ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus

Mathématique

Jean-Pierre Tignol

Invariants de Witt des involutions de bas degré en caractéristique 2

Volume 362 (2024), p. 1261-1271

En ligne depuis le 5 novembre 2024

https://doi.org/10.5802/crmath.640

Cet article est publié sous la licence
Creative Commons Attribution 4.0 International.
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1778-3569

ACADÉMIE DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus. Mathématique
2024, Vol. 362, p. 1261-1271
https://doi.org/10.5802/crmath.640

Article de recherche / *Research article*
Algèbre / *Algebra*

Invariants de Witt des involutions de bas degré en caractéristique 2

Witt invariants of involutions of low degree in characteristic 2

Jean-Pierre Tignol [a]

[a] ICTEAM, UCLouvain, 4 avenue G. Lemaître, boîte L4.05.01, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

Courriel : Jean-Pierre.Tignol@uclouvain.be

Résumé. À toute involution symplectique sur une algèbre simple centrale de degré 8 sur un corps de caractéristique 2 sont associées de manière canonique une 3-forme de Pfister et une 5-forme de Pfister quadratiques, qui détiennent des informations sur la structure de l'algèbre à involution. La même construction associe une 2-forme de Pfister quadratique et une 4-forme de Pfister quadratique à toute involution unitaire et une quasi 1-forme de Pfister et une quasi 3-forme de Pfister à toute involution orthogonale sur une algèbre simple centrale de degré 4.

Abstract. A 3-fold and a 5-fold quadratic Pfister forms are canonically associated to every symplectic involution on a central simple algebra of degree 8 over a field of characteristic 2. The same construction on central simple algebras of degree 4 associates to every unitary involution a 2-fold and a 4-fold Pfister quadratic forms, and to every orthogonal involution a 1-fold and a 3-fold quasi-Pfister forms. These forms hold structural information on the algebra with involution.

Mots-clés. Algèbre simple centrale à involution, composition de formes quadratiques, formes quadratiques de Pfister.

Keywords. Central simple algebra with involution, composition of quadratic forms, quadratic Pfister forms.

Classification Mathématique (2020). 16W10, 11E81.

Financement. Ce travail a bénéficié d'une subvention du Fonds de la Recherche Scientifique–FNRS portant la référence CDR J.0159.19.

Manuscrit reçu le 2 mai 2023, révisé le 21 février 2024, accepté le 15 avril 2024.

Dans tout ce texte, A désigne une algèbre simple centrale sur un corps F et σ une involution symplectique sur A, c'est-à-dire un anti-automorphisme d'ordre 2 qui après extension des scalaires à un corps de déploiement est adjoint à une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On note

$$\operatorname{Symd}(\sigma) = \{x + \sigma(x) \mid x \in A\}$$

et, pour $a \in \operatorname{Symd}(\sigma)$, on note $\operatorname{Prp}_{\sigma,a}(X)$ le polynôme pfaffien réduit de a, qui est le polynôme unitaire dont le carré est le polynôme caractéristique réduit $\operatorname{Pcrd}_a(X)$. Si $\deg A = 2m$, alors

$$\operatorname{Prp}_{\sigma,a}(X) = X^m - \operatorname{Trp}_\sigma(a) X^{m-1} + \operatorname{Srp}_\sigma(a) X^{m-2} - \cdots + (-1)^m \operatorname{Nrp}_\sigma(a)$$

pour $\operatorname{Trp}_\sigma$, $\operatorname{Srp}_\sigma$ et $\operatorname{Nrp}_\sigma\colon \operatorname{Symd}(\sigma) \to F$ des formes de degré 1, 2 et m respectivement.

Théorème 1. *Si* $\deg A = 8$ *et la caractéristique de* F *est* 2*, alors il existe une* 3*-forme quadratique de Pfister* π_3 *et une* 5*-forme quadratique de Pfister* π_5 *déterminées de manière unique à isométrie près par la propriété suivante : la classe de* Srp_σ *dans le groupe de Witt* I_qF *se décompose comme suit :*

$$\mathrm{Srp}_\sigma = [1,1] + \pi_3 + \pi_5$$

où $[1,1]$ *est la forme* $X^2 + XY + Y^2$*. De plus,*

(i) π_5 *est multiple de* π_3*, c'est-à-dire qu'il existe* $a_1, a_2 \in F^\times$ *tels que* $\pi_5 = \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle \pi_3$ *;*
(ii) *la forme* π_3 *est hyperbolique si et seulement si l'algèbre* A *se décompose en produit tensoriel d'algèbres de quaternions stables sous* σ *;*
(iii) *la forme* π_5 *est hyperbolique si et seulement si* $\mathrm{Symd}(\sigma)$ *contient un élément non central dont le carré est central.*

La démonstration est donnée dans la section 3 : voir le corollaire 6 et les propositions 8 et 11. On peut cependant démontrer d'emblée l'unicité des formes π_3 et π_5 : si $\mathrm{Srp}_\sigma = [1,1] + \pi_3 + \pi_5 = [1,1] + \pi_3' + \pi_5'$, alors $\pi_3 - \pi_3' = \pi_5' - \pi_5 \in I_q^5F$; mais la classe de Witt de $\pi_3 - \pi_3'$ est représentée par une forme de dimension 16, donc le *Hauptsatz* d'Arason–Pfister [5, théorème 23.7] entraîne $\pi_3 = \pi_3'$, donc aussi $\pi_5 = \pi_5'$.

La démonstration des autres assertions repose de manière essentielle sur l'existence d'algèbres biquadratiques étales dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$, qui est démontrée dans [2] et exploitée de manière analogue dans [3]. Dans cette dernière référence, on trouve une construction de la forme π_3 (qui y est appelée *forme de Pfister discriminante*), ainsi qu'une preuve du critère de décomposabilité correspondant, en toute caractéristique. Dans le présent travail, la restriction à la caractéristique 2 permet d'importantes simplifications ainsi que la définition de la forme π_5, qui ne semble pas admettre d'analogue en caractéristique différente de 2.

Les techniques utilisées dans la démonstration du théorème 1 peuvent aussi servir pour les involutions unitaires et orthogonales sur les algèbres simples centrales de degré 4 : les résultats correspondants sont détaillés dans les théorèmes 12 et 13 énoncés dans la dernière section. Comme dans le cas symplectique, [3] présente des constructions analogues, mais limitées aux formes de Pfister « discriminantes », en toute caractéristique dans le cas unitaire et en caractéristique différente de 2 dans le cas orthogonal.

1. La forme Srp_σ

Dans cette section, $\deg A = 2m$ avec $m \geq 1$ et la caractéristique de F est arbitraire. On note Trd_A la trace réduite de A et Srd_A la forme quadratique sur A qui donne le coefficient du terme de degré $2m-2$ du polynôme caractéristique réduit.

Lemme 2. *Pour* $x, y \in \mathrm{Symd}(\sigma)$ *avec* $x = x' + \sigma(x')$ *et* $y = y' + \sigma(y')$*, on a* $\mathrm{Trp}_\sigma(x) = \mathrm{Trd}_A(x')$ *et*

$$\mathrm{Srp}_\sigma(x+y) - \mathrm{Srp}_\sigma(x) - \mathrm{Srp}_\sigma(y) = \mathrm{Trp}_\sigma(x)\,\mathrm{Trp}_\sigma(y) - \mathrm{Trd}_A(xy').$$

Démonstration. Il suffit d'établir ces relations après extension des scalaires à un corps de déploiement. On peut donc supposer que A est une algèbre de matrices et que σ est adjointe à une forme alternée non dégénérée. Alors x' et y' sont obtenus par spécialisation de matrices génériques; il suffit donc de montrer que les relations valent lorsque x' et y' sont des matrices génériques sur $\mathbb{Z}$. En comparant les coefficients des deux membres de l'équation

$$(X^m - \mathrm{Trp}_\sigma(x)X^{m-1} + \mathrm{Srp}_\sigma(x)X^{m-2} - \cdots)^2 = X^{2m} - \mathrm{Trd}_A(x)X^{2m-1} + \mathrm{Srd}_A(x)X^{2m-2} - \cdots$$

on obtient

$$2\,\mathrm{Trp}_\sigma(x) = \mathrm{Trd}_A(x) \qquad \text{et} \qquad 2\,\mathrm{Srp}_\sigma(x) + \mathrm{Trp}_\sigma(x)^2 = \mathrm{Srd}_A(x). \tag{1}$$

Or, $\mathrm{Trd}_A(x) = \mathrm{Trd}_A(x' + \sigma(x')) = 2\,\mathrm{Trd}_A(x')$, donc $2\,\mathrm{Trp}_\sigma(x) = 2\,\mathrm{Trd}_A(x')$. Comme 2 n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}$, il en résulte $\mathrm{Trp}_\sigma(x) = \mathrm{Trd}_A(x')$.

Par ailleurs, la relation suivante est établie en [7, (0.2)] :

$$\mathrm{Srd}_A(x+y) - \mathrm{Srd}_A(x) - \mathrm{Srd}_A(y) = \mathrm{Trd}_A(x)\,\mathrm{Trd}_A(y) - \mathrm{Trd}_A(xy).$$

En y remplaçant $\mathrm{Srd}_A(x+y)$, $\mathrm{Srd}_A(x)$ et $\mathrm{Srd}_A(y)$ par les expressions données par la deuxième équation de (1), on obtient

$$2\,\mathrm{Srp}_\sigma(x+y) - 2\,\mathrm{Srp}_\sigma(x) - 2\,\mathrm{Srp}_\sigma(y) + 2\,\mathrm{Trp}_\sigma(x)\,\mathrm{Trp}_\sigma(y) = \mathrm{Trd}_A(x)\,\mathrm{Trd}_A(y) - \mathrm{Trd}_A(xy).$$

Vu la première équation de (1), et vu que $\mathrm{Trd}_A(xy) = \mathrm{Trd}_A(xy') + \mathrm{Trd}_A(x\sigma(y')) = 2\,\mathrm{Trd}_A(xy')$ (la dernière égalité résultant du fait que $x = \sigma(x)$), on en déduit

$$2\,\mathrm{Srp}_\sigma(x+y) - 2\,\mathrm{Srp}_\sigma(x) - 2\,\mathrm{Srp}_\sigma(y) = 2\,\mathrm{Trp}_\sigma(x)\,\mathrm{Trp}_\sigma(y) - 2\,\mathrm{Trd}_A(xy').$$

La deuxième formule de l'énoncé en découle car 2 n'est pas diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}$. □

Soit $b_\sigma\colon \mathrm{Symd}(\sigma) \times \mathrm{Symd}(\sigma) \to F$ la forme polaire de Srp_σ, donnée par

$$b_\sigma(x,y) = \mathrm{Srp}_\sigma(x+y) - \mathrm{Srp}_\sigma(x) - \mathrm{Srp}_\sigma(y) \quad \text{pour } x,\, y \in \mathrm{Symd}(\sigma).$$

La forme quadratique Srp_σ est dite non singulière lorsque le radical de sa forme polaire b_σ est réduit à $\{0\}$.

Corollaire 3. *Si la caractéristique de F ne divise pas $m-1$, la forme Srp_σ est non singulière.*

Démonstration. Si x est dans le radical de b_σ, c'est-à-dire que $b_\sigma(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{Symd}(\sigma)$, alors le lemme 2 donne

$$\mathrm{Trp}_\sigma(x)\,\mathrm{Trd}_A(y') - \mathrm{Trd}_A(xy') = 0 \qquad \text{pour tout } y' \in A.$$

Alors $\mathrm{Trd}_A\big((\mathrm{Trp}_\sigma(x) - x)y'\big) = 0$ pour tout $y' \in A$. Comme le radical de la forme bilinéaire $\mathrm{Trd}_A(XY)$ est nul, il en découle $x = \mathrm{Trp}_\sigma(x) \in F$. Or, $\mathrm{Trp}_\sigma(x) = mx$ pour $x \in F$, donc la dernière équation entraîne $(m-1)x = 0$, d'où $x = 0$ si $m-1$ est inversible dans F. □

2. Décomposition orthogonale

Dans cette section, on suppose $\deg A = 8$ mais on n'impose aucune restriction sur la caractéristique de F. D'après [2, théorème 7.4, théorème 4.1] on peut trouver dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$ une F-algèbre étale L qui est produit tensoriel de deux F-algèbres étales quadratiques et telle que A est libre comme L-module. Comme le Vierergruppe est le seul sous-groupe abélien élémentaire du groupe de permutations de quatre éléments qui agisse transitivement, il y a une unique manière (à automorphisme du groupe près) de définir sur L une action d'un groupe G abélien élémentaire qui en fait une F-algèbre G-galoisienne. Soit

$$G = \{1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \qquad \text{où } \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1.$$

Pour $i = 1,2,3$ on note $L_i = L^{\alpha_i}$ la sous-algèbre de L fixe sous α_i. C'est une F-algèbre quadratique étale, dont on note $T_i\colon L_i \to F$ et $N_i\colon L_i \to F$ la trace et la norme. On définit aussi

$$W_i = \{x \in \mathrm{Symd}(\sigma) \mid x\ell = \alpha_i(\ell)x \text{ pour tout } \ell \in L\}.$$

La multiplication dans A fait de chaque W_i un module à droite sur L_i.

Proposition 4. *Pour la forme polaire b_σ de Srp_σ, l'espace $\mathrm{Symd}(\sigma)$ se décompose en somme orthogonale :* $\mathrm{Symd}(\sigma) = L \overset{\perp}{\oplus} W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2 \overset{\perp}{\oplus} W_3$. *De plus, pour chaque $i = 1, 2, 3$ le L_i-module W_i est libre de rang 4 et l'élévation au carré $x \mapsto x^2$ définit une forme quadratique non singulière $q_i\colon W_i \to L_i$. Pour $x \in W_i$ on a $\mathrm{Trp}_\sigma(x) = 0$ et $\mathrm{Srp}_\sigma(x) = -T_i(x^2)$, quel que soit $i = 1, 2, 3$.*

Démonstration. Il suffit de voir que les énoncés valent après extension des scalaires. On peut donc supposer que A et L sont déployées : soit $A = \mathrm{End}_F V$ pour un espace vectoriel V de dimension 8 et $L = Fp_1 \oplus Fp_2 \oplus Fp_3 \oplus Fp_4$ où $p_1, \dots, p_4$ sont des projections de V sur des sous-espaces $V_1, \dots, V_4$ supplémentaires, c'est-à-dire que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_4$. Comme A est libre comme L-module, les V_i sont tous de même dimension, donc $\dim V_i = 2$ pour tout i.

L'involution σ est adjointe à une forme bilinéaire alternée non singulière sur V. Comme chaque p_i est symétrique sous σ, les espaces V_i sont orthogonaux deux à deux. En concaténant des bases symplectiques de ceux-ci, on obtient une base symplectique de V, par rapport à laquelle on peut représenter A par des matrices : $A = M_8(F)$. Pour la facilité des calculs, on décompose les matrices en blocs d'ordre 2, ce qui conduit à représenter $A = M_4(Q)$ où $Q = M_2(F)$ est l'algèbre de quaternions déployée. Dans cette représentation, σ est donnée par $\sigma(a) = \overline{a}^t$, où t est la transposition et $\overline{}$ est la conjugaison de Q (qui est son unique involution symplectique), agissant sur chaque entrée des matrices de $M_4(Q)$. L'algèbre L est alors identifiée à l'algèbre diagonale dont les entrées sont dans F : pour $x_1, \dots, x_4 \in F$

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_4(Q).$$

En utilisant $\mathrm{Symd}(\overline{}) = F$ dans Q, on vérifie sans peine :

$$\mathrm{Symd}(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \overline{x_{12}} & x_2 & x_{23} & x_{24} \\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & x_3 & x_{34} \\ \overline{x_{14}} & \overline{x_{24}} & \overline{x_{34}} & x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in F \text{ et } x_{ij} \in Q \right\}.$$

Quitte à renuméroter les p_i, on peut supposer que α_1 échange p_1 et p_2 (donc aussi p_3 et p_4) et que α_2 échange p_1 et p_3 (donc aussi p_2 et p_4). Alors

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\mathrm{diag}(x_1, x_1, x_2, x_2) \mid x_1, x_2 \in F\}, \\ L_2 &= \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in F\}, \\ L_3 &= \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, x_2, x_1) \mid x_1, x_2 \in F\}. \end{aligned}$$

Le calcul donne

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & \\ \overline{x_{12}} & 0 & & \\ & & 0 & x_{34} \\ & & \overline{x_{34}} & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_{12}, x_{34} \in Q \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} & & x_{13} & 0 \\ & & 0 & x_{24} \\ \overline{x_{13}} & 0 & & \\ 0 & \overline{x_{24}} & & \end{pmatrix} \middle| \; x_{13}, x_{24} \in Q \right\}$$

et

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} & & 0 & x_{14} \\ & & x_{23} & 0 \\ 0 & \overline{x_{23}} & & \\ \overline{x_{14}} & 0 & & \end{pmatrix} \middle| \; x_{14}, x_{23} \in Q \right\}.$$

Il est donc clair que $\mathrm{Symd}(\sigma) = L \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. On voit aussi que pour tout $i = 1, 2, 3$ le L_i-module W_i est isomorphe à $Q_{L_i} \simeq M_2(F) \times M_2(F)$ et que q_i est une forme quadratique isométrique à $(n_Q)_{L_i}$, où $n_Q \colon Q \to F$ est la norme réduite (qui est le déterminant de $M_2(F)$) ; cette forme quadratique est donc non singulière.

Pour $x \in W_i$ on peut écrire $x = x' + \sigma(x')$ avec $x' \in M_4(Q)$ une matrice triangulaire dont la diagonale est nulle. Le lemme 2 donne alors $\mathrm{Trp}_\sigma(x) = \mathrm{Trd}_A(x') = 0$. Pour $y \in W_j$ avec $j \neq i$ ou $y \in L$ on a aussi $\mathrm{Trd}_A(x'y) = 0$, donc le lemme 2 donne aussi $b_\sigma(x, y) = 0$, ce qui établit que L, W_1, W_2 et W_3 sont orthogonaux deux à deux.

Un calcul direct montre que le polynôme caractéristique réduit de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ \overline{x} & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(Q)$ est $(X^2 - n_Q(x))^2$. Dès lors, pour

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & \\ \overline{x_{12}} & 0 & & \\ & & 0 & x_{34} \\ & & \overline{x_{34}} & 0 \end{pmatrix} \in W_1, \qquad \text{avec } x_{12}, x_{34} \in Q,$$

on a $\mathrm{Prp}_{\sigma,x}(X) = (X^2 - n_Q(x_{12}))(X^2 - n_Q(x_{34}))$, donc $\mathrm{Srp}_\sigma(x) = -n_Q(x_{12}) - n_Q(x_{34}) = -T_1(x^2)$. On démontre de même que $\mathrm{Srp}_\sigma(x) = -T_i(x^2)$ pour $x \in W_i$ avec $i = 2$ ou 3. □

3. Démonstration du théorème 1

Poursuivant avec les mêmes notations que dans la section précédente, on suppose à présent que la caractéristique de F est 2. D'après le corollaire 3, la forme quadratique Srp_σ est non singulière; il en est donc de même de ses restrictions aux espaces W_i, vu la proposition 4.

Proposition 5. *Pour $x_1 \in W_1$ et $x_2 \in W_2$, on pose $x_1 * x_2 = x_1x_2 + x_2x_1$. Alors $x_1 * x_2 \in W_3$ et* $\mathrm{Srp}_\sigma(x_1 * x_2) = \mathrm{Srp}_\sigma(x_1)\,\mathrm{Srp}_\sigma(x_2)$.

Démonstration. Il suffit de voir que l'énoncé vaut après extension des scalaires. On peut donc supposer que L et A sont déployées, et reprendre les notations de la démonstration de la proposition 4. Si $x_{12}, x_{34}, x_{13}, x_{24} \in Q$ sont tels que

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & & \\ \overline{x_{12}} & 0 & & \\ & & 0 & x_{34} \\ & & \overline{x_{34}} & 0 \end{pmatrix} \in W_1 \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{pmatrix} & & x_{13} & 0 \\ & & 0 & x_{24} \\ \overline{x_{13}} & 0 & & \\ 0 & \overline{x_{24}} & & \end{pmatrix} \in W_2,$$

alors

$$x_1 * x_2 = \begin{pmatrix} & & & x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34} \\ & & \overline{x_{12}}x_{13} + x_{24}\overline{x_{34}} & \\ & x_{34}\overline{x_{24}} + \overline{x_{13}}x_{12} & & \\ \overline{x_{34}}\,\overline{x_{13}} + \overline{x_{24}}\,\overline{x_{12}} & & & \end{pmatrix} \in W_3.$$

De plus, il ressort de la preuve de la proposition 4 que

$$\mathrm{Srp}_\sigma(x_1) = n_Q(x_{12}) + n_Q(x_{34}), \qquad \mathrm{Srp}_\sigma(x_2) = n_Q(x_{13}) + n_Q(x_{24})$$

et

$$\mathrm{Srp}_\sigma(x_1 * x_2) = n_Q(x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34}) + n_Q(\overline{x_{12}}x_{13} + x_{24}\overline{x_{34}}).$$

On développe le second membre de cette dernière équation : en notant $t_Q\colon Q \to F$ la trace réduite (qui est la trace de $M_2(F)$),

$$\begin{aligned} &\mathrm{Srp}_\sigma(x_1 * x_2) \\ &\quad = n_Q(x_{12}x_{24}) + n_Q(x_{13}x_{34}) + t_Q(x_{12}x_{24}\overline{x_{34}}\;\overline{x_{13}}) + n_Q(\overline{x_{12}}x_{13}) + n_Q(x_{24}\overline{x_{34}}) + t_Q(\overline{x_{12}}x_{13}x_{34}\overline{x_{24}}). \end{aligned}$$

Or, $t_Q(x_{12}x_{24}\overline{x_{34}}\;\overline{x_{13}}) = t_Q(\overline{x_{12}}x_{13}x_{34}\overline{x_{24}})$. Comme la caractéristique est 2, l'expression de $\mathrm{Srp}_\sigma(x_1 * x_2)$ se simplifie :

$$n_Q(x_{12}x_{24}) + n_Q(x_{13}x_{34}) + n_Q(\overline{x_{12}}x_{13}) + n_Q(x_{24}\overline{x_{34}}) = \big(n_Q(x_{12}) + n_Q(x_{34})\big)\cdot\big(n_Q(x_{13}) + n_Q(x_{24})\big). \quad \square$$

Corollaire 6. *Il existe une* 3*-forme quadratique de Pfister π_3 et des éléments $a_1, a_2 \in F^\times$ tels que les restrictions de* Srp_σ *à W_1, W_2 et W_3 soient liées par*

$$\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1} \simeq \langle a_1\rangle\pi_3, \qquad \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_2} \simeq \langle a_2\rangle\pi_3, \qquad \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_3} \simeq \langle a_1a_2\rangle\pi_3.$$

Pour la forme π_3 et a_1, a_2 ci-dessus, la classe de Witt de Srp_σ *se décompose comme suit :* $\mathrm{Srp}_\sigma = [1,1] + \pi_3 + \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\pi_3$.

Démonstration. La proposition 5 montre que $*$ est une composition de formes quadratiques non singulières de dimension 8 : $(W_1, \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1}) \times (W_2, \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_2}) \to (W_3, \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_3})$ au sens de [1, section 2]. Les formes $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_i}$ sont donc multiples scalaires d'une même 3-forme de Pfister π_3, d'après [1, proposition 2.9]. Si $x_1 \in W_1$ et $x_2 \in W_2$ sont des vecteurs non nuls et non isotropes, alors en posant $a_i = \mathrm{Srp}_\sigma(x_i)$ pour $i = 1, 2$, on a $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_i} \simeq \langle a_i\rangle\pi_3$ pour $i = 1, 2$. De plus, $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_3}$ représente a_1a_2 puisque $\mathrm{Srp}_\sigma(x_1 * x_2) = \mathrm{Srp}_\sigma(x_1)\,\mathrm{Srp}_\sigma(x_2)$, donc $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_3} \simeq \langle a_1a_2\rangle\pi_3$. Vu la proposition 4, on obtient

$$\mathrm{Srp}_\sigma \simeq \mathrm{Srp}_\sigma|_L \perp \langle a_1\rangle\pi_3 \perp \langle a_2\rangle\pi_3 \perp \langle a_1a_2\rangle\pi_3,$$

et il ne reste plus qu'à voir que $\mathrm{Srp}_\sigma|_L$ est équivalente au sens de Witt à $[1,1]$. Cela résulte du calcul général de la « seconde trace » des algèbres étales dû à Bergé et Martinet [4, théorème 3.5], mais en l'occurrence on peut en donner une preuve explicite comme suit.

Si $\ell_1 \in L_1$ est tel que $T_1(\ell_1) = 1$, alors

$$\mathrm{Prp}_{\sigma,\ell_1}(X) = \bigl(X^2 + X + N_1(\ell_1)\bigr)^2,$$

donc $\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1) = 1 = \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1 + 1)$. De même, si $\ell_2 \in L_2$ est tel que $T_2(\ell_2) = 1$, alors

$$\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_2) = \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_2 + 1) = 1;$$

de plus, $\ell_1 + \ell_2 \in L_3$ et $T_3(\ell_1 + \ell_2) = 1$, donc

$$\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1 + \ell_2) = \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1 + \ell_2 + 1) = 1.$$

Ces égalités entraînent que $\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1 + \ell_2) - \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1) - \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_2) = 1$, donc la restriction de Srp_σ au sous-espace de L engendré par ℓ_1 et ℓ_2 est une forme quadratique isométrique à $[1,1]$. L'orthogonal de ce sous-espace contient 1 car $\mathrm{Srp}_\sigma(1) = 0$, $\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1+1) = \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_1)$ et $\mathrm{Srp}_\sigma(\ell_2+1) = \mathrm{Srp}_\sigma(\ell_2)$. Comme 1 est isotrope, on en déduit

$$\mathrm{Srp}_\sigma|_L \simeq [1,1] \perp [0,0]. \qquad \square$$

Exemple 7. Supposons $A = \mathrm{End}_Q V$ pour V un espace vectoriel de dimension 4 sur un corps de quaternions Q. Alors σ est adjointe à une forme hermitienne alternée h sur V pour l'involution canonique $\bar{\ }$ sur Q : voir [7, (4.2)]. On peut supposer que h représente 1 car h n'est déterminée qu'à un facteur scalaire près, et choisir une base de V par rapport à laquelle h est diagonale, soit $h = \langle 1, u_1, u_2, u_3\rangle$ pour certains u_1, u_2, $u_3 \in F^\times$. On peut prendre pour L la F-algèbre déployée engendrée par les projections p_1, p_2, p_3, p_4 sur les vecteurs de base. Si α_1 échange p_1 et p_2, ainsi que p_3 et p_4, alors un calcul semblable à celui de la démonstration de la proposition 4 montre que dans la représentation matricielle par rapport à la base choisie,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_1x & & \\ \bar{x} & 0 & & \\ & & 0 & u_3y \\ & & u_2\bar{y} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in Q \right\}.$$

Dès lors, en désignant par n_Q la forme norme réduite de Q, on obtient $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1} \simeq \langle u_1, u_2u_3\rangle n_Q$. De même, si α_2 échange p_1 et p_3 ainsi que p_2 et p_4, alors $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_2} \simeq \langle u_2, u_1u_3\rangle n_Q$ et $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_3} \simeq \langle u_3, u_1u_2\rangle n_Q$. Par conséquent,

$$\pi_3 = \langle 1, u_1u_2u_3\rangle n_Q \qquad \text{et} \qquad \pi_5 = \langle 1, u_1, u_2, u_3\rangle \pi_3.$$

Ce résultat corrobore le calcul dans [3, proposition 8.6] de la forme de Pfister discriminante π_3.

Revenant au cas général, on caractérise les cas où π_3 est hyperbolique.

Proposition 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) π_3 *est hyperbolique ;*

(ii) $(A,\sigma) \simeq (H_1,\sigma_1) \otimes (H_2,\sigma_2) \otimes (H_3,\sigma_3)$ *pour certaines algèbres de quaternions à involution* (H_i,σ_i) *;*

(iii) $(A,\sigma) \simeq (Q_1,\bar{\ }) \otimes (Q_2,\bar{\ }) \otimes (Q_3,\bar{\ })$ *pour certaines algèbres de quaternions* Q_i *avec leur involution canonique.*

Démonstration.

(i) ⇒ (ii). On choisit dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$ une F-algèbre biquadratique L comme dans la section 2. Sous l'hypothèse (i), la forme $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1}$ est isotrope, donc on peut trouver $x \in W_1$ non nul tel que $T_1(x^2) = 0$, ce qui revient à dire que $x^2 \in F$. Si $x^2 = 0$, alors la forme quadratique $q_1 \colon W_1 \to L_1$ d'élévation au carré est isotrope ; mais la proposition 4 montre que cette forme est non singulière, donc on peut trouver $y \in W_1$ tel que $xy + yx \in L_1^\times$. Alors pour $\lambda = (y^2+1)(xy+yx)^{-1} \in L_1$ on a $(x\lambda + y)^2 = 1$. Quitte à changer x, on peut donc toujours supposer $x^2 \in F^\times$. Comme la conjugaison par x induit sur L_2 l'automorphisme non trivial, x et L_2 engendrent une algèbre de quaternions H_1 stable sous σ. La restriction σ_1 de σ à H_1 est orthogonale : en effet, si $\ell \in L_2$ satisfait $T_2(\ell) = 1$, alors $x\ell + \ell x = x\ell + \sigma_1(x\ell) = x$, ce qui montre que x est dans $\mathrm{Symd}(\sigma_1)$, donc $\mathrm{Symd}(\sigma_1) \neq F$. Le centralisateur de H_1 dans A est une algèbre simple centrale de degré 4 sur laquelle σ se restreint en une involution symplectique, d'après [7, (2.23)]. Pour établir (ii), il suffit maintenant d'observer que ce centralisateur se décompose en produit de deux algèbres de quaternions stables sous l'involution ; cela résulte de [7, (16.16)] si la restriction de σ n'est pas hyperbolique, et de [3, proposition 5.3] si elle l'est.

(ii) ⇒ (iii). Sous l'hypothèse (ii), l'une au moins des involutions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ doit être symplectique, vu [7, (2.23)]. Disons $\sigma_1 = \bar{\ }$ et supposons que σ_2 soit orthogonale. D'après [7, (2.7)], il existe un élément inversible non central $j_2 \in H_2$ tel que $\overline{j_2} = j_2$ et $\sigma_2(h) = j_2 \bar{h} j_2^{-1}$ pour tout $h \in H_2$. Ces conditions entraînent $j_2^2 \in F^\times$, $\sigma_2(j_2) = j_2$, et pour $i_2 \in H_2$ tel que $j_2 i_2 j_2^{-1} = i_2 + 1$, on a $\sigma_2(i_2) = i_2$. Choisissons encore $i_1, j_1 \in H_1$ tels que $j_1^2 \in F^\times$ et $j_1 i_1 j_1^{-1} = i_1 + 1$, d'où $\sigma_1(i_1) = i_1 + 1$ puisque σ_1 est la conjugaison quaternionienne. Alors i_1 et $j_1 j_2$ (resp. $i_1 + i_2$ et j_2) engendrent une algèbre de quaternions Q_1 (resp. Q_2) et $(H_1,\sigma_1) \otimes (H_2,\sigma_2) = (Q_1,\bar{\ }) \otimes (Q_2,\bar{\ })$. Si σ_3 est orthogonale, on répète l'argument pour trouver une nouvelle décomposition de (A,σ) en produit d'algèbres de quaternions sur chacune desquelles la restriction de σ est l'involution canonique.

(iii) ⇒ (i). Pour $k = 1, 2, 3$, soient $i_k, j_k \in Q_k$ tels que $j_k^2 \in F^\times$ et $j_k i_k j_k^{-1} = i_k + 1$. Alors $L = F(i_1 + i_2, i_2 + i_3, i_3 + i_1)$ est une algèbre biquadratique comme dans la section 2. Si α_1 est l'automorphisme non trivial de L qui fixe $i_2 + i_3$, alors $j_1 \in W_1$ et $T_1(j_1^2) = 0$, donc $\mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1}$ est isotrope, et il en est de même de π_3. Comme π_3 est une forme de Pfister, elle est hyperbolique. □

Comme toute involution symplectique hyperbolique est décomposable (voir [3, proposition 6.1]), on tire immédiatement de la proposition précédente :

Corollaire 9. *Si* (A,σ) *est hyperbolique, alors* π_3 *est hyperbolique.*

On caractérise enfin les cas où π_5 est hyperbolique, en commençant par l'observation suivante :

Lemme 10. *Si* (A,σ) *est isotrope, alors* π_5 *est hyperbolique.*

Démonstration. Si (A,σ) est isotrope, alors A n'est pas à division. Si son indice est 1 ou son coindice est 2, alors (A,σ) est hyperbolique, et le corollaire 9 montre que π_3 est hyperbolique. Il en est donc de même de π_5, puisque π_5 est multiple de π_3. Il ne reste donc qu'à étudier le cas où l'indice de A est 2. On est alors dans la situation de l'exemple 7, où l'on a vu que π_5 est un multiple de $\langle 1, u_1, u_2, u_3 \rangle n_Q$. Or, cette dernière forme quadratique est la forme diagonale $h(X,X)$

pour la forme hermitienne $h = \langle 1, u_1, u_2, u_3\rangle$ à laquelle σ est adjointe. Puisque (A,σ) est isotrope, la forme h est isotrope, donc aussi sa forme diagonale, ce qui entraîne que π_5 est isotrope, donc hyperbolique puisque c'est une forme de Pfister. $\square$

Remarquons que les réciproques du corollaire 9 et du lemme 10 ne valent pas : si les conditions de la proposition 8 sont satisfaites, alors π_3 est hyperbolique, donc π_5 l'est aussi, puisque π_5 est multiple de π_3 ; mais l'algèbre A peut être à division.

Proposition 11. *La forme π_5 est hyperbolique si et seulement si* $\mathrm{Symd}(\sigma)$ *contient un élément $x \notin F$ tel que $x^2 \in F$.*

Démonstration. Supposons d'abord π_5 hyperbolique, et choisissons une F-algèbre biquadratique $L \subset \mathrm{Symd}(\sigma)$ comme dans la section 2 pour représenter $\pi_5 = \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\pi_3$ suivant le corollaire 6. Comme π_5 contient la forme $\langle 1\rangle \perp \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_1} \perp \mathrm{Srp}_\sigma|_{W_2}$, dont la dimension dépasse la moitié de celle de π_5, il existe $y \in W_1 \oplus W_2$ tel que $\mathrm{Srp}_\sigma(y) = 1$. Vu la proposition 4, on a $\mathrm{Trp}_\sigma(y) = 0$, donc $\mathrm{Prp}_{\sigma,y}(X) = X^4 + X^2 + U(y)X + \mathrm{Nrp}_\sigma(y)$ pour une certaine forme cubique $U\colon \mathrm{Symd}(\sigma) \to F$. Si $\ell \in L_3$ est tel que $T_3(\ell) = 1$, alors $y\ell + \ell y = y$ et $y^2\ell = \ell y^2$. En utilisant ces relations, on voit que $U(y)y = \mathrm{Prp}_{\sigma,y}(y)\ell + \ell\,\mathrm{Prp}_{\sigma,y}(y)$, donc $U(y)y = 0$ et par conséquent $y^4 + y^2 = \mathrm{Nrp}_\sigma(y) \in F$.

Si $y^2 \in F$, disons $y^2 = \lambda \in F$, alors le polynôme minimal de y sur F est $X^2 - \lambda$, donc $\mathrm{Prp}_{\sigma,y}(X) = (X^2 - \lambda)^2$, ce qui est incompatible avec $\mathrm{Srp}_\sigma(y) = 1$. Par conséquent, $y^2 \notin F$. De plus, $y^2 \notin L_3$ puisque y commute avec y^2 mais ne centralise pas L_3. Dès lors, $L_3[y^2] = L_3 \otimes_F F[y^2]$ est une F-algèbre biquadratique étale contenue dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$. Vu sa dimension, c'est une F-algèbre étale maximale dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$, donc par [2, proposition 5.6] elle satisfait les conditions énoncées au début de la section 2. On la note L' et on s'autorise à utiliser en référence à L' les mêmes structures que celles définies pour L, en affectant leur notation d'un $'$ pour les distinguer. Si la numérotation des éléments du groupe de Galois de L' est telle que $F[y^2] = L'_1$, alors $y \in W'_1$. Pour tout $w'_2 \in W'_2$ on a $y * w'_2 \in W'_3$ et $\mathrm{Srp}_\sigma(y * w'_2) = \mathrm{Srp}_\sigma(w'_2)$ par la proposition 5. Choisissant $w'_2 \neq 0$, on pose $z = w'_2 + (y * w'_2)$. Alors $\mathrm{Srp}_\sigma(z) = \mathrm{Srp}_\sigma(w'_2) + \mathrm{Srp}_\sigma(y * w'_2) = 0$ puisque W'_2 et W'_3 sont orthogonaux. Les mêmes arguments que pour y donnent $\mathrm{Trp}_\sigma(z) = U(z) = 0$, donc $z^4 = \mathrm{Nrp}_\sigma(z) \in F$. Si $z^2 \in F$, on choisit $x = z$; si $z^2 \notin F$, on prend $x = z^2$. Dans un cas comme dans l'autre, on a $x \notin F$ et $x^2 \in F$.

Réciproquement, supposons donné $x \in \mathrm{Symd}(\sigma) \setminus F$ tel que $x^2 \in F$. Si $x^2 = \lambda^2$ pour un $\lambda \in F$, alors $\sigma(x-\lambda)\cdot(x-\lambda) = (x-\lambda)^2 = 0$, donc (A,σ) est isotrope. Dans ce cas, le lemme 10 montre que π_5 est hyperbolique. Pour la suite du raisonnement, on peut donc supposer que $F(x)$ est un corps, extension quadratique purement inséparable de F. On note $K = F(x)$ et B le centralisateur de K dans A, qui est une algèbre simple centrale de degré 4 sur K. Comme $K \subset \mathrm{Symd}(\sigma)$, la restriction σ_B de σ à B est une involution symplectique, vu [9, proposition 4.5]. Par [7, (16.16)] si σ_B n'est pas hyperbolique et par [3, proposition 5.3] si σ_B est hyperbolique, on peut donc décomposer :

$$(B,\sigma_B) = (Q_1,\sigma_1) \otimes_K (Q_2, \overline{}),$$

où Q_1 et Q_2 sont des algèbres de quaternions sur K et σ_1 est une involution orthogonale sur Q_1. On peut alors trouver dans Q_1 des éléments σ_1-symétriques i_1, j_1 tels que $i_1^2 + i_1 \in K$, $j_1^2 \in K^\times$ et $j_1 i_1 j_1^{-1} = i_1 + 1$. Quitte à remplacer i_1 par i_1^2, on peut supposer $i_1^2 + i_1 \in F$. Alors $F[i_1]$ est une F-algèbre quadratique étale ; elle est contenue dans $\mathrm{Symd}(\sigma)$ car si $i_2 \in Q_2$ satisfait $\overline{i_2} = i_2 + 1$, alors $i_1 = i_1 i_2 + \sigma(i_1 i_2)$. De plus, A est un module à droite (ou à gauche) libre sur $F[i_1]$, car l'automorphisme intérieur induit par j_1 se restreint en l'automorphisme non trivial de $F[i_1]$ sur F. Cela montre que $F[i_1]$ est une sous-algèbre « nette » de (A,σ), dans la terminologie de [2, section 5]. Dès lors, par [2, théorème 6.10], on peut plonger $F[i_1]$ dans une F-algèbre biquadratique L comme dans la section 2, de sorte que $F[i_1]$ soit la sous-algèbre fixe sous un élément (disons α_1) du groupe de Galois. On a aussi $j_1 \in \mathrm{Symd}(\sigma)$ car $j_1 = j_1 i_2 + \sigma(j_1 i_2)$, et comme $j_1 i_1 = (i_1 + 1) j_1$ on doit avoir $j_1 \in W_2 \oplus W_3$, avec les notations de la section 2. Comme pour les éléments y et z de la première partie de la preuve, on tire $j_1^4 + \mathrm{Srp}_\sigma(j_1) j_1^2 + \mathrm{Nrp}_\sigma(j_1) = 0$. Mais

$j_1^4 \in F^\times$ puisque $j_1^2 \in K^\times$, donc $\mathrm{Srp}_\sigma(j_1)j_1^2 \in F$. Si $j_1^2 \notin F$, on en déduit $\mathrm{Srp}_\sigma(j_1) = 0$; mais si $j_1^2 \in F$, soit $j_1^2 = \lambda \in F$, alors $\mathrm{Prp}_{\sigma,j_1}(X) = (X^2 - \lambda)^2$ donc on a aussi $\mathrm{Srp}_\sigma(j_1) = 0$. La restriction de Srp_σ à $W_2 \oplus W_3$ est donc isotrope ; comme cette restriction est une sous-forme de π_5, cela entraîne que π_5 est isotrope, donc hyperbolique puisque c'est une forme de Pfister. □

4. Involutions unitaires et orthogonales

Dans cette section, F est un corps de caractéristique 2. On désigne par B une algèbre d'Azumaya de degré 4 sur une F-algèbre quadratique étale Z et par τ une involution unitaire sur B qui fixe F. Soit $\mathrm{Sym}(\tau) \subset B$ le F-espace vectoriel des éléments symétriques sous τ et Srd_τ la restriction de la « seconde trace » Srd_B à $\mathrm{Sym}(\tau)$; c'est une forme quadratique $\mathrm{Srd}_\tau \colon \mathrm{Sym}(\tau) \to F$.

Théorème 12. *Il existe une 2-forme quadratique de Pfister π_2 et une 4-forme quadratique de Pfister π_4 déterminées de manière unique à isométrie près par la propriété suivante : la classe de Srd_τ dans le groupe de Witt se décompose comme suit :*

$$\mathrm{Srd}_\tau = [1,1] + \pi_2 + \pi_4.$$

De plus,

(i) *π_4 est multiple de π_2, c'est-à-dire qu'il existe a_1, $a_2 \in F^\times$ tels que $\pi_4 = \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle \pi_2$;*

(ii) *la forme π_2 est hyperbolique si et seulement si l'algèbre B se décompose en produit tensoriel d'algèbres de quaternions stables sous τ ;*

(iii) *la forme π_4 est hyperbolique si et seulement si $\mathrm{Sym}(\tau)$ contient un élément non central dont le carré est central.*

La démonstration est en tout point semblable à celle du théorème 1 : il suffit d'y remplacer $\mathrm{Symd}(\sigma)$ par $\mathrm{Sym}(\tau)$, Srp_σ par Srd_τ et l'algèbre de quaternions déployée Q par une F-algèbre quadratique étale déployée. L'existence d'une F-algèbre biquadratique étale $L \subset \mathrm{Sym}(\tau)$ est assurée par [2, théorème 7.4] et la relation entre compositions d'espaces quadratiques de dimension 4 et 2-formes quadratiques de Pfister est explicitée dans [1, proposition 3.9]. D'ailleurs, le cas où le centre Z est déployé (et donc $B \simeq E \times E^{\mathrm{op}}$ pour une F-algèbre simple centrale E de degré 4) est déjà traité dans [10].

Le cas des involutions orthogonales requiert des ajustements plus substantiels car les formes quadratiques en jeu sont singulières. Suivant [6, p. D.3.2], on dit qu'une forme quadratique est *totalement singulière* si sa forme polaire est identiquement nulle. Les formes totalement singulières sont donc les formes diagonales $b(X,X)$ des formes bilinéaires symétriques b. Une forme totalement singulière est appelée *quasi k-forme de Pfister* si c'est la forme diagonale d'une k-forme de Pfister bilinéaire, voir [6, p. D.11.1].

Soit C une F-algèbre simple centrale de degré 4 et ρ une involution orthogonale sur C. Soit encore $\mathrm{Sym}(\rho)$ l'espace des éléments symétriques sous ρ et $\mathrm{Srd}_\rho \colon \mathrm{Sym}(\rho) \to F$ la restriction de Srd_C à $\mathrm{Sym}(\rho)$. On sait définir le déterminant $\det\rho \in F^\times/F^{\times 2}$: voir [7, (7.2)]. Soit π_1' la quasi 1-forme de Pfister diagonale de $\langle 1, \delta\rangle$, où $\delta \in F^\times$ représente $\det\rho$.

Théorème 13. *La forme quadratique Srd_ρ se décompose en somme orthogonale*

$$\mathrm{Srd}_\rho \simeq [0,0] \perp [1,1] \perp \varphi$$

où φ est une forme quadratique totalement singulière de dimension 6. La forme $\pi_3' = \pi_1' \perp \varphi$ est une quasi 3-forme de Pfister et les formes φ et π_3' sont déterminées de manière unique à isométrie près par (C,ρ). De plus,

(i) *π_3' est multiple de π_1', c'est-à-dire qu'il existe a_1, $a_2 \in F^\times$ tels que $\pi_3' = \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle \pi_1'$;*

(ii) *la forme π_1' est quasi-hyperbolique si et seulement si l'algèbre C se décompose en produit tensoriel d'algèbres de quaternions stables sous ρ ;*

(iii) *la forme π_3' est hyperbolique si et seulement si* $\mathrm{Sym}(\rho)$ *contient un élément non central dont le carré est central.*

Démonstration. Encore une fois, [3, théorème 7.4] donne une F-algèbre biquadratique étale $L \subset \mathrm{Sym}(\rho)$, et les mêmes arguments que dans la proposition 4 établissent que $\mathrm{Sym}(\rho) = L \overset{\perp}{\oplus} W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2 \overset{\perp}{\oplus} W_3$ et que $\mathrm{Srd}_\rho(x) = T_i(x^2)$ pour $x \in W_i$. À présent, W_i est un module libre de rang 1 sur L_i. Lorsque (C,ρ) est isomorphe à $(M_4(F),t)$, où t est la transposition—ce qui est toujours le cas si F est fini—on peut choisir pour L l'algèbre diagonale et retrouver la même situation que dans la démonstration de la proposition 4, avec F à la place de Q. On voit que si $w_i \in W_i$ est de déterminant non nul, alors $W_i = w_iL_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Dans le cas général, pour F infini, un argument de densité établit l'existence de $w_i \in W_i$ tel que $\mathrm{Nrd}_C(w_i) \neq 0$, ce qui entraîne encore $W_i = w_iL_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Pour le calcul de $\mathrm{Srd}_\rho|_{W_i}$, on peut de plus supposer $\mathrm{Srd}_\rho(w_i) \neq 0$. Un analogue de la proposition 4 donne $\mathrm{Srd}_\rho(w_ix) = T_i(w_i^2x^2)$ pour $x \in L_i$, donc $\mathrm{Srd}_\rho|_{W_i}$ est isométrique au transfert suivant T_i de la forme $w_i^2X^2$ sur L_i. La forme $\mathrm{Srd}_\rho|_{W_i}$ est donc totalement singulière ; par rapport à la base w_i, $w_i(\mathrm{Srd}_\rho(w_i) + w_i^2)$ de W_i on calcule qu'elle se diagonalise en $\langle \mathrm{Srd}_\rho(w_i), \mathrm{Srd}_\rho(w_i)N_i(w_i^2)\rangle = \langle \mathrm{Srd}_\rho(w_i)\rangle\langle 1, \mathrm{Nrd}_C(w_i)\rangle$. En examinant le cas où L est déployée on voit que $W_i \subset \mathrm{Symd}(\rho)$, donc $\mathrm{Nrd}_C(w_i)$ représente $\det\rho$ d'après la définition donnée en [7, (7.2)]. Dès lors,

$$\mathrm{Srd}_\rho|_{W_i} \simeq \langle \mathrm{Srd}_\rho(w_i)\rangle\pi_1' \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Soit $a_i = \mathrm{Srd}_\rho(w_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme dans la proposition 5, on observe que $w_1w_2 + w_2w_1 \in W_3$ et $\mathrm{Srd}_\rho(w_1w_2 + w_2w_1) = \mathrm{Srd}_\rho(w_1)\mathrm{Srd}_\rho(w_2)$. Dès lors, $\mathrm{Srd}_\rho|_{W_3}$ représente a_1a_2, et $\mathrm{Srd}_\rho|_{W_3} \simeq \langle a_1a_2\rangle\pi_1'$. Par ailleurs, $\mathrm{Srd}_\rho|_L \simeq [0,0] \perp [1,1]$ comme précédemment, donc la décomposition orthogonale de $\mathrm{Sym}(\rho)$ donne

$$\mathrm{Srd}_\rho \simeq [0,0] \perp [1,1] \perp \langle a_1\rangle\pi_1' \perp \langle a_2\rangle\pi_1' \perp \langle a_1a_2\rangle\pi_1'.$$

On obtient ainsi la décomposition souhaitée, avec $\varphi = \langle a_1, a_2, a_1a_2\rangle\pi_1'$ et donc $\pi_3' = \langle 1, a_1, a_2, a_1a_2\rangle\pi_1'$. La forme φ est déterminée de manière unique, puisque c'est la restriction de Srd_ρ au radical de sa forme polaire. Les énoncés (ii) et (iii) se démontrent en adaptant le raisonnement des propositions 8 et 11. □

L'énoncé (ii) a été démontré par d'autres arguments dans [8, proposition 3.7].

Déclaration d'intérêts

L'auteur ne travaille pas, ne conseille pas, ne possède pas de parts, ne reçoit pas de fonds d'une organisation qui pourrait tirer profit de cet article, et n'a déclaré aucune autre affiliation que ses organismes de recherche.

Références

[1] D. Barry and J.-P. Tignol, « Trialitarian triples », *Doc. Math.* **28** (2023), no. 4, p. 939-1026.

[2] K. J. Becher, N. Grenier-Boley and J.-P. Tignol, « Involutions and stable subalgebras », *J. Algebra* **493** (2018), p. 381-409.

[3] K. J. Becher, N. Grenier-Boley and J.-P. Tignol, « The discriminant Pfister form of an algebra with involution of capacity four », *Isr. J. Math.* (2024).

[4] A.-M. Bergé and J. Martinet, « Formes quadratiques et extensions en caractéristique 2 », *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985), no. 2, p. 57-77.

[5] R. Elman, N. Karpenko and A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, American Mathematical Society, 2008, p. viii+435.

[6] B. Kahn, *Formes quadratiques sur un corps*, Société Mathématique de France, 2008, p. x+303.

[7] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, American Mathematical Society, 1998, p. xxii+593. With a preface in French by J. Tits.

[8] M.-A. Knus, R. Parimala and R. Sridharan, « Involutions on rank 16 central simple algebras », *J. Indian Math. Soc., New Ser.* **57** (1991), no. 1-4, p. 143-151.

[9] J.-F. Renard, J.-P. Tignol and A. R. Wadsworth, « Graded Hermitian forms and Springer's theorem », *Indag. Math., New Ser.* **18** (2007), no. 1, p. 97-134.

[10] J.-P. Tignol, « La forme seconde trace d'une algèbre simple centrale de degré 4 de caractéristique 2 », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 2, p. 89-92.