Korollar 6.4, Korollar 1.37]).

Proposition 1. *Il existe des accouplements non dégénérés fonctoriels des espaces vectoriels de dimension finie*

$$\mathrm{T}_i(A_0, K(A_0)) \times \mathrm{T}^i(A_0) \to \mathsf{k}, \quad \mathrm{T}_i(A_0) \times \mathrm{T}^i(A_0, K(A_0)) \to \mathsf{k}, \quad i \geqslant 0.$$

Démonstration. Voir [3, Theorem 3.2]. Nous noterons aussi que dans le cas des intersections complètes on a $\ell(\mathrm{T}_i(A_0)) = \ell(\mathrm{T}^j(A_0))$ pour tous les indices $i, j \leqslant 1$ (voir [2] ou [3]) et $\mathrm{T}_i(A_0) = \mathrm{T}^i(A_0) = 0$ pour $i \geqslant 2$. □

3. Le socle

Soient A_0 un anneau local artinien avec un corps résiduel k et M un A_0-module de type fini. Alors le sous-module de M constitué d'éléments annulés par l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{A_0}$ est appelé le *socle* du module M et noté $\mathrm{Soc}(M)$. Comme on le sait, le socle est un sous-module *essentiel* de M. Cela équivaut à dire que M est une *extension* essentiel de $\mathrm{Soc}(M)$, c'est-à-dire $N \cap \mathrm{Soc}(M) \neq 0$ pour tout sous-module non trivial $N \subset M$ (voir [8]). On sait qu'il y a un isomorphisme $\mathrm{Soc}(M) \cong \mathrm{Hom}_{A_0}(\mathsf{k}, M)$ (voir [8, Lemme 7.30]). Nous noterons $\gamma(M)$ la longueur du socle M, c'est-à-dire $\gamma(M) = \ell(\mathrm{Soc}(M)) = \dim_{\mathsf{k}} \mathrm{Soc}(M)$.

On rappelle aussi qu'une algèbre A_0 (ou le point épais correspondant) est *Gorenstein* si et seulement si $\gamma(A_0) = 1$ (voir [8, Proposition 1.41]). Autrement dit, le socle $\mathrm{Soc}(A_0)$ est un module *monogène*. Dans ce cas l'anneau A_0 est *self-injectif*. C'est-à-dire, cet anneau, considéré comme un module sur lui-même, est injectif au sens usuel. De plus, l'anneau A_0 est isomorphe à son module canonique $K(A_0)$ (voir [8, Proposition 1.43]). Si l'anneau A_0 n'est pas de Gorenstein, alors la dimension du socle (toujours non trivial) est plus grand que un, c'est-a-dire $\gamma(A_0) > 1$, mais n'est plus grand que la multiplicité de A_0 (voir [8, Proposition 1.21]).

4. Les modules fidèles sur les anneaux artiniens de Gorenstein

Soit A un anneau unitaire. Alors un A-module M est appelé *fidèle* si pour tous éléments distincts a et b de l'anneau A il existe un élément $m \in M$ tel que $am \neq bm$. Cela signifie que les homothéties correspondantes du module M par rapport aux éléments a et b sont des endomorphismes *différents* du module M. Évidemment, cette condition peut être reformulée comme suit : s'il existe un élément $a \in A$ tel que $aM = 0$, alors $a = 0$. En d'autres termes, *l'annulateur* du A-module M est trivial, c'est-a-dire $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$ (voir [4]). Par exemple, il est bien connu que le module canonique $K(A_0)$ est un A_0-module fidèle.

Lemme 2. *Soit M un A-module arbitraire et $\bar{A} = A/\mathrm{Ann}_A(M)$. Alors M est un $\bar{A}$-module fidèle.*

Assertion 3. *Soient A_0 un anneau de Gorenstein et M un A_0-module fidèle. Alors $\ell(M) \geqslant \ell(A_0)$.*

Démonstration. Notez d'abord que si A_0 est un anneau artinien *arbitraire* et M est un A_0-module fidèle avec un socle de dimension un, alors $M \cong K(A_0)$ (voir [6, Proposition 3.2.12, (e), (iii)]). Il en résulte que $\ell(M) = \ell(K(A_0)) = \ell(A_0)$.

Soient maintenant M un A_0-module fidèle et $\gamma(M) = n \geqslant 2$. Alors il découle de la théorie générale qu'il existe une famille de sous-modules N_i de M propres *irréductibles* dans M tels que $N_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, et $\bigcap N_i = 0$ (voir [8, Proposition 1.28]). Il résulte de l'irréductibilité des N_i

que $\gamma(M/N_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Notons α_i les idéaux $\mathrm{Ann}(M/N_i)$ dans l'anneau A_0. Il est facile de voir que $\bigcap \alpha_i = 0$. En effet, si $a \in \bigcap \alpha_i$, alors $aM \subseteq \bigcap N_i = 0$. Donc $a = 0$ puisque M est un module fidèle. Montrons maintenant que parmi les modules quotients M/N_i, $i = 1, \ldots, n$, il existe du moins un qui est un A_0-module *fidèle*.

Il est bien connu que dans tout anneau artinien de Gorenstein, l'intersection de deux idéaux non triviaux ne peut pas être zéro (voir [8, Proposition 1.44]). Par conséquent, au moins un idéal, par exemple, α_1 est égal à zéro. Cela signifie que le module quotient M/N_1 est *fidèle*. Puisque $\gamma(M/N_1) = 1$, alors $\ell(M/N_1) = \ell(A_0)$, comme au début de la preuve. Enfin, $\ell(M) = \ell(M/N_1) + \ell(N_1) > \ell(A_0)$; ce qui achève la démonstration. □

Assertion 4. *Dans les conditions et avec les notations de l'assertion précédente, on a l'inégalité*

$$\ell(M) \geqslant \ell(A_0) + \gamma(M) - 1.$$

Démonstration. Soit $\gamma(M) = n \geqslant 1$. Avec les notations comme dans la démonstration ci-dessus, considérons l'homomorphisme des A_0-modules

$$\varphi\colon M \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n} M/N_i,$$

donné par la règle $\varphi(m) = (m + N_1, \ldots, m + N_n)$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap N_i = 0$, c'est-à-dire l'application φ est injective. Donc $\ell(\mathrm{Im}(\varphi)) = \ell(M)$.

Soit maintenant $M_i = \mathrm{Im}(\varphi) \bigcap (M/N_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Montrons que $M_i \neq 0$. En effet, au vu de [8, Proposition 1.28], il existe un isomorphisme d'enveloppes injectives

$$\mathscr{I}(M) = \oplus_{i=1}^{n} \mathscr{I}(M/N_i),$$

où $\mathscr{I}(M/N_i) \cong \mathscr{I}(A/\alpha_i)$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \mathrm{Ass}(M)$ (voir [8, Proposition 1.32]). D'autre part, il y a une chaîne de relations

$$M \subseteq \oplus_{i=1}^{n} M/N_i \subset \oplus_{i=1}^{n} \mathscr{I}(M/N_i) = \mathscr{I}(M),$$

dans laquelle l'immersion au milieu est une extension *essentiel*. En plus, l'immersion $M \subset \mathscr{I}(M)$ a la même propriété. Si M_i est égal à zéro pour au moins un i, par exemple, $M_1 = 0$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) \cap (M/N_1) = 0$, où $M/N_1 \neq 0$. Ce qui contredit le fait que l'extension est essentielle. De cette façon,

$$\ell(\mathrm{Im}(\varphi) \cap (M/N_i)) = \ell(M_i) \geqslant 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. D'autre part, au moins un des modules quotients M/N_i est fidèle, donc son longueur est au moins égal à la longueur de l'anneau A_0. □

5. L'annulateur du module des différentielles de Kähler

Considérons une propriété importante (en elle-même) du socle des algèbres artiniennes qui nous sera utile.

Proposition 5. *Soit A_0 une k-algèbre locale artinienne. Alors son socle est contenu dans l'annulateur du module des dérivations, c'est-à-dire,* $\mathrm{Soc}(A_0) \subseteq \mathrm{Ann}_{A_0}(\mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A_0))$.

Démonstration. Soient $e(A_0) = m$ et $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A_0)$. Alors cette dérivation peut s'écrire sous la forme usuelle $\delta = a_1\partial/\partial z_1 + \cdots + a_m\partial/\partial z_m$, où $a_i \in A_0$, $i = 1, \ldots, m$. D'autre part, il est bien connu que $\delta(\mathfrak{m}_{A_0}) \subseteq \mathfrak{m}_{A_0}$ (voir [15, Corollaire (2.6)]). Cela signifie que $a_i \in \mathfrak{m}_{A_0}$. Il reste à utiliser la définition du socle. □

Corollaire 6. *Soient A_0 une algèbre de Gorenstein et Δ le générateur du socle. Alors* $\Delta \in \mathrm{Ann}_{A_0}(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}})$.

Démonstration. Pour les singularités de Gorenstein on a $K(A_0) \cong A_0$. Donc, il y a l'isomorphisme $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}} \cong \mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A_0)$ induit par la dualité naturelle entre $\mathrm{T}_0(A_0)$ et $\mathrm{T}^0(A_0, K(A_0))$ (voir la proposition 1). $\square$

Remarque 7. Soit A_0 une intersection complète définie par une suite P-régulière $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, où $m = e(A_0)$. Alors le module $\mathrm{Soc}(A_0)$ est engendré par $\det(\mathrm{Jac}(F))$ (voir [11, F.30, Exercice 3) b)]). Dans ce cas la règle de Cramer implique immédiatement que $\Delta \in \mathrm{Ann}_{A_0}(\mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A_0))$ et $\Delta \in \mathrm{Ann}_{A_0}(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}})$.

Corollaire 8. *Soit A_0 une algèbre artinienne. Alors* $\mathrm{Soc}(A_0) \subseteq \mathrm{Ann}_{A_0}(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}} \otimes_{A_0} K(A_0))$.

Démonstration. En effet, l'isomorphisme $\mathrm{Der}_{\mathsf{k}}(A_0) \cong \Omega^1_{A_0/\mathsf{k}} \otimes K(A_0)$ est induit par la dualité entre $\mathrm{T}^0(A_0)$ et $\mathrm{T}_0(A_0, K(A_0))$. $\square$

Montrons maintenant que dans le cas des anneaux locaux artiniens de Gorenstein, le socle engendre l'annulateur du module des différentielles de Kähler.

Avant d'esquisser la démonstration, nous rappelons (voir [5]) que le module $\Omega^1_{A/\mathfrak{K}}$ pour toute $\mathfrak{K}$-algèbre A peut être défini comme suit :

$$\Omega^1_{A/\mathfrak{K}} \cong I/I^2,$$

où I désigne l'idéal de l'algèbre $A \otimes_{\mathfrak{K}} A$ qui est égal à $\mathrm{Ker}(\nu\colon A \otimes_{\mathfrak{K}} A \longrightarrow A)$ et l'application ν est définie par multiplication des composants du produit tensoriel, c'est-a-dire $\nu(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2$.

On a évidemment $A \otimes_{\mathfrak{K}} A/I \cong A$. L'image de l'idéal $\mathrm{Ann}_{A\otimes A}(I)$ sous l'application ν est appelée la *différente* de Noether de la $\mathfrak{K}$-algèbre A (voir [11, G.1]).

Proposition 9. *Soit A une k-algèbre artinienne de Gorenstein. Alors l'idéal $\mathrm{Ann}_{A\otimes A}(I)$ est principal. Autrement dit, il existe $\sigma \in \mathrm{Ann}_{A\otimes A}(I)$ tel que*

$$\mathrm{Ann}_{A\otimes A}(I) \cong A\sigma.$$

Démonstration. On a l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(A, \mathsf{k}) \cong A$ (voir [11, E.17]). Donc, l'algèbre A a une *trace* qui est notée σ et l'assertion plus générale [11, F.10] s'applique. Pour les intersections complètes l'assertion similaire a été démontrée dans [14]. $\square$

Lemme 10. *Soit A une k-algèbre artinienne. Alors il y a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ann}_A(M) \cong \mathrm{Ann}_A\left(M^\vee\right),$$

où $M^\vee$ désigne le module dual $\mathrm{Hom}_A(M, K(A))$ par rapport au module canonique.

Démonstration. Cette assertion découle du fait que le module canonique $K(A)$ est un A-module fidèle (voir [7]). $\square$

Proposition 11. *Soit A_0 une k-algèbre artinienne de Gorenstein. Alors il y a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ann}_{A_0}\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) \cong (\Delta) A_0,$$

où Δ est un générateur de $\mathrm{Soc}(A_0)$.

Démonstration. L'égalité $\Delta = \mathrm{Soc}(A_0)$ est vraie en vertu de [11, F.30, Exercice 3) b)]. Ensuite, avec les notations de la proposition 9 pour toute $\mathfrak{K}$-algèbre A et A-module M il existe (voir [5, Ch. III, §10, no.11]) des isomorphismes canoniques

$$I/I^2 \cong I \otimes_{\mathfrak{K}} ((A \otimes_K A)/I) \cong I \otimes_{\mathfrak{K}} A,$$
$$\mathrm{Hom}_{A\otimes_{\mathfrak{K}} A}(I, M) \cong \mathrm{Hom}_A\left(I/I^2, M\right).$$

Maintenant, en posant $\mathfrak{K} = \mathsf{k}$, $A = A_0$, $M = K(A_0)$, on peut appliquer le lemme 10 et la proposition 9, qui donnent les isomorphismes

$$\mathrm{Ann}_{A_0}\left(I/I^2\right) \cong \mathrm{Ann}_{A_0\otimes_{\mathsf{k}} A_0}(I) \cong A_0\sigma.$$

Compte tenu de [11, G.3. Example, Corollary G.12], on a $\sigma(\Delta) \neq 0$ et $\Delta \in \mathrm{Ann}(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}})$, ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 12. *Dans les conditions et avec les notations de la proposition 11, soit $\overline{A}_0 = A_0/(\Delta)A_0$. Alors $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$ est un $\overline{A}_0$-module fidèle.*

6. L'inégalité fondamentale

On remarque que l'anneau quotient $\overline{A}_0$ n'est pas de Gorenstein (voir [10]) ; on l'appelle parfois *presque* Gorenstein. Certainement, l'assertion 3 n'est pas applicable. Néanmoins, nous montrons qu'un raisonnement modéré donne le résultat cherché dans notre cas également.

Assertion 13. *Soient S une k-algèbre artinienne de Gorenstein et R le quotient S par le socle* $\mathrm{Soc}(S)$. *Alors $\gamma(R) = e(S)$.*

Démonstration. Si la fonction de Hilbert de l'algèbre S est *symétrique* (ce condition est vérifiée, par exemple, si S une intersection complète quasi homogène en vertu de la dualité de Macaulay), alors l'assertion est évidente. Le cas général est une conséquence immédiate de la [16, proposition 2.1]. □

Assertion 14. *Soit A_0 une algèbre artinienne de Gorenstein. Alors $\gamma(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}) = e(A_0)$.*

Démonstration. Pour tout A_0-module M il existe des isomorphismes

$$\mathrm{Soc}\left(M^\vee\right) \cong \mathrm{Soc}\left(\mathrm{Hom}_{A_0}\left(M, K(A_0)\right)\right) \cong \mathrm{Hom}_{A_0}\left(M/\mathfrak{m}M, K(A_0)\right) \cong M/\mathfrak{m}M,$$

où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{A_0}$ (voir [8, p. 6.10.1]).

Pour l'algèbre de Gorenstein on a $K(A_0) \cong A_0$, alors, en posant $M = \Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$, on obtient $\gamma(\mathrm{Der}_\mathsf{k}(A_0)) = m$. Il reste à utiliser la dualité canonique entre $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$ et $\mathrm{Der}_\mathsf{k}(A_0)$ de la proposition 1. □

Proposition 15. *Soient A_0 une algèbre artinienne de Gorenstein et $\overline{A}_0 = A_0/\mathrm{Soc}(A_0)$. Alors*

$$\gamma\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) = \gamma(\overline{A}_0) = e(A_0).$$

Le théorème suivant peut être considéré comme un analogue de l'assertion 3 pour l'algèbre presque Gorenstein.

Théorème 16. *Avec les notations ci-dessus, soit A_0 une k-algèbre artinienne de Gorenstein. Alors*

$$\ell\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) \geqslant \ell(\overline{A}_0) = \ell(A_0) - 1.$$

Démonstration. Nous donnerons une démonstration de ce théorème, inspirée de celle du [7, théorème 1]. Pour simplifier la notation, on désigne par R l'anneau artinien $\overline{A}_0$, par m la dimension plongée $e(R)$, et par M le $\overline{A}_0$-module fidèle $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$.

Comme dans la preuve de l'assertion 3, considérons d'abord les sous-modules propres non nuls irréductibles $N_i \subset M$, $i = 1, \ldots, m$, tels que $\bigcap N_i = 0$. Notons α_i les idéaux $\mathrm{Ann}(M/N_i) \subset R$ et montrons l'inégalité

$$\ell(M/N_i) \geqslant \ell(R/\alpha_i)$$

pour tout indice i. Puisque N_i sont des modules irréductibles, alors $\gamma(M/N_i) = 1$. Donc $(M/N_i)^\vee$ est une image homomorphe de l'anneau R (voir [7]). D'après le lemme 10, il existe des relations

$$\mathrm{Ann}\left((M/N_i)^\vee\right) = \mathrm{Ann}(M/N_i) = \alpha_i.$$

Par conséquent, $(M/N_i)^\vee \cong R/\alpha_i$, donc $\ell(M/N_i) \geqslant \ell(R/\alpha_i)$, comme requis. De plus, comme dans la preuve de l'assertion 3, on a $\bigcap \alpha_i = 0$, parce que M est un R-module fidèle, et $\gamma(\alpha_1) = 1$ puisque $\gamma(R) = \gamma(M) = m$. Montrons maintenant que $\ell(N_1) \geqslant \ell(\alpha_1)$. Mais puisque $\alpha_1 M \subset N_1$, cela est une conséquence immédiate de l'inégalité $\ell(\alpha_1 M) \geqslant \ell(\alpha_1)$, dont la validité s'établit comme suit.

Soit $g_1, \ldots, g_m$ le système *minimal* de générateurs du R-module M, où $m = \dim_{\mathsf{k}} M/\mathfrak{m}_R M = e(R)$. Soit $\beta_i = \operatorname{Ann}(g_i)$. Alors $\bigcap \beta_i = 0$, puisque l'annulateur de la somme des modules est égal à l'intersection de leurs annulateurs, et M est un module fidèle. Notez maintenant que $\operatorname{Soc}(\alpha_1)$ n'est pas contenu dans au moins un l'idéal β_i, car sinon $\operatorname{Soc}(\alpha_1)M = 0$ et cela signifie que le module M n'est pas fidèle. Soit, par exemple, $\operatorname{Soc}(\alpha_1) \not\subset \beta_1$. Alors $\operatorname{Soc}(\alpha_1) \cap \beta_1 = 0$ puisque $\gamma(\alpha_1) = 1$. De plus, $\alpha_1 \cap \beta_1 = 0$, car sinon l'extension $\operatorname{Soc}(\alpha_1) \subset \alpha_1$ ne peut pas être *essentiel* en raison de la relation évidente $\operatorname{Soc}(\alpha_1) \cap (\alpha_1 \cap \beta_1) = 0$. Ainsi, $\alpha_1 M \supset \alpha_1 g_1 \cong \alpha_1(R/\beta_1) \cong \alpha_1/\alpha_1 \cap \beta_1 = \alpha_1$, ce qui prouve l'inégalité $\ell(\alpha_1 M) \geqslant \ell(\alpha_1)$. Par conséquent,

$$\ell(M) = \ell(M/N_1) + \ell(N_1) \geqslant \ell(R/\alpha_1) + \ell(\alpha_1) = \ell(R). \qquad \square$$

Remarque 17. Si A_0 est un anneau artinien avec $\gamma(A_0) \leqslant 3$ et M est un A_0-module fidèle de type fini, alors $\ell(M) \geqslant \ell(A_0)$ (voir [7, Theorem 1]). Ceci établit aussitôt notre théorème 16 dans le cas $e(A_0) \leqslant 3$. Cependant, il y a des modules fidèles sur A_0, $\gamma(A_0) = 4$, pour lesquels $\ell(M) < \ell(A_0)$ (voir [7, Theorem 2]).

Théorème 18. *Soit X_0 un point épais de Gorenstein. Il existe alors l'inégalité*

$$\tau(X_0) \geqslant \ell(A_0) + e(X_0) - 2.$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord que pour les intersections complètes on a $\ell(\mathrm{T}_i(A_0)) = \ell(\mathrm{T}^j(A_0))$ pour tous les indices $i, j = 0, 1$, et que pour les algèbres artiniennes de Gorenstein il existe l'inégalité $\ell(\mathrm{T}^1(A_0)) \geqslant \ell(\mathrm{T}^0(A_0))$ (voir [3, Theorem 4.3]). Ensuite, dans les deux cas on a les isomorphismes $\mathrm{T}^0(A_0) \cong \mathrm{T}_0(A_0) \cong \Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$ puisque $K(A_0) \cong A_0$. Il est facile de vérifier (compte tenu du proposition 15) que le raisonnement de la démonstration de l'assertion 4, légèrement modifié, est applicable pour le $\overline{A}_0$-module fidèle $\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}$. En conséquence, nous obtenons l'inégalité

$$\ell\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) \geqslant \ell\left(\overline{A}_0\right) + \gamma\left(\Omega^1_{A_0/\mathsf{k}}\right) - 1,$$

qui donne le résultat cherché. $\square$

Corollaire 19. *Soit X_0 un point épais de Gorenstein lissifiable (par exemple, une intersection complète). Alors*

$$\tau(X_0) \geqslant \mu(X_0) + e(X_0) - 1.$$

Démonstration. Dans ce cas $\mu(X_0) = \ell(A_0) - 1$. $\square$

Remarque 20. Ainsi, dans le cas des intersections complètes on a l'égalité $\tau = \mu$ si et seulement si la dimension plongée est égale à un, l'égalité $\tau = \mu + 1$ n'est réalisée que pour de telles singularités de dimension plongée deux, etc.

Bien sûr, il existe de nombreuses applications des résultats ci-dessus en algèbre abstraite et linéaire, en géométrie algébrique et analytique, en théorie des équations à coefficients dans les anneaux artiniens, et dans d'autres domaines des mathématiques pures et appliquées.

Déclaration d'intérêts

Les auteurs ne travaillent pas, ne conseillent pas, ne possèdent pas de parts, ne reçoivent pas de fonds d'une organisation qui pourrait tirer profit de cet article, et n'ont déclaré aucune autre affiliation que leurs organismes de recherche.

Références

[1] A. G. Aleksandrov, « Deformations of bouquets of quasihomogeneous one-dimensional singularities », *Funct. Anal. Appl.* **15** (1981), p. 53-55.

[2] A. G. Aleksandrov, « Duality and deformations of artinian algebras », in *Proceedings of the International Conference on the Theory of Rings, Algebras and Modules in Memory of A. I. Shirshov, Barnaul, USSR*, 1991, p. 134.

[3] A. G. Aleksandrov, « Duality, derivations and deformations of zero-dimensional singularities », in *Zero-dimensional schemes. Proceedings of the International Conference held in Ravello, Italy, June 8-13, 1992*, Walter de Gruyter, 1994, p. 11-31.

[4] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Group, 1969.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Masson, 1970.

[6] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1996.

[7] T. H. Gulliksen, « On the length of faithful modules over artinian local rings », *Math. Scand.* **31** (1972), p. 78-82.

[8] J. Herzog and E. Kunz, *Der kanonische Module eines Cohen–Macaulay Rings*, Springer, 1971.

[9] A. A. Iarrobino, *Associated graded algebra of a Gorenstein Artin algebra*, American Mathematical Society, 1994.

[10] E. Kunz, « Almost complete intersections are not Gorenstein rings », *J. Algebra* **28** (1974), p. 111-115.

[11] E. Kunz, *Kähler Differentials*, Springer, 1986.

[12] E. Looijenga and J. Steenbrink, « Milnor number and Tjurina number of a complete intersection », *Math. Ann.* **271** (1985), p. 121-124.

[13] V. P. Palamodov, « Cohomology of analytical algebras », *Tr. Mosk. Mat. O-va* **44** (1982), p. 3-61.

[14] G. Scheja and U. Storch, « Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten », *J. Reine Angew. Math.* **278/279** (1975), p. 174-190.

[15] G. Scheja and H. Wiebe, « Über Derivationen von lokalen analytischen Algebren », in *Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971 & Convegno di Geometria, INDAM, Rome, 1972)*, Academic Press Inc., 1973, p. 161-192.

[16] W. Teter, « Rings which are a factor of a Gorenstein ring by its socle », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 153-162.