ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

# Comptes Rendus
# Mathématique

Claire Voisin

**Géométrie algébrique complexe, en mémoire de Jean-Pierre Demailly : Avant-propos**

Volume 362, Numéro spécial S1 (2024), p. 1-4

En ligne depuis le 6 juin 2024
Numéro publié le 6 juin 2024

**Numéro spécial :** Géométrie algébrique complexe, en mémoire de Jean-Pierre Demailly
**Rédacteur en chef invité :** Claire Voisin (CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche, France)

https://doi.org/10.5802/crmath.627



CENTRE MERSENNE

*Les* Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1778-3569

ACADÉMIE DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

*Comptes Rendus. Mathématique*
**2024**, Vol. 362, Numéro spécial S1, p. 1-4
https://doi.org/10.5802/crmath.627

Avant-propos / *Foreword*
Géométrie algébrique / *Algebraic geometry*

Géométrie algébrique complexe, en mémoire de Jean-Pierre Demailly / *Complex algebraic geometry, in memory of Jean-Pierre Demailly*

# Géométrie algébrique complexe, en mémoire de Jean-Pierre Demailly : Avant-propos

## *Complex algebraic geometry, in memory of Jean-Pierre Demailly: Foreword*

**Claire Voisin** [a]

[a] CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche, France

The English version is available after the French version

Demailly est un spécialiste d'analyse et de géométrie algébrique complexes. Son œuvre s'inscrit dans une grande tradition mathématique, remontant à Riemann, qui étudie les variétés algébriques sur le corps des nombres complexes sous l'angle de la géométrie différentielle complexe et leur applique des méthodes qui peuvent être très analytiques. Par exemple, Hodge développa la théorie des formes harmoniques et l'appliqua aux variétés kählériennes compactes, produisant le fameux théorème de décomposition de Hodge, qui reste de nos jours l'énoncé le plus qualitatif dont on dispose concernant la topologie des variétés algébriques projectives sur les nombres complexes. Il fut suivi de peu par Kodaira et son magnifique théorème de plongement, donnant la généralisation optimale du théorème de plongement de Riemann pour les surfaces de Riemann compactes. Demailly s'inscrit dans cette tradition et plusieurs de ses contributions majeures sont liées aux travaux de Kodaira qu'elles généralisent d'une façon spectaculaire et extrêmement importante pour la géométrie algébrique moderne.

Demailly appartient aussi à l'école de Lelong, qui utilise l'analyse pour étudier des objets beaucoup moins, voire pas du tout, réguliers, à savoir des courants au lieu de formes différentielles. On sait que les fonctions holomorphes sur une variété complexe compacte connexe sont constantes. On leur substitue donc des sections holomorphes de fibrés en droites holomorphes, le quotient de deux telles sections fournissant une fonction méromorphe. C'est la « positivité » de ce fibré en droites qui garantit l'existence de telles sections non identiquement nulles. Mais de quelle notion de positivité s'agit-il ? Dans le théorème de Kodaira, la positivité est donnée par le choix d'une métrique de classe $C^\infty$ sur le fibré en droites, telle que la forme de Chern, ou courbure de la connexion de Chern associée, soit positive dans le sens le plus fort possible, c'est-à-dire soit une forme de Kähler. La conclusion est alors que le fibré en droites est ample, ce qui est aussi la plus forte notion de positivité pour un fibré en droites dont on dispose en géométrie algébrique.

Demailly a utilisé la théorie et l'analyse des courants de courbure associés à des métriques moins régulières et cela lui a permis d'introduire et caractériser des notions moins restrictives de positivité, telles que la pseudo-effectivité, pour les fibrés en droites. C'est via les estimées $L^2$ à la Hörmander qu'il caractérise la pseudo-effectivité. En combinant ce type de techniques avec la résolution d'équation de Monge–Ampère à second membre singulier, il a également été un pionnier sur le problème de la grande amplitude effective, où l'on demande quelles puissances tensorielles d'un fibré en droites ample possèdent suffisamment de sections pour fournir un plongement dans l'espace projectif.

Une variété complexe ou algébrique lisse possède toujours au moins un fibré en droites holomorphe, à savoir son fibré canonique (qui peut être trivial). La géométrie birationnelle dans sa forme moderne étudie les propriétés du fibré canonique. C'est un fait remarquable que les formes pluricanoniques des variétés projectives lisses sont contravariantes sous les applications rationnelles dominantes entre variétés de même dimension. L'une des grandes conjectures du domaine est qu'une variété projective lisse est uniréglée, c'est-à-dire couverte par une famille de courbes rationnelles (ou surfaces de Riemann de genre 0), si et seulement si elle ne possède aucune forme pluricanonique non nulle (le « seulement si » étant facile). Dans le magnifique article *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension* [1], Boucksom, Demailly, Păun et Peternell montrent qu'une variété projective lisse est uniréglée si et seulement si son fibré canonique n'est pas pseudo-effectif, ce qui est une condition plus forte que l'annulation des plurigenres, mais l'énoncé constitue néanmoins un pas important vers cette conjecture. Cet article fournit aussi une caractérisation duale (dans l'esprit de Moishezon–Nakai) extrêmement intéressante du cône des diviseurs pseudo-effectifs.

Une autre contribution majeure de Demailly est l'article *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold* [2] écrit avec Păun, où ils démontrent un superbe résultat généralisant le critère de Moishezon–Nakai pour l'amplitude des fibrés en droites. Le critère de Moishezon–Nakai dit qu'un fibré en droites est ample s'il est de degré strictement positif sur toutes les courbes contenues dans la variété et plus généralement, les puissances de sa forme de courbure (ou première classe de Chern) sont d'intégrale strictement positive sur tout fermé algébrique (ou analytique) de la variété. Le théorème de Demailly–Păun étend ce résultat à la positivité des classes de formes fermées de type $(1,1)$ sur une variété kählérienne compacte. Dans ce cas, la variété peut ne contenir aucune sous-variété complexe propre, mais leur résultat est que le cône des classes $(1,1)$ positives est une composante connexe du cône déterminé par la positivité de toutes ces intégrales.

Demailly est également un leader en analyse complexe et il fait partie des rares mathématiciens dont l'œuvre a une grande influence scientifique dans plusieurs domaines. Son école, l'ensemble de ses étudiants et leurs orientations mathématiques, témoignent largement de cette ouverture. La raison pour laquelle je n'ai mentionné ci-dessus que certains de ses résultats liés à la géométrie complexe (algébrique ou kählérienne) est non seulement le fait que je ne suis pas moi-même compétente dans la partie « analyse complexe », mais aussi que le présent volume rassemble des articles relevant pour la plupart de la géométrie algébrique complexe. Un autre volume en hommage à Demailly, d'inspiration plus analytique, sera publié au PAMQ.

Jean-Pierre Demailly était un grand scientifique inspiré à la fois par l'analyse et la géométrie. Il laisse une œuvre magnifique d'un impact considérable. Ce volume qui lui est consacré célèbre la partie de son œuvre touchant la géométrie algébrique et rend hommage à une personnalité exceptionnelle à tous points de vue.

Claire Voisin
CNRS, IMJ-PRG

## English version

Demailly's work is mainly devoted to complex analysis and algebraic geometry. It follows a great mathematical tradition, going back to Riemann, where algebraic varieties over the field of complex numbers are studied via complex differential geometry, using methods from analysis. For example, Hodge developped the theory of harmonic forms and applied it to compact Kähler manifolds, proving the famous Hodge decomposition theorem, which is still today the most qualitative theorem concerning the topology of projective algebraic varieties over the field of complex numbers. Soon after, Kodaira proved his magnificent embedding theorem, establishing the optimal generalization in higher dimension of the Riemann embedding theorem for compact Riemann surfaces. Demailly continues this tradition and several of his major contributions, which are related to the work of Kodaira, generalize it in a spectacular and extremely important way for modern algebraic geometry.

Demailly also belongs to the Lelong school, where analysis is used to study objects with very low regularity, namely currents instead of differential forms. It is known that holomorphic functions on a compact connected complex manifold are constant. We thus use as a substitute holomorphic sections of holomorphic line bundles, the quotient of two such sections being a meromorphic function. The "positivity" of this line bundle guarantees the existence of such nonzero sections. The question is "which notion of positivity do we use ?". In the Kodaira theorem, positivity is given by the choice of a $C^\infty$ metric on the line bundle, such that the Chern form, or curvature of the associated Chern connection, is positive in the strongest possible sense, namely is a Kähler form. The conclusion then is that the line bundle is ample, which is also the strongest positivity notion for a line bundle that appears in algebraic geometry. Demailly used the theory and the analysis of curvature currents associated to less regular metrics and this led him to introduce and characterize less restrictive notions of positivity, such as pseudo-effectivity, for line bundles. He succeeded characterizing pseudo-effectivity via $L^2$ estimates à la Hörmander. Combining this type of technics with the resolution of singular Monge–Ampère equations, he obtained pioneering results on the problem of effective very ampleness, where one asks which powers of an ample line bundle have enough global sections to provide an embedding in projective space.

A complex manifold or smooth algebraic variety always carries at least one holomorphic (algebraic) line bundle, namely its canonical bundle (which can be trivial). Modern birational geometry studies the properties of the canonical bundle. It is a remarkable fact that pluricanonical forms on smooth projective varieties are contravariant under the dominant rational maps between varieties of the same dimension. A big conjecture in the field is that a smooth projective variety is uniruled, that is swept-out by a family of rational curves (or genus 0 Riemann surfaces), if and only if it has no nonzero pluricanonical form (the "only if" being easy). In the superb article *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension* [1], Boucksom, Demailly, Păun and Peternell prove that a smooth projective variety is uniruled if and only if its canonical bundle is not pseudo-effective, a condition which is stronger than the vanishing of the plurigenera, but the statement is nevertheless an important step towards the conjecture. This paper also provides a very interesting dual characterization (in the spirit of Moishezon–Nakai) of the cone of pseudo-effective divisors.

Another major contribution of Demailly is the paper *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold* [2], written with Păun, where they prove a superb result generalizing the Moishezon–Nakai criterion for the ampleness of the line bundle. The Moishezon–Nakai criterion says that a line bundle an a smooth projective variety is ample if has strictly positive degree on all curves contained in the variety and more generally, the powers of its curvature form (or first Chern class) have strictly positive integral on any closed algebraic (or analytic) subset of the variety. The Demailly–Păun theorem extends this result to the positivity of classes of closed forms of type $(1,1)$ on a compact Kähler manifold. In this case, the manifold may not contain any proper closed analytic subset, but their result is that the cone of positive $(1,1)$-classes is a connected component of the cone determined by the positivity of all these integrals.

Demailly is also a leader in complex analysis and he is one of the few mathematicians whose work is greatly influential in several areas. His school, his students and their mathematical orientations, illustrate this breadth. The reason why I mentioned above only his results related to complex geometry (algebraic or Kähler) is not only the fact that I am not myself competent in the analytic aspects of his work, but also that mots papers presented in this volume are related to complex algebraic geometry. Another volume dedicated to Demailly, with more emphasis on analysis, will be published in PAMQ.

Jean-Pierre Demailly was a great scientist inspired both by analysis and geometry. His mathematical work is splendid and highly influential. This volume dedicated to him emphasizes the algebrogeometric aspects of his work and honors an exceptional personality.

Claire Voisin
CNRS, IMJ-PRG

## Références

[1] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun and T. Peternell, « The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension », *J. Algebr. Geom.* **22** (2013), no. 2, p. 201-248.

[2] J.-P. Demailly and M. Păun, « Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold », *Ann. Math.* **159** (2004), no. 3, p. 1247-1274.