ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus
Mathématique

Philippe Henry

Une note inédite de Lagrange « sur la géométrie des indivisibles » et le « trésor » de Cavalieri

Volume 363 (2025), p. 1407-1427

En ligne depuis le 28 novembre 2025

https://doi.org/10.5802/crmath.779

CENTRE
MERSENNE

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1778-3569

ACADÉMIE DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus. Mathématique
2025, Vol. 363, p. 1407-1427
https://doi.org/10.5802/crmath.779

Article de recherche
Histoire des mathématiques

Une note inédite de Lagrange « sur la géométrie des indivisibles » et le « trésor » de Cavalieri

Philippe Henry [a]

[a] 1222 Vésenaz, Genève, Suisse
Courriel : philippe.henry@a3.epfl.ch

Résumé. La Bibliothèque de l'Institut de France conserve quatre pages manuscrites de Lagrange au sujet de la « géométrie des indivisibles ». Elles témoignent de sa quête pour comprendre, plus d'un siècle après Cavalieri, comment celui-ci a obtenu et tenté de démontrer l'égalité que nous écririons de nos jours $\int_0^a x^m \,\mathrm{d}x = \frac{a^{m+1}}{m+1}$. Suivant l'approche originale du jésuate de Bologne, Lagrange parvient à trouver la voie à suivre pour obtenir une preuve complète. Dans cet article, nous présentons la démarche de Cavalieri et reconstruisons le contexte historique utile pour la compréhension de la note de Lagrange avant de présenter sa démonstration. Nous terminons par quelques applications du résultat données jadis par Cavalieri.

Classification Mathématique (2020). 01A45, 26-03, 28-03.
Manuscrit reçu le 15 mai 2023, accepté le 6 juillet 2025.

Introduction. Joseph Louis Lagrange (1736–1813) possédait une grande érudition en histoire des mathématiques comme en témoignent de nombreux passages de ses écrits[1]. Pour ses leçons à l'École normale de l'an III, celle-ci lui sert afin de présenter le développement historique des notions abordées. Dans ses propres recherches, elle lui est utile dans le but de comprendre les problématiques de ses prédécesseurs, analyser leurs écrits ou en dresser le bilan. Parfois, lui arrive-t-il de trouver dans les traces mathématiques du passé une source d'inspiration afin de laisser se développer ses propres facultés créatrices[2].

À sa mort au mois d'avril 1813, Lagrange laisse derrière lui de nombreux papiers qui sont aujourd'hui conservés à la Bibliothèque de l'Institut de France[3]. On trouve parmi eux une note témoignant de son intérêt pour la méthode que le pionnier du calcul intégral Bonaventura Cavalieri[4] (v. 1598–1647) a utilisée afin d'obtenir, vers 1640, l'égalité qui serait pour nous aujourd'hui

[1] Pour quelques exemples, voir [9, p. 184–185]. D'après une lettre publiée dans *Le Moniteur Universel* du 26 février 1814 signée LBMDG (= Le Baron Maurice de Genève, Frédéric Maurice (1775–1851)) et ayant pour objet de discuter le texte de l'éloge de Lagrange par Delambre, on apprend que selon Lagrange c'est « une excellente pratique [que] celle de faire l'analyse des méthodes, et même l'extrait des résultats, quand l'ouvrage [est] important ou estimé » (p. 228). Dans cette même lettre sont rapportés ses propos sur l'importance de « toujours étudier dans les sources » (p. 227) et « un certain nombre de principes [qu'il a] toujours fidèlement suivis » dans ses études. Voir aussi [20, p. 3–4].

[2] Un exemple différent de celui faisant l'objet de ce travail est donné par un long manuscrit dans lequel Lagrange s'emploie à démontrer rigoureusement un résultat de Johann Bernoulli (1667–1748) généralisé par Leonhard Euler (1707–1783) sur le développement successif des courbes planes. Voir [13] pour une édition de ce travail.

[3] Au sujet de leur mise en ordre, on peut consulter l'introduction de [13].

[4] Pour des éléments biographiques, voir [12, p. 1–23] et les références citées dans [1, p. 293].

$\int_0^a x^m \,\mathrm{d}x = \frac{a^{m+1}}{m+1}$. Tout d'abord démontrée par Cavalieri dans sa *Geometria*[5] pour les cas $m = 1,2$, puis pour $m = 4$ (lors de ses recherches sur la mesure du fuseau parabolique) et enfin dans le cas $m = 3$, il en déduit alors la généralisation à partir de ces quatre valeurs. Amené à rechercher comment adapter son approche pour en fournir la démonstration pour des valeurs plus grandes de m, Cavalieri s'embarque dans de longs développements difficiles à suivre et parfois dépréciés (lourdeur du style, manque d'une notation algébrique, concepts utilisés sujets à critiques[6]). Malgré ses démonstrations des cas supplémentaires $m = 5,6,9$ à l'aide d'un « lemme » qu'il doit à Jean de Beaugrand (v. 1584–1640), il ne parviendra pas à obtenir une preuve générale.

Les quatre pages et demie de la note [17] (et sa retranscription en annexe) révèlent que Lagrange s'est livré à l'expérience de remonter le temps en se plaçant à l'époque de Cavalieri. Il a souhaité utiliser les mêmes outils que ce dernier pour voir si ceux-ci auraient permis d'aboutir à la démonstration recherchée et, sans doute aussi, a-t-il voulu mesurer à quel point Cavalieri en était éloigné. Cette note généralise en effet la voie suivie par son prédécesseur et aboutit à la preuve de l'égalité quel que soit l'entier m. Une fois la preuve obtenue, la note se termine. Lagrange n'a probablement pas poursuivi la lecture de la quatrième partie des *Exercitationes geometricæ sex* [7] de Cavalieri dans laquelle celui-ci applique son résultat à certaines quadratures ou cubatures, comme nous le verrons.

Omnes lineæ. Considérons la figure centrale pour notre propos : un parallélogramme décomposé en deux triangles par sa diagonale (voir figure 1, gauche). Un argument montrant que les deux triangles sont isométriques est connu depuis l'Antiquité. La proposition I.4 des *Éléments* peut le justifier. Dans la preuve, Euclide déduit le résultat en considérant l'un des triangles comme « étant appliqué » sur l'autre[7]. Ainsi, s'abstenant de définir l'égalité des figures géométriques, Euclide utilise sa notion commune 7 (« Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. ») pour faire voir l'égalité des triangles. Pour Cavalieri, inversément, c'est l'égalité qui doit entraîner la congruence[8]. Il utilise alors son approche reposant sur les « indivisibles » composant les triangles et justifie à l'aide de celle-ci (*Geometria*, proposition 19, livre II) que l'aire du parallélogramme est double de celle de chacun des triangles en associant à ceux-ci la collection de tous les segments parallèles à leur base (« omnes lineæ », abrégé ici $o.\ell.$).

Dans sa note, Lagrange ne s'attarde pas sur cette proposition et se contente d'indiquer que « ces sommes [de toutes les lignes] sont comme les aires ». Sans doute est-il clair pour lui qu'il est nécessaire de balayer simultanément les triangles à l'aide de ce que Cavalieri nomme « une règle » (« regula »), parallèle à la base. Il ne suffit évidemment pas d'avoir une infinité d'égalités telle que $BM = EH$ pour conclure à l'égalité des aires comme le montre une objection longuement discutée par Cavalieri dans ses *Exercitationes*[9] (voir figure 1, droite).

Omnia quadrata. L'étape suivante consiste à choisir l'un des triangles et à considérer « tous les carrés » (« omnia quadrata », abrégé ici $o.q.$) qui ont pour côté l'un des segments qui le composent.

[5] [5]. Le titre complet de ce livre pourrait se traduire par « Géométrie des continus d'indivisibles développée par une certaine nouvelle méthode ».

[6] Paul Guldin (1577–1643) reprochera à Cavalieri d'avoir « renversé » la géométrie des anciens au lieu de l'étendre. Maximilien Marie (1819–1891) écrira : « Si l'on donnait des prix d'obscurité, Cavalieri aurait dû sans conteste emporter le premier. » [4, p. 162 & p. 165]. Sur la réception des travaux de Cavalieri, voir [1, p. 353–363]. Sur la controverse avec Guldin, voir [12, p. 55–65].

[7] Felix Klein (1849–1925) écrira qu'Euclide est ici « coupable d'une inconsistance » [15, p. 199] – il faudrait, par exemple, s'assurer qu'une isométrie préserve les droites. Dans la présentation axiomatique de David Hilbert (1862–1943), cette proposition I.4 deviendra un axiome.

[8] Voir [19, p. 490]. Ceci ne signifie pas que Cavalieri n'a jamais utilisé la superposition dans ses travaux comme moyen de démontrer une égalité [19, p. 472–476].

[9] [7, p. 238–240]. Voir aussi [1, p. 309–310]. Cavalieri ne prendra jamais de position définitive au sujet des implications de sa théorie sur la composition du continu. Il s'emploie « à construire une théorie qui semble philosophiquement neutre mais mathématiquement féconde » [11, p. 172].

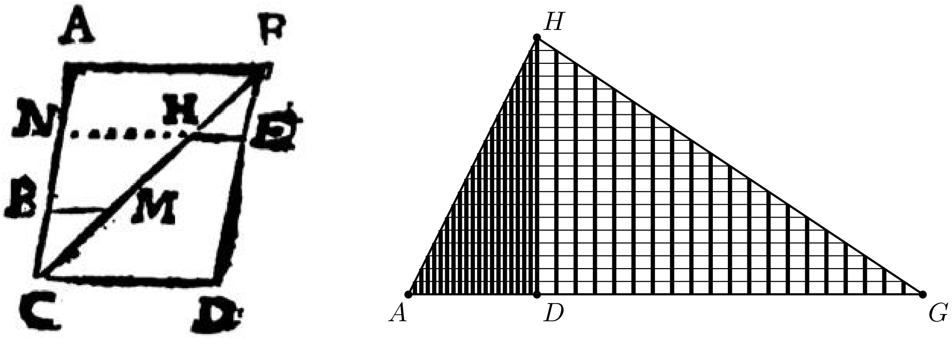


Figure 1. Figure pour la proposition 19 (gauche) et objection discutée par Cavalieri (droite) : les triangles *ADH* et *GDH* n'ont pas la même aire bien qu'il existe une correspondance bijective entre leurs lignes verticales.

La proposition 24 de Cavalieri, redémontrée par Lagrange dans sa note (voir ci-dessous), énonce le résultat suivant :

> « Propos. XXIV. Soit donné un parallélogramme quelconque dans lequel une diagonale est tracée ; alors tous les carrés du parallélogramme seront en raison triple avec tous les carrés de l'un des triangles déterminés par la diagonale lorsque l'un des côtés du parallélogramme est pris pour règle commune[10] ».

Ainsi, Cavalieri affirme que (voir figure 1, gauche) $o.q.\ \triangle FDC = \frac{1}{3} o.q.\ AFDC$. En supposant que *AFDC* est un rectangle et en notant $AF = a$ et $FD = b$, ce résultat peut s'écrire $\int_0^b \left(\frac{a}{b}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^2 b$ (voir figure 5 (gauche) pour le volume ainsi considéré).

Ici, de même que dans le cas précédent, il n'y a rien de nouveau pour l'époque. Il est connu au moins depuis le livre XII des *Éléments* que tout prisme à base triangulaire se décompose en trois pyramides à base triangulaire de même volume ce qui est utile pour déduire que le volume de toute pyramide est le tiers du prisme ayant la même base et la même hauteur. Le but de la preuve de Cavalieri est donc de valider son approche en obtenant par sa méthode le résultat escompté.

En poursuivant sur ce chemin, nous verrons que Cavalieri va exploiter sa méthode jusqu'à l'obtention de résultats nouveaux (p. ex. la mesure du fuseau parabolique laissée sans réponse par Kepler ou les cas $m = 3, 4, 5, 6, 9$) et, finalement, entrevoir l'utilité de l'associer avec le calcul littéral.

Résultats préliminaires énoncés par Lagrange. Avant de donner son interprétation de la preuve de la proposition 24, Lagrange présente avec grand soin les résultats antérieurs sur lesquels celle-ci repose. Ils montrent comment manipuler le concept « *o.q.* ».

Tout d'abord (proposition 9), Cavalieri démontre (voir figure 2, gauche) que si *AM*, *MC* sont deux parallélogrammes (nommés par une diagonale) de même inclinaison et de même hauteur, alors on a[11] $\frac{o.q.\,AM}{o.q.\,MC} = \frac{GM^2}{MH^2}$, c'est-à-dire que le rapport des volumes des parallélépipèdes rouge et bleu est égal au rapport des carrés des bases[12]. En effet, en traçant des parallèles *DI* à la base,

[10] [5, p. 78], [7, p. 50], [8, p. 159], trad. P.H.

[11] [5, livre II, proposition 9].

[12] Nous avons fait apparaître les volumes pour faciliter la compréhension. Toutefois, Cavalieri se garde d'affirmer que le continu se compose d'indivisibles [1, p. 307]. Il s'intéresse aux résultats mathématiques et moins à la philosophie !

on a toujours $DE = GM$ et $EI = MH$. Ainsi, $\frac{DE^2}{EI^2} = \frac{GM^2}{MH^2}$ et donc « ut unum a unum, ita omnia ad omnia »[13]. Lagrange note l'« évidence » de cette proposition.

Ensuite (proposition 10), si AD, BD sont deux parallélogrammes de même inclinaison, de même base CD et de hauteur respective AO, CN (voir figure 2, milieu), alors Cavalieri montre[14] que $\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,BD} = \frac{AO}{CN}$. Pour cela, il copie le parallélogramme AD vers le haut et BD vers le bas. La proposition précédente entraîne $o.q.\,AD = o.q.\,IF = o.q.\,HM = \dots$ et $o.q.\,BD = o.q.\,PE = \dots$ de sorte que Cavalieri se représente facilement $n \cdot o.q.\,AD$ et $m \cdot o.q.\,BD$ ($m, n \in \mathbf{N}^*$, sur la figure $n = 3$ et $m = 2$). Sa preuve consiste à s'assurer que la définition V.5 des *Éléments* d'Euclide est satisfaite[15]. Lagrange indique donc que cette preuve repose sur « l'ancienne geometrie ».

Enfin (proposition 11), Cavalieri traite le cas de deux parallélogrammes de bases et de hauteurs différentes[16] (voir figure 2, droite) : $\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,FM} = \frac{CD^2}{GM^2} \cdot \frac{BV}{ON}$. En découpant dans AD un parallélogramme de même hauteur que FM on a, vu les deux résultats précédents,

$$\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,FM} = \frac{o.q.\,AD}{o.q.\,DP} \cdot \frac{o.q.\,DP}{o.q.\,FM} = \frac{BV}{ON} \cdot \frac{CD^2}{GM^2}.$$

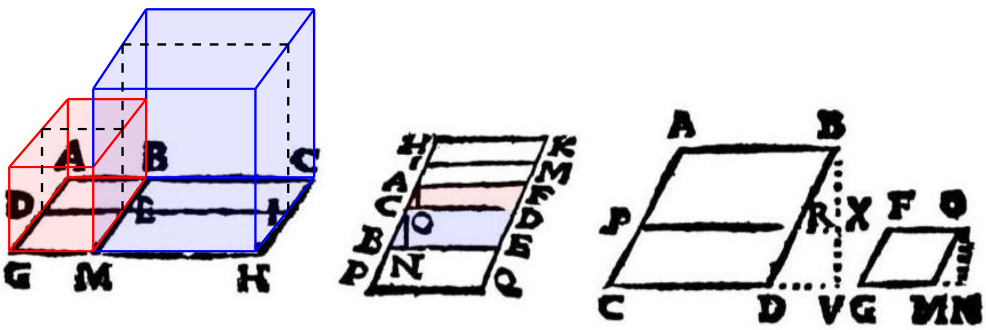


Figure 2. Figures pour la proposition 9 (gauche), 10 (milieu), 11 (droite).

Lagrange insiste encore sur un corollaire des trois propositions précédentes. Il s'agit du fait que le rapport de tous les carrés d'un parallélogramme à ceux d'un des triangles formés par une diagonale est constant quel que soit le parallélogramme[17] (proposition 22) : étant donnés deux parallélogrammes AS, $T\beta$ (voir figure 3, gauche), alors on a

$$\frac{o.q.\,AS}{o.q.\,\triangle OES} = \frac{o.q.\,T\beta}{o.q.\,\triangle \& Z\beta}. \tag{1}$$

Pour démontrer cette égalité, Cavalieri propose un double raisonnement par l'absurde sur presque quatre pages. Pour en faire comprendre l'esprit, nous en exposons une partie.

---

[13] Cavalieri utilise ainsi une généralisation hardie de la proposition V.12 des *Éléments* d'Euclide : si $x_1/y_1 = x_2/y_2 = \dots = x_n/y_n$, alors ce rapport est aussi égal à $\sum_{i=1}^n x_i / \sum_{i=1}^n y_i$.

[14] [5, livre II, proposition 10].

[15] Elle définit ce que sont "des grandeurs (...) dans le même rapport". Celle-ci peut être reformulée par les équivalences :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \left(\frac{m}{n} \substack{\geq \\ = \\ <} \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \substack{\geq \\ = \\ <} \frac{c}{d}\right) \ \forall\, m, n \in \mathbf{N}^* \iff \left(na \substack{\leq \\ = \\ >} mb \Leftrightarrow nc \substack{\leq \\ = \\ >} md\right) \ \forall\, m, n \in \mathbf{N}^*.$$

Cavalieri discute de la troisième formulation avec $a = AO$, $b = CN$, $c = o.q.\,AD$ et $d = o.q.\,BD$. Apparaît donc ici une manifestation de ses tentatives d'ancrer sa doctrine dans la géométrie traditionnelle afin de lui donner le statut de théorie. Pour une étude de cet aspect de l'œuvre de Cavalieri, voir [11].

[16] [5, livre II, proposition 11].

[17] [5, livre II, proposition 22].

Supposons, par exemple, que le membre de gauche de (1) soit strictement plus grand que le membre de droite. On a donc une égalité en remplaçant le dénominateur de gauche par $o.q.\ \triangle OES + o.q.\ \Omega$ pour une certaine figure Ω. « À la manière ancienne », comme l'écrit Lagrange[18], Cavalieri divise OS en deux, puis les deux segments ainsi formés en deux et ainsi de suite. Les segments $L9N$, GIK, FHM permettent de construire la figure $\mathscr{C}_1$, circonscrite au triangle OES, formée des parallélogrammes LP, GQ, FR, DS et la figure inscrite $\mathscr{I}_1$ formée par $9Q$, IR, HS. Supposons les divisions effectuées de sorte que $o.q.\ DS < o.q.\ \Omega$. Nous avons un empilement de parallélépipèdes rectangles

$$o.q.\ \mathscr{C}_1 = o.q.\ DS + o.q.\ FR + o.q.\ GQ + o.q.\ LP$$

et, par exemple, $o.q.\ DS = o.q.\ DM + o.q.\ HS + 2\mathscr{R}$ c'est-à-dire que l'excès de $o.q.\ DS$ sur $o.q.\ HS$ est la partie rouge ou blanche de $o.q.\ DS$ (voir figure 3, droite). Puisqu'en sommant tous les tels excès pour les parallélogrammes suivants FR, GQ, LP on reconstitue $o.q.\ DS$, Cavalieri obtient

$$o.q.\ DS = o.q.\ \mathscr{C}_1 - o.q.\ \mathscr{I}_1 < o.q.\ \Omega \qquad \text{d'où} \qquad o.q.\ \mathscr{C}_1 < o.q.\ \triangle OES + o.q.\ \Omega.$$

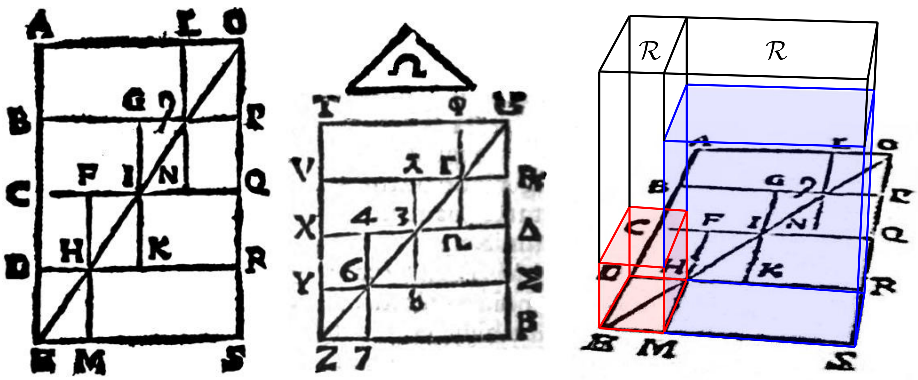


FIGURE 3. Figures pour la proposition 22.

Ainsi, vu l'hypothèse de départ, nous avons

$$\frac{o.q.\ AS}{o.q.\ \mathscr{C}_1} > \frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ \triangle \& Z\beta}. \tag{2}$$

Il s'agit maintenant de diviser le parallélogramme $T\beta$ de façon similaire au précédent de sorte à construire une figure $\mathscr{C}_2$ circonscrite au triangle $\& Z\beta$. Par la proposition 10, on a alors

$$\frac{o.q.\ AS}{o.q.\ DS} = \frac{OS}{SR} = \frac{\&\beta}{\beta\Sigma} = \frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ Y\beta} \tag{3}$$

et, par la proposition 9,

$$\frac{o.q.\ Y\beta}{o.q.\ 4\Sigma} = \frac{o.q.\ Y\beta}{o.q.\ 6\beta} = \frac{Z\beta^2}{7\beta^2} = \frac{Z\beta^2}{6\Sigma^2} = \frac{\&\beta^2}{\&\Sigma^2} = \frac{OS^2}{OR^2} = \frac{ES^2}{HR^2} = \frac{o.q.\ DS}{o.q.\ FR}, \tag{4}$$

d'où, en multipliant (3) et (4),

$$\frac{o.q.\ AS}{o.q.\ FR} = \frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ 4\Sigma} \qquad \text{et de même} \qquad \frac{o.q.\ AS}{o.q.\ GQ} = \frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ \Lambda\Delta}, \qquad \frac{o.q.\ AS}{o.q.\ LP} = \frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ \Phi\mathfrak{R}}. \tag{5}$$

[18]Notons que la proposition XII.2 des *Éléments* constitue le premier exemple euclidien de ce schéma de preuve dit « par exhaustion ».

Enfin, à l'aide de (2), (3) et (5), Cavalieri obtient finalement

$$\frac{o.q.\ T\beta}{o.q.\ \triangle\&Z\beta} < \frac{o.q.\ AS}{\underbrace{o.q.\ DS+o.q.\ FR+o.q.\ GQ+o.q.\ LP}_{=o.q.\ \mathscr{C}_1}} = \frac{o.q.\ T\beta}{\underbrace{o.q.\ Y\beta+o.q.\ 4\Sigma+o.q.\ \Lambda\Delta+o.q.\ \Phi\mathfrak{R}}_{=o.q.\ \mathscr{C}_2}}$$

d'où $o.q.\ \mathscr{C}_2 < o.q.\ \triangle\&Z\beta$, ce qui est une contradiction !

Lagrange se contente de résumer en quelques lignes la démonstration qui précède en insistant en particulier sur les proportions qui sont constantes dans les deux figures.

Preuve de la proposition 24 ($m = 2$). Lagrange peut maintenant rédiger sa version de la preuve du résultat de Cavalieri en reprenant les étapes principales de son texte. Il introduit pour cela la notation $\oint$ (simplifiée dans le manuscrit après sa quatrième utilisation (!) par $\int$) afin de remplacer l'expression originale *omnia*. On peut bien sûr comprendre cette notation comme une somme infinie en acte même si ce n'est évidemment pas une somme au sens strict du terme et que Cavalieri se garde bien d'utiliser ce langage. Pour faciliter la compréhension de la démonstration originale de Cavalieri, nous la présentons à notre tour dans une version plus analytique. Nous faisons apparaître les variables x, y, z[19] (voir figure 4, gauche) et nous indiquons sur le signe $\oint$, comme de coutume aujourd'hui, les points entre lesquels se déplace la « règle » de Cavalieri.

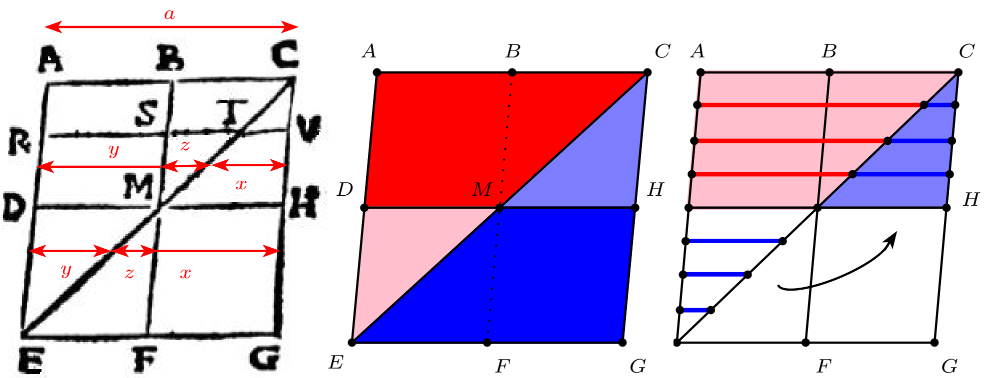


Figure 4. Figures pour la preuve de la proposition 24 : notations (gauche), approche de Cavalieri (centre) et de Lagrange (droite).

Posons $AC = a$ et soit M le milieu de la diagonale CE. Dans les triangles ECG et CAE, on a respectivement, en les balayant de haut en bas par une « règle » parallèle à la base EG,

$$\oint_C^G x^2 = \oint_C^H \left(\frac{1}{2}a - z\right)^2 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a + z\right)^2 \quad \text{et} \quad \oint_C^G y^2 = \oint_C^H \left(\frac{1}{2}a + z\right)^2 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a - z\right)^2.$$

Cavalieri additionne ces quantités égales. Nous avons alors, en groupant les parties claires et foncées (voir figure 4, milieu) et après modification des bornes (car $CH = HG$),

$$2\oint_C^G x^2 = 2\left(\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a - z\right)^2 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a + z\right)^2\right).$$

En développant, puisque $\oint_C^H -az$ et $\oint_H^G az$ s'annulent, nous avons

$$2\oint_C^G x^2 = 2\left(\oint_C^G \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \oint_C^H z^2 + \oint_H^G z^2\right) = 2\big(o.q.\ AF + o.q.\ \triangle CBM + o.q.\ \triangle EMF\big)$$

[19] Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920) semble le premier à avoir transcrit la preuve de Cavalieri de cette manière [24, p. 260–261] (voir aussi [23, p. 40]). D'autres présentations apparaissent par exemple dans [1, p. 325–326] ou [3, p. 86–87].

i.e.

omnia quadrata trianguli, AEC, cum omnibus quadratis trianguli, CEG, dupla erunt omnium quadratorum, AF, cum omnibus quadratis duorum triangulorum CBM, EMF.

Ainsi, en divisant par deux, on a

$$o.q.\,\triangle CEG = o.q.\,AF + o.q.\,\triangle CBM + o.q.\,\triangle EMF.$$

Dans sa présentation, Lagrange supprime l'étape inutile de Cavalieri consistant à additionner deux quantités égales puis à diviser par deux en sommant de manière symétrique[20] (voir figure 4, droite) pour obtenir

$$\int_C^G y^2 = \int_C^H \left[\left(\frac{1}{2}a+z\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a-z\right)^2\right] = \int_C^H \frac{a^2}{2} + 2\int_C^H z^2 = \int_C^G \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\int_C^H z^2.$$

Il s'agit maintenant de déterminer $\int_C^H z^2 = \int_C^H x^2$. Cavalieri déduit par la proposition 22 et la proposition 11 (voir ci-dessus) que

$$\frac{\int_C^G x^2}{\int_C^H x^2} = \frac{\int_C^G a^2}{\int_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a^2 h}{\frac{1}{4}a^2\frac{1}{2}h} = 8$$

où h est la hauteur du parallélogramme AG. Par conséquent, on obtient finalement

$$\int_C^G x^2 = \frac{1}{4}\int_C^G a^2 + 2\cdot\frac{1}{8}\int_C^G x^2$$

ou

$$\int_C^G x^2 = \frac{1}{3}\int_C^G a^2.$$

La figure 5 (gauche) illustre géométriquement le membre de gauche de l'égalité précédente. Le volume du parallélépipède de hauteur AC ayant le parallélogramme $ACGE$ comme base est égal à celui de trois pyramides rouges comme démontré ci-dessus par Cavalieri. Notons que celui-ci ne mentionne pas que si $ACGE$ est un carré de côté a, alors l'égalité $\int_C^G x^2 = \frac{1}{3}a^3$ peut se voir en disposant trois pyramides identiques de sorte à former un cube (centre et droite).

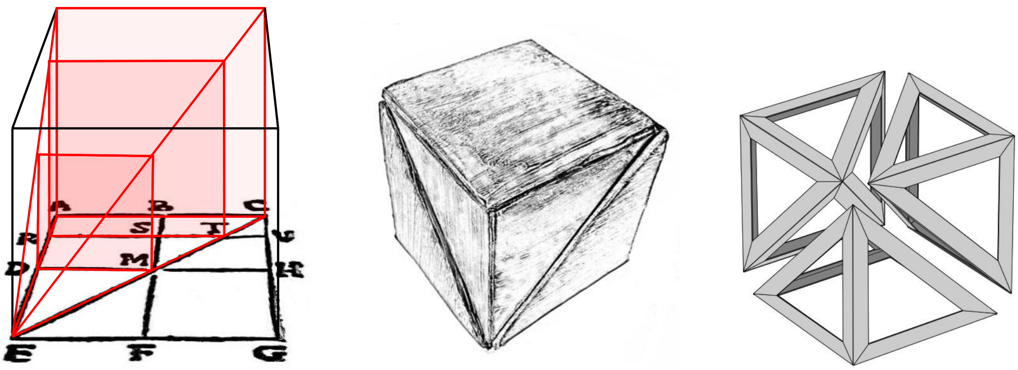
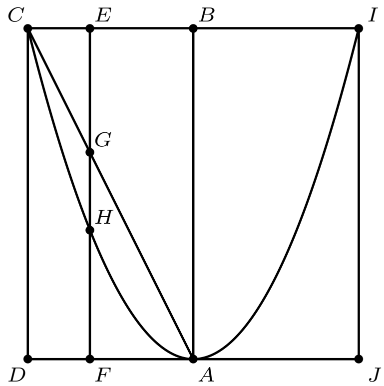


Figure 5. Illustration du volume *o.q. CAE* (gauche, l'idée de cette figure est dûe à Paolo Palmieri [19]) et deux vues d'un cube décomposé en trois pyramides identiques (figure de l'auteur au centre et de Gerhard Wanner à droite).

[20] « (...) si on prend $r\,u$ egalement eloigné de EG que RV l'est de AC (...). »

L'introduction de l'*Exercitatio quarta*. La suite de la note de Lagrange montre qu'il a lu l'introduction de l'*Exercitatio quarta*[21] dans laquelle Cavalieri raconte l'histoire de sa découverte. On y apprend qu'en réfléchissant à la mesure du « fuseau parabolique », solide engendré par la rotation d'une parabole autour du segment reliant ses extrémités, comme Johannes Kepler (1571–1630) en a appelé à le faire dans sa *Stereometria*[22], Cavalieri se rend compte qu'il peut résoudre ce problème à la condition suivante : connaître « la raison de la somme des carrés-carrés du parallélogramme à la somme des carrés-carrés faits sur les segments déterminés par l'un quelconque des deux triangles ».



Considérons en effet la parabole *CAI* ci-dessus et le solide engendré par sa révolution autour de *CI*. Cavalieri démontre[23] que le rapport du volume de ce solide à celui du cylindre circonscrit est égal à $\frac{8}{15}$. Pour cela, il suffit de déterminer le rapport du demi « fusus parabolicus » engendré par *ABCH* au cylindre engendré par *ABCD*. Comme $EF = EH + HF$, on a

$$\oint_A^D EF^2 = \oint_A^D EH^2 + 2\oint_A^D EH\cdot HF + \oint_A^D HF^2$$

et, par conséquent,

$$1 = \frac{\oint EH^2}{\oint EF^2} + 2\,\frac{\oint EH\cdot HF}{\oint EF^2} + \frac{\oint HF^2}{\oint EF^2}. \tag{6}$$

Le rapport recherché étant le premier terme du membre de droite, il faut donc déterminer les deux autres rapports. Pour le terme central, en utilisant la quadrature de la parabole, Cavalieri considère

$$\frac{1}{3} = \frac{\oint HF}{\oint EF} = \frac{\oint EF\cdot HF}{\oint EF^2} = \frac{\oint (EH+HF)HF}{\oint EF^2} = \frac{\oint EH\cdot HF}{\oint EF^2} + \frac{\oint HF^2}{\oint EF^2} \tag{7}$$

où le dernier terme apparaît aussi dans (6). Comme $AF^2 = HF$, $AD^2 = EF$ et $\frac{AF}{AD} = \frac{GF}{EF}$ d'où $\frac{HF^2}{EF^2} = \frac{GF^4}{EF^4}$, ce terme devient donc[24]

$$\frac{\oint HF^2}{\oint EF^2} = \frac{\oint GF^4}{\oint EF^4} = \frac{o.qq.\,\triangle ACD}{o.qq.\,BD}. \tag{8}$$

[21] [7, p. 243–245]. Celle-ci est traduite en français dans [2, p. 367–369].

[22] Kepler prévient que l'étude du fuseau parabolique est plus difficile que celles qu'il a déjà présentées car « la méthode de démonstration qu'il a employée jusqu'ici échoue » (« Restat nunc difficilior de Fusis Parabolicis & Hyperbolicis contemplatio, in qua nos demonstrationis methodus hactenus adhibita rursum deficit. », [14], scholie avant la proposition XXIII.) Il invite les géomètres, en particulier Willebrord Snell (1580–1626), à rechercher sa cubature (fin de la Part. I).

[23] [7, proposition XXIV, p. 281–282].

[24] Cavalieri utilise ici une généralisation de son principe (voir la note 13) avec deux familles de rapports. En effet, la proposition V.12 des *Éléments* se généralise : si $x_i/y_i = X_i/Y_i$ et $x_i/X_i = x_{i+1}/X_{i+1}$ pour $i = 1,\dots,n$, alors $\sum_{i=1}^n x_i/\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n X_i/\sum_{i=1}^n Y_i$ (voir [7, p. 260–261]). Ici $x_i/X_i = 1/EF^2$.

Cavalieri parvient à montrer que ce rapport est égal à $\frac{1}{5}$ (voir ci-dessous). Ainsi, à l'aide de (7) et de (6), il trouve finalement

$$\frac{\oint EH^2}{\oint EF^2} = 1 - 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

En résolvant cette question, Cavalieri réalise qu'il obtient de manière inattendue « un trésor beaucoup plus précieux que la mesure de [ce solide] ». Le résultat trouvé pour (8) est un déclic. Il écrit :

> « Rapprochant ensuite ce résultat de ceux du Livre II de ma *Geometria*, je me rappelais que dans la Prop. 19 il est dit que toutes les lignes du parallélogramme sont doubles de toutes les lignes du triangle ; et dans la Prop. 24 que les carrés de ces lignes sont triples des carrés des lignes du triangle. Pour ne pas laisser d'espace vide entre les carrés et les carrés-carrés, je m'appliquais à trouver aussi le rapport de tous les cubes du parallélogramme à tous les cubes des dits triangles. Je découvris qu'il était quadruple. Je vis donc, non sans grande surprise, que toutes les lignes étaient en raison double, tous les carrés en raison triple, tous les cubes en raison quadruple, tous les carrés-carrés en raison quintuple. J'en conclus que tous les carrés-cubes devaient être en raison sextuple, tous les cubo-cubes en raison octuple (*sic*) et ainsi de suite d'après l'ordre naturel des nombres en commençant par l'unité. Voilà le trésor que le premier, que je sache, j'ai découvert à l'occasion de la mesure du fuseau parabolique. Je l'ai signalé moi-même aux géomètres avant 1640 après le dernier problème de ma *Centuria*[25]. » [7, p. 244], [2, p. 368]

Dans la suite de l'introduction, Cavalieri mentionne avoir communiqué ses découvertes au Père Nicéron (1613–1646) (de l'ordre des Minimes, tout comme le Père Mersenne (1588–1648)) afin de les faire connaître aux mathématiciens parisiens. Les explications de Jean de Beaugrand reçues en retour impressionnent Cavalieri et le poussent à lui proposer de nouvelles questions[26]. Toutefois, les énoncés de celles-ci ne parviendront jamais à Beaugrand et l'annonce de sa mort peu de temps après encouragera Cavalieri à poursuivre son travail en y insérant les découvertes du défunt « pour qu'elles ne se perdent pas ». Ceci est à l'origine de la rédaction de la quatrième partie de ses *Exercitationes geometricæ sex* [7].

Les tentatives de généralisation de Cavalieri. Face aux cas $m = 3$ et $m = 4$, Cavalieri n'est pas dans la position de faire des essais afin de valider sa théorie par applications de celle-ci pour obtenir des propositions déjà connues et démontrées par d'autres voies. Il doit trouver de nouveaux résultats « dépassant par là même le cadre de la géométrie proprement dite », comme l'écrit Koyré[27].

Avec les mêmes notations et la même figure utilisée pour la preuve du cas $m = 2$ (voir aussi la figure 7), les démonstrations de Cavalieri peuvent se transposer de la manière suivante.

Preuve pour $m = 3$. Dans ce cas[28], Cavalieri utilise une structure de preuve différente que celle pour $m = 2$. Utilisant d'emblée le résultat pour ce cas, il obtient

$$3 = \frac{\oint_C^G a^2}{\oint_C^G x^2} = \frac{\oint_C^G a^3}{\oint_C^G ax^2} \qquad \text{d'où} \qquad \oint_C^G a^3 = 3\oint_C^G ax^2 = 3\oint_C^G (x+y)x^2 = 3\oint_C^G x^3 + 3\oint_C^G yx^2.$$

---

[25] [6]. Il s'agit d'un recueil de problèmes divers ayant pour objectif de montrer l'utilité des logarithmes. C'est la première fois que ce résultat est publié [3, p. 85].

[26] Voir la note 37.

[27] [16, p. 353–354].

[28] [7, proposition XXI, p. 273–274]. Pour une traduction du texte en anglais, voir [21, p. 215–216].

Or, il sait aussi que

$$\oint_C^G a^3 = \oint_C^G (x+y)^3 = \oint_C^G x^3 + 3\oint_C^G x^2 y + 3\oint_C^G x y^2 + \oint_C^G y^3. \tag{9}$$

En égalant cette dernière expression avec la précédente et en utilisant $\oint_C^G x^3 = \oint_C^G y^3$, il trouve

$$\oint_C^G x^3 = 3\oint_C^G x y^2 \qquad \text{et donc aussi} \qquad \oint_C^G y^3 = 3\oint_C^G x^2 y.$$

Par conséquent, l'égalité (9) devient $\oint_C^G a^3 = 4\oint_C^G x^3$.

Preuve pour $m = 4$. Ici[29], Cavalieri reprend la même idée d'amorce que dans le cas $m = 2$ car l'approche pour $m = 3$ ne se généralise pas à ce cas :

$$\oint_C^G x^4 = \oint_C^H \left(\frac{1}{2}a - z\right)^4 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a + z\right)^4, \qquad \oint_C^G y^4 = \oint_C^H \left(\frac{1}{2}a + z\right)^4 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a - z\right)^4.$$

En additionnant ces expressions, on trouve après avoir développé et effectué les simplifications nécessaires[30]

$$\oint_C^G x^4 + \oint_C^G y^4 = 2\left[\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4 + \oint_C^H z^4 + \oint_H^G z^4\right] + 12\left[\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2\right]$$

ou

$$\oint_C^G x^4 = \oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4 + \oint_C^H z^4 + \oint_H^G z^4 + 6\left[\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + \oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2\right]. \tag{10}$$

Son idée, témoignant de la difficulté éprouvée face à cette preuve, est de décomposer le rapport recherché en un produit de rapports connus. Tout d'abord, par une généralisation de (1), on a (en notant h la hauteur du parallélogramme AG)

$$\frac{\oint_C^G x^4}{\oint_C^H z^4} = \frac{\oint_C^G a^4}{\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^4} = \frac{a^4 h}{\left(\frac{1}{2}a\right)^4 \frac{1}{2}h} = 32 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\oint_C^G x^4}{\oint_C^H z^4 + \oint_H^G z^4} = 16, \tag{11}$$

et donc (10) devient

$$15 = 16 - 1 = \frac{\oint_C^G x^4 - \oint_C^H z^4 - \oint_H^G z^4}{\oint_C^H z^4 + \oint_H^G z^4} = \frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4 + 6\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + 6\oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2}{\oint_C^H z^4 + \oint_H^G z^4}. \tag{12}$$

Puis, en multipliant

$$\frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 a^2}{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4} = 4 \tag{13}$$

et

$$\frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4}{6\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + 6\oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2} = \frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2}{6\oint_C^H z^2 + 6\oint_H^G z^2} = \frac{2\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2}{12\oint_C^H z^2} = \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

il trouve

$$\frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 a^2}{6\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + 6\oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2} = 2. \tag{15}$$

Ensuite, (15) et (13), livrent

$$\frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 a^2}{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4 + 6\oint_C^H \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2 + 6\oint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 z^2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{4}{3}. \tag{16}$$

---

[29] [7, proposition XXII, p. 274–277].

[30] « Quapropter o.qq. triangulorum, *CAE*, *CGE*, æquabuntur o.qq. *AF*, & triangulorum, *CBM*, *EMF*, bis una cum 12. factis sub o.q. *AF*, & sub o.q. triangulorum, *CBM*, *EMF* » [7, p. 275]. Nous avons modifié les lettres du texte original pour qu'elles correspondent à notre figure.

Enfin, en multipliant (16), (12) et l'inverse de (11), Cavalieri trouve

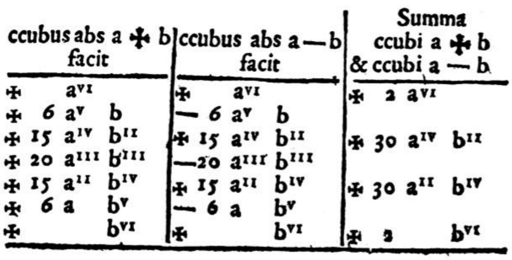
$$\frac{\oint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2 a^2}{\oint_C^G x^4} = \frac{4}{3}\cdot 15 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{4}$$

et donc $\oint_C^G a^4 = 5 \oint_C^G x^4$.

Plus m devient grand, plus il est difficile pour Cavalieri de trouver le moyen de démontrer l'égalité $\oint_C^G a^m = (m+1) \oint_C^G x^m$ puisque le nombre de rapports partiels à déterminer augmente. C'est ce qu'il explique à Evangelista Torricelli (1608–1647) dans sa lettre du 25 octobre 1644 :

> « En somme, vous avez également recueilli le beau et le bien qui, il me semble, peuvent être déduits de ce lemme dont, même si je ne l'ai pas entièrement démontré par moi-même, ce que j'ai prouvé a pu cependant éclairer le reste, le tout consistant en la décomposition des dignités[31] algébriques faites par le diamètre du parallélogramme et par la ligne divisant en deux les côtés opposés; celle-ci, même si elle apparaît facile dans les lignes, les carrés et les cubes, plus on monte, plus le nombre de pièces grandit, et en voulant marcher précisément le long de la route que j'ai prise, elle devient beaucoup plus confuse, et pourtant j'y suis resté; si la pratique de l'Algèbre littérale m'avait été connue, comme alors je n'y avais pas prêté attention et je l'ai vu ensuite, j'aurais levé une telle confusion, et j'aurais fini moi aussi la démonstration puisqu'elle consiste en ladite décomposition. Mais tout sera mieux compris par la démonstration. »
>
> [22, III, p. 234–235], [12, p. 79] (trad. N.E. & P.H.)

La généralisation de Cavalieri. Cavalieri est tout à fait lucide lorsqu'il indique à Torricelli que la principale difficulté qui l'arrête est sa faible pratique du calcul littéral. Selon son propre aveu, il ne sait « pas très bien gérer les opérations algébriques »[32]. Une lettre écrite par Beaugrand peu avant son décès[33] et contenant un lemme utile (voir figure 6) va procurer à Cavalieri les lumières nécessaires pour effectuer une preuve de structure similaire pour tous les autres cas.



ccubus abs a + b facit	ccubus abs a — b facit	Summa ccubi a + b & ccubi a — b
+ a^vi	+ a^vi	+ 2 a^vi
+ 6 a^v b	— 6 a^v b	
+ 15 a^iv b^ii	+ 15 a^iv b^ii	+ 30 a^iv b^ii
+ 20 a^iii b^iii	—20 a^iii b^iii	
+ 15 a^ii b^iv	+ 15 a^ii b^iv	+ 30 a^ii b^iv
+ 6 a b^v	— 6 a b^v	
+ b^vi	+ b^vi	+ 2 b^vi

2 : $2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2$

3 : $2\mathbf{a}^3 + 6\mathbf{a}\mathbf{b}^2$

4 : $2\mathbf{a}^4 + 12\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{b}^4$

5 : $2\mathbf{a}^5 + 20\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2 + 10\mathbf{a}\mathbf{b}^4$

6 : $2\mathbf{a}^6 + 30\mathbf{a}^4\mathbf{b}^2 + 30\mathbf{a}^2\mathbf{b}^4 + 2\mathbf{b}^6$

7 : $2\mathbf{a}^7 + 42\mathbf{a}^5\mathbf{b}^2 + 70\mathbf{a}^3\mathbf{b}^4 + 14\mathbf{a}\mathbf{b}^6$

8 : $2\mathbf{a}^8 + 56\mathbf{a}^6\mathbf{b}^2 + 140\mathbf{a}^4\mathbf{b}^4 + 56\mathbf{a}^2\mathbf{b}^6 + 2\mathbf{b}^8$

9 : $2\mathbf{a}^9 + 72\mathbf{a}^7\mathbf{b}^2 + 252\mathbf{a}^5\mathbf{b}^4 + 168\mathbf{a}^3\mathbf{b}^6 + 18\mathbf{a}\mathbf{b}^8$

FIGURE 6. Le lemme de Beaugrand : développement de $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^m + (\mathbf{a}+\mathbf{b})^m$ pour $m = 6$ (gauche) [7, p. 283–285] et $m = 2, \ldots, 9$ (droite).

---

[31] Ce terme est utilisé ici par Cavalieri pour désigner les produits (ou monômes) qui apparaissent : « Cela est plus connu des Géomètres sous le nom de puissance que sous celui de Dignité. » (A. Savérien, *Dictionnaire universel de mathématique et de physique*, Tome 1, J. Rollin, Paris, 1753, p. 275)

[32] [12, p. 78].

[33] Cette lettre est aujourd'hui perdue [1, p. 339].

Preuve pour $m = 5$. Dans ce cas[34], le lemme indiqué par Beaugrand appliqué avec $\mathbf{a} = \frac{1}{2}a$ et $\mathbf{b} = z$ livre, en groupant selon $\fint_C^H$ et $\fint_H^G$,

$$\begin{aligned}\fint_C^G x^5 + \fint_C^G y^5 &= \fint_C^H \left(\frac{1}{2}a - z\right)^5 + \fint_H^G \left(\frac{1}{2}a + z\right)^5 + \fint_C^H \left(\frac{1}{2}a + z\right)^5 + \fint_H^G \left(\frac{1}{2}a - z\right)^5 \\ &= \fint_C^H 2\left(\frac{1}{2}a\right)^5 + 20\left(\frac{1}{2}a\right)^3 z^2 + 10\left(\frac{1}{2}a\right) z^4 + \fint_H^G 2\left(\frac{1}{2}a\right)^5 + 20\left(\frac{1}{2}a\right)^3 z^2 + 10\left(\frac{1}{2}a\right) z^4\end{aligned}$$

ou[35]

$$2\fint_C^G x^5 = 2\fint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5 + 40\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^3 z^2 + 20\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right) z^4.$$

Or, Cavalieri sait que

$$\frac{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5}{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^3 z^2} = \frac{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\fint_H^G z^2} = 3 \qquad \text{d'où} \qquad 40\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^3 z^2 = \frac{40}{3}\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5 = \frac{20}{3}\fint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5$$

et

$$\frac{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5}{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right) z^4} = \frac{\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^4}{\fint_H^G z^4} = 5 \qquad \text{d'où} \qquad 20\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right) z^4 = 4\fint_H^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5 = 2\fint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5.$$

Ainsi, il trouve

$$2\fint_C^G x^5 = \left(2 + \frac{20}{3} + 2\right)\fint_C^G \left(\frac{1}{2}a\right)^5 = \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{32}\fint_C^G a^5$$

et donc $\fint_C^G a^5 = 6\fint_C^G x^5$.

Cavalieri traite encore sur un modèle identique les cas[36] $m = 6$ et $m = 9$. Le lecteur nous saura gré de lui épargner les détails. La structure de cette preuve peut en effet être réutilisée afin d'obtenir le résultat pour d'autres valeurs de m, à condition de connaître le développement suggéré par Beaugrand et d'avoir démontré le résultat pour les cas précédents. Toutefois, l'ampleur de la tâche ne cesse de croître et une preuve générale ne peut être obtenue sans parvenir à en exprimer son mécanisme.

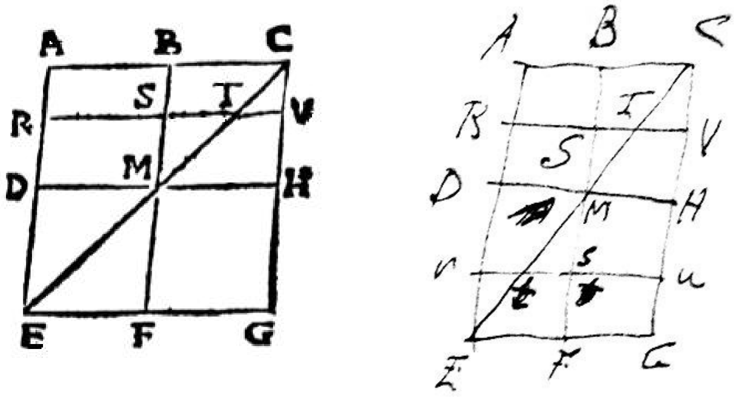


FIGURE 7. Copie par Lagrange (droite) de la figure de Cavalieri (gauche).

[34] [7, proposition XXV, p. 286–287].

[35] « Bis o.qc. trianguli, *CEG*, æquantur bis o.qc. *AF*, plus 40 factis sub o.c. *DF*, & sub o.q. *EMF*, plus 20. factis sub o.l. *DF*, & sub o.qq. *EMF* » [7, p. 287]. La même remarque que celle figurant à la note 30 s'applique.

[36] [7, proposition XXVI, p. 288–289], [7, proposition XXVII, p. 289–290].

La généralisation de Lagrange. La rédaction de la preuve proposée par Lagrange n'est pas d'un accès aisé de prime abord (bornes d'intégration absentes, notations compliquées). En reprenant nos notations habituelles, nous la présentons de la manière suivante.

Tout comme Cavalieri, Lagrange utilise l'identité de Beaugrand

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^m+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^m = 2\mathbf{a}^m + 2\binom{m}{2}\mathbf{a}^{m-2}\mathbf{b}^2 + 2\binom{m}{4}\mathbf{a}^{m-4}\mathbf{b}^4+\cdots. \tag{17}$$

À l'aide de (17), en sommant à nouveau de manière symétrique, il trouve alors

$$\begin{aligned}\int_C^G y^m &= \int_C^H\left(\frac{1}{2}a+z\right)^m + \int_H^G\left(\frac{1}{2}a-z\right)^m\\ &= \int_C^H\left[\left(\frac{1}{2}a+z\right)^m+\left(\frac{1}{2}a-z\right)^m\right]\\ &= \int_C^G\left(\frac{1}{2}a\right)^m + \binom{m}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)^{m-2}2\int_C^H z^2 + \binom{m}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^{m-4}2\int_C^H z^4+\cdots.\end{aligned} \tag{18}$$

Or, on a d'une part $\frac{\int_C^G y^{2m}}{2\int_C^H z^{2m}} = \frac{\int_C^G a^{2m}}{2\int_C^H\left(\frac{1}{2}a\right)^{2m}} = 2^{2m}$ (proposition 22) d'où l'égalité $2\int_C^H z^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}\int_C^G y^{2m}$ et, d'autre part, $\int_C^G\left(\frac{1}{2}a\right)^m = \frac{1}{2^m}\int_C^G a^m$. Ainsi, (18) devient

$$\int_C^G y^m = \frac{1}{2^m}\int_C^G a^m + \binom{m}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)^{m-2}\cdot\frac{1}{2^2}\int_C^G y^2 + \binom{m}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^{m-4}\cdot\frac{1}{2^4}\int_C^G y^4+\cdots. \tag{19}$$

« Or on a prouvé », écrit-il, par hypothèse de récurrence, que $\int_C^G y^2 = \frac{1}{3}\int_C^G a^2$, $\int_C^G y^4 = \frac{1}{5}\int_C^G a^4$ et ainsi de suite. Par conséquent, (19) devient

$$\int_C^G y^m = \frac{1}{2^m}\int_C^G a^m + \binom{m}{2}\frac{a^{m-2}}{2^{m-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}\int_C^G a^2 + \binom{m}{4}\frac{a^{m-4}}{2^{m-4}}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{5}\int_C^G a^4+\cdots. \tag{20}$$

Mais, puisque nous avons « en general » $\int_C^G a^m = a^m b$ où $b = AE$, (20) devient

$$\int_C^G y^m = \frac{1}{2^m}a^m b + \binom{m}{2}\frac{a^m b}{2^m\cdot 3} + \binom{m}{4}\frac{a^m b}{2^m\cdot 5}+\ldots = \frac{a^m b}{2^m}\left(1+\binom{m}{2}\cdot\frac{1}{3}+\binom{m}{4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots\right). \tag{21}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}
m=1 &\quad \int_C^G y = \frac{ab}{2}\left(=\frac{\int_C^G a}{2}\right),\\
m=2 &\quad \int_C^G y^2 = \frac{a^2b}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{a^2b}{3}\left(=\frac{\int_C^G a^2}{3}\right),\\
m=3 &\quad \int_C^G y^3 = \frac{a^3b}{8}\left(1+3\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{a^3b}{4}\left(=\frac{\int_C^G a^3}{4}\right),\\
m=4 &\quad \int_C^G y^4 = \frac{a^4b}{16}\left(1+6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{a^4b}{5}\left(=\frac{\int_C^G a^4}{5}\right),
\end{aligned}$$

« et ainsi de suite ». Pour établir l'expresssion générale, il s'agit de trouver la somme de la série du membre de droite de (21). Pour cela, Lagrange intègre

$$1+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{4}x^4+\ldots = \frac{(1+x)^m+(1-x)^m}{2}$$

d'où

$$x+\binom{m}{2}\frac{x^3}{3}+\binom{m}{4}\frac{x^5}{5}+\ldots = \frac{(1+x)^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)}$$

qui, pour $x = 1$ donne $\frac{2^m}{m+1}$, la somme recherchée. Ainsi, nous avons

$$\oint_C^G y^m = \frac{a^m b}{m+1}\left(= \frac{\oint_C^G a^m}{m+1}\right).$$

Lagrange se rend compte que cette dernière intégration n'a pas lieu d'être puisqu'il utilise dans sa preuve ce qu'il cherche à démontrer ! Il ne met alors un point final à sa note qu'après avoir ajouté comment obtenir la somme de la série sans intégrer. Lagrange ne pousse probablement pas sa lecture de l'*Exercitatio quarta* plus loin car aucune mention n'est faite des applications du résultat présentées par Cavalieri.

Applications du « trésor » par Cavalieri. Le premier des problèmes envoyés par Cavalieri à Beaugrand[37] mentionnés ci-dessus permet de comprendre comment Cavalieri revient au « cadre de la géométrie » en envisageant une représentation concrète de son résultat pour $m \geq 3$. Ce problème concerne la quadrature des espaces délimités par les courbes $y = \frac{b}{a^m}x^m$ (voir figure 8) : *AGDF* est le premier espace, *AHDF* le second, *AIDF* le troisième, etc. Cavalieri[38] découvre que

$$ACDF = 2AGDF = 3AHDF = 4AIDF = \cdots. \tag{22}$$

En effet, par définition des courbes, on a par exemple dans le cas $m = 2$

$$\frac{AF^2}{AE^2} = \frac{BE}{EH} \quad \left(i.e.\ \frac{a^2}{x^2} = \frac{b}{y}\right)$$

et donc[39]

$$3 = \frac{o.q.\,AD}{o.q.\,\triangle ACD} = \frac{o.\ell.\,AD}{o.\ell.\,AHDF} \quad \left(i.e.\ \frac{\int_0^b a^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^b \left(\frac{ax}{b}\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a b\,\mathrm{d}x}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,\mathrm{d}x}\right).$$

Comme corollaire de ce résultat, Cavalieri obtient[40]

$$\frac{o.p.\,AD}{o.p.\ \text{« espace } m \text{ »}} = pm+1 \quad \left(i.e.\ = \frac{\int_0^a b^p\,\mathrm{d}x}{\int_0^a \left(\frac{b}{a^m}x^m\right)^p \mathrm{d}x}\right) \tag{23}$$

où p désigne une puissance entière quelconque (« omnes potestates »). Par exemple, pour $p = 3$ et $m = 4$, il trouve $\frac{o.c.\,AD}{o.c.\,AKDF} = 13$. En effet, on a

$$\frac{BE}{EK} = \frac{BE^4}{EG^4} \quad \left(i.e.\ \frac{b}{\frac{b}{a^4}x^4} = \frac{b^4}{\left(\frac{b}{a}x\right)^4}\right) \Longrightarrow \frac{BE^3}{EK^3} = \frac{BE^{12}}{EG^{12}} = \frac{BE}{EP}$$

---

[37] On trouve l'énoncé des ces problèmes dans une lettre de Cavalieri à Mersenne du 23 novembre 1641 [10, IV, p. 71–81]. Après avoir défini les courbes de la figure 8 (gauche) point par point par $\frac{AC}{AB} = \frac{BE}{BG} = \frac{BE^2}{BH^2} = \frac{BE^3}{BI^3} = \ldots$ ($AC = b$, $AB = y$, $BE = a$), Cavalieri demande : (1) On sait que $\frac{2}{1}AGDC = FC$ et $\frac{3}{2}AHDC = FC$. Est-il vrai que $\frac{4}{3}AIDC = FC$, $\frac{5}{4}AKDC = FC$ et ainsi de suite ? Cette question se résume aujourd'hui pour nous à la formule $\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[ab - \int_0^a \frac{b}{a^n}x^n\,\mathrm{d}x\right] = ab$. (2) Trouver le rapport du cyclindre circonscrit à chacun des solides engendrés par la révolution des courbes autour de *AC*. (Il est déjà connu que le cyclindre est triple du cône et double du conoïde parabolique). Aujourd'hui, on obtient immédiatement $\pi a^2 b / \left[\pi a^2 b - 2\pi \int_0^a \frac{b}{a^n}x^{n+1}\,\mathrm{d}x\right] = (n+2)/n$. (3) Trouver le rapport du cyclindre circonscrit à chacun des solides engendrés par la révolution des courbes autour de *CD*. (Comme on l'a vu, Cavalieri a trouvé que le cyclindre représente les $\frac{15}{8}$ du solide engendré par *AHDC* qui est la moitié d'un fuseau parabolique). La réponse à cette question peut aujourd'hui être donnée par $\pi b^2 a / \left[\pi \int_0^a \left(b - \frac{b}{a^n}x^n\right)^2 \mathrm{d}x\right]$ qui est égal à $1/\left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)$. (4) Les courbes pour $n \geq 3$ sont-elles des sections coniques ? Peut-on les rectifier ?

[38] [7, proposition XXIII, p. 279]. Dans la suite, nous avons changé les lettres de la figure originale de Cavalieri afin d'utiliser à sa place la figure 8.

[39] Voir la note 24. Comme ce résultat est une application directe de son « trésor » dont il doit l'idée de la démonstration au lemme de Beaugrand, Cavalieri écrit : « cela m'a (...) été appris par la démonstration que M. de Beaugrand m'a envoyée » [10, IV, p. 76].

[40] [7, proposition XXXI, p. 302–304].

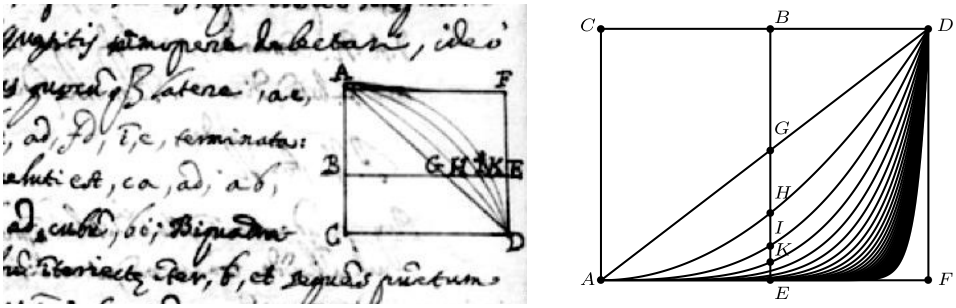


Figure 8. Figure de Cavalieri sur sa lettre à Mersenne du 23 novembre 1641 (Ms fr. nouv. acq. 6204, fol. 255r, Bibliothèque Nationale) et les courbes $y=\frac{b}{a^m}x^m$ pour $m=1,\ldots,20$ ($AF=a$, $FD=b$).

où P est le point d'intersection de BE avec la courbe pour $m=3\cdot 4=12$. Par conséquent, Cavalieri peut déduire que[41]

$$\frac{o.c.\,AD}{o.c.\,AKDF}=\frac{o.\ell.\,AD}{o.\ell.\,APDF}=13\quad\left(i.e.\ =\frac{\int_0^a b^3\,\mathrm{d}x}{\int_0^a\left(\frac{b}{a^4}x^4\right)^3\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^a b\,\mathrm{d}x}{\int_0^a\frac{b}{a^{12}}x^{12}\,\mathrm{d}x}\right).$$

En général, comme il l'observe, le schéma de la preuve est clair[42] ce qui lui permet de construire une table (voir figure 10, gauche).

Cavalieri s'intéresse encore aux rapports de *o.q. AD* à *o.q.* des « espaces résiduels » *AGDC*, *AHDC*, *AIDC* et ainsi de suite[43] (voir figure 10, droite, pour les valeurs trouvées). Il explique que ces rapports sont obtenus par un même algorithme : par exemple, dans le cas du quatrième espace résiduel *AKDC*, la valeur se trouve en faisant $(\mathbf{4}+1)(2\cdot\mathbf{4}+1)=5\cdot 9=45$, puis $2(9-5)+5=13$ et enfin $45-13=32$ d'où

$$\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,AKDC}=\frac{45}{32}\quad\left(i.e.\ =\frac{\int_0^a b^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^a\left(b-\frac{b}{a^4}x^4\right)^2\mathrm{d}x}\right).$$

La figure 9 représente géométriquement, à l'intérieur du parallélépipède *o.q. AD*, le volume *o.q. AKDC* (en rouge) déterminé par la courbe *AKD* (dans le rectangle *ACDF*) d'équation $y=\frac{b}{a^4}x^4$. Cavalieri justifie son algorithme sans dire explicitement que la structure de sa preuve se base géométriquement sur l'égalité $EB^2=(EK+KB)^2=EK^2+2EK\cdot KB+KB^2$ qui détermine dans le parallélépipède, outre celui qu'il cherche à calculer, trois autres volumes (bleu, vert clair et vert foncé).

Nous avons :

(i) $\frac{o.q.\,AD}{o.\ell.\,AD\,\&\,o.\ell.\,AKDF}=\frac{o.\ell.\,AD}{o.\ell.\,AKDF}=4+1=5=\frac{45}{9}$ par (22) ;

(ii) $\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,AKDF}=2\cdot 4+1=9=\frac{45}{5}$ pour le volume bleu par (23).

Ainsi, à l'aide de (i) et (ii), Cavalieri trouve

$$\frac{45}{9-5}=\frac{o.q.\,AD}{o.\ell.\,AD\,\&\,o.\ell.\,AKDF-o.q.\,AKDF}=\frac{o.q.\,AD}{o.\ell.\,AKDF\,\&\,o.\ell.\,AKDC}$$

---

[41] À nouveau, il utilise son principe discuté à la note 24.

[42] « Sed ut universaliter fiat demonstratio sic procedemus. » [7, p. 304] Ce n'est toutefois pas l'avis partagé par tous les historiens : « The extent to which Cavalieri's demonstration of this proposition is truly universal is unclear. However, what is clear are the pains Cavalieri takes – that a modern mathematician would not take – to explain how the degree of the diagonal in question can be represented numerically and employed in a computation to achieve the desired ratio. » [18, p. 238]

[43] [7, proposition XXXIII, p. 307–309].

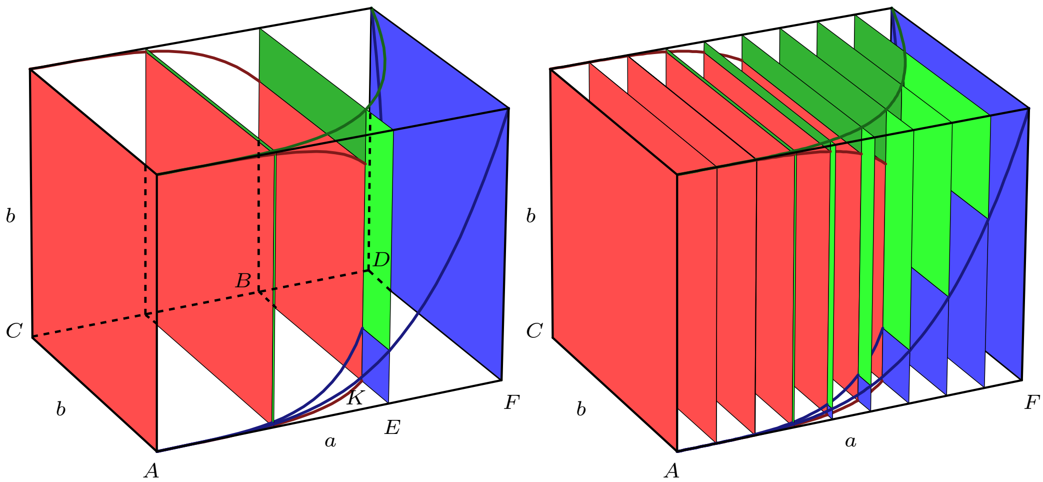


Figure 9. Le volume *o.q. AKDC* (en rouge) et les trois autres volumes constituant le parallélépipède *o.q. AD.*

Poteſtates	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primum ſpatium	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Secundum	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Tertium	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Quartum	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41
Quintum	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51
Sextum	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61
Septimum	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71
Octauum	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81
Nonum	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91
Decimum	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101

Reſidua ſpatia.	Pro Quadratis Propor-tio.	
1	6	2
2	15	8
3	28	14
4	45	32
5	66	50
6	91	72
7	120	98
8	153	128
9	190	162
10	231	200

Figure 10. Tables construites par Cavalieri [7, p. 306 & p. 309] (dans la table de droite, lire 18 au lieu de 14).

d'où le rapport pour les volumes verts

$$\frac{45}{2(9-5)} = \frac{o.q.\,AD}{2(o.\ell.\,AKDF \;\&\; o.\ell.\,AKDC)}.$$

Cette dernière égalité et (ii) livrent le rapport pour le volume constitué des volumes verts et bleu

$$\frac{o.q.\,AD}{2(o.\ell.\,AKDF \;\&\; o.\ell.\,AKDC) + o.q.\,AKDF} = \frac{45}{2(9-5)+5} = \frac{45}{13}$$

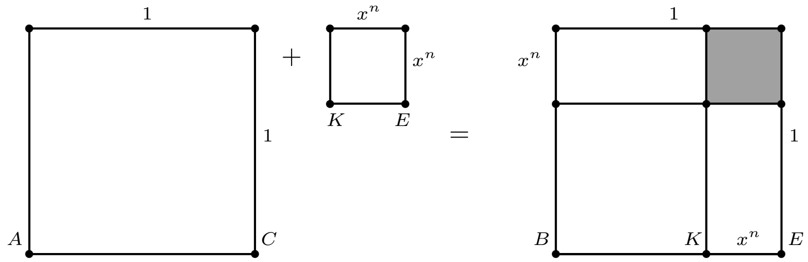
et donc

$$\frac{o.q.\,AD}{o.q.\,AKDC} = \frac{o.q.\,AD}{o.q.\,AD - 2(o.\ell.\,AKDF \;\&\; o.\ell.\,AKDC) - o.q.\,AKDF} = \frac{45}{45-13} = \frac{45}{32}.$$

Par conséquent, l'algorithme de calcul est justifié.

Conclusion. Aujourd'hui encore, comme du temps de Lagrange, il est possible de faire un retour dans le passé, de ressentir une part des impressions des pionniers et d'utiliser certaines des idées développées par Cavalieri. Parvenir à simplifier sa démarche afin d'en ramener l'essentiel dans le présent est une manière de lui rendre hommage : Gerhard Wanner observe rapidement que l'approche suivie ci-dessus par Cavalieri pour la construction de la table de la figure 10 (droite) est trop compliquée et qu'une formule littérale peut être obtenue en utilisant son « trésor ».

En effet, pour $a = b = 1$, l'égalité suivante des surfaces (où le carré grisé est compté deux fois)



devient $1 + (x^n)^2 = (BK)^2 + 2x^n$ et donc

$$1 + \frac{1}{2n+1} = \int (BK)^2 + \frac{2}{n+1}$$

d'où

$$\int (BK)^2 = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

Remerciements

C'est toujours un grand plaisir de remercier Étienne Ghys pour sa recommandation nécessaire afin de consulter les manuscrits de Lagrange et aussi pour ses remarques sur les versions précédentes de ce texte. Merci également à Gerhard Wanner pour sa lecture de ce travail, ses belles figures (figure 5 (droite) et figure 9) et ses encouragements, à Nicola Ermotti pour son aide avec les traductions de l'italien et à mon fils Alexandre (7 ans) d'avoir trouvé « remarquable » qu'un cube se décompose en trois pyramides identiques.

Déclaration d'intérêts

L'auteur ne travaille pas, ne conseille pas, ne possède pas de parts, ne reçoit pas de fonds d'une organisation qui pourrait tirer profit de cet article, et n'a déclaré aucune autre affiliation que ses organismes de recherche.

Annexe. La note de Lagrange

Une page de titre (fol. 62r) indiquant « Sur la Géométrie des Indivisibles » précède la note de Lagrange [17]. Plus loin suivent (fol. 63v) les indications « n. 32. (7 pages) Sur les quadratures par la Geometrie des indivisibles et par la methode de Fermat tirée des progressions géométriques » (probablement de la main de Lagrange[44]) puis les signatures des membres de la commission nommée après la mort de Lagrange afin d'examiner ses manuscrits : Gaspard de Prony (1755–1839), Siméon Denis Poisson (1781–1840), Adrien-Marie Legendre (signé Le Gendre) (1752–1833) et Sylvestre-François Lacroix (1765–1843). Dans la transcription ci-dessous, nous avons reproduit à l'identique l'orthographe et les notations du texte de Lagrange.

[44] Puisque la note de Lagrange ne traite pas de la méthode de Fermat, il est possible qu'elle fasse partie d'un projet de recherches plus vaste sur les méthodes de quadrature du XVII$^{\text{ème}}$ siècle qui n'a finalement pas vu le jour.

Sur la géométrie des indivisibles.

En 1635 Cavalieri a publié sa geometrie intitulée *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*[45].

Dans la prop. 19 du livre 2, il trouve que la somme de toutes les lignes du parallelogramme a toutes les lignes du triangle est comme 2 à 1, car ces sommes sont comme les aires[46].

Dans la prop. 24 il trouve que la somme des carrés de toutes les lignes du parallelogramme aux carrés de toutes les lignes du triangle est comme 3 à 1[47].

Pour cela il prouve d'abord prop. 9 que tous les carrés des lignes de deux parallélogrammes qui ont la meme hauteur sont comme les carrés des bases, ce qui est evident et cette proposition est generale pour toutes les puissances[48]. Ensuite prop. 10 il prouve que tous les carrés des lignes de deux parallelogrammes ayant meme base sont comme les hauteurs, ce qui se demontre par l'ancienne geometrie[49]. Ce theoreme est vrai aussi de toutes les puissances.

Donc pour deux parallelogrammes dont les bases sont b et B, les hauteurs h et H, les sommes de toutes les puissances m des lignes paralleles à la base seront comme $b^m h$ à $B^m H$ (prop. 11)[50].

De la il conclut (prop. 22) que si l'on a deux parallelogrammes quelconques les sommes de tous les carrés des lignes dans les parallelogrammes sont proportionnelles aux sommes de tous les carrés des lignes dans les triangles[51] ce qu'il demontre a la maniere ancienne en divisant les deux parallelogrammes en un nombre quelconque de parallelogrammes qui ont meme base et dont les hauteurs sont proportionnelles aux hauteurs totales, et considérant les parallelogrammes inscrits et circonscrits aux triangles. Car il resulte de la que la meme proportion a toujours lieu pour les parallelogrammes partiels faisant partie des grands parallelogrammes, et pour les portions de ces parallelogrammes qui forment les figures inscrites et circonscrites aux triangles.

Il resulte de la que deux triangles dont les bases b et B et les hauteurs h, H, ont les sommes des puissances m de toutes les leurs lignes paralleles à la base comme $b^m h$ à $B^m h$.

Enfin dans la prop. 24 il demontre que la somme des carrés de toutes les lignes d'un parallélogramme est a la somme des carrés de toutes les lignes du triangle comme 3 à 1.

Ayant tiré BF qui divise le parallelogramme en deux, on a $RT = RS + ST$ donc

$$\overline{RT}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{ST}^2 + 2RS \times ST,$$

et si on prend ru egalement eloigné de EG que RV l'est de AC on a [puisque $rt = rs - st$]

$$\overline{rt}^2 = \overline{rs}^2 + \overline{st}^2 - 2RS \times st$$

donc

$$\overline{RT}^2 + \overline{rt}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{rs}^2 + \overline{ST}^2 + \overline{st}^2.$$

Donc

$$\int \overline{RT}^2 = \int \overline{RS}^2 + 2 \int \overline{ST}^2;$$

mais $\int \overline{ST}^2 : \int \overline{RT}^2 = \overline{BC}^2 \cdot BM : \overline{AC}^2 \cdot AE = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} : 1 = 1 : 8,$

$\int \overline{RS}^2 = \frac{1}{4} \int \overline{RV}^2$ donc

$$\int \overline{RT}^2 = \frac{1}{4} \int \overline{RV}^2 + \frac{1}{4} \int \overline{RT}^2;$$

donc $3 \int \overline{RT}^2 = \int \overline{RV}^2$ et de la $\int \overline{RT}^2 = \frac{1}{3} \int \overline{RV}^2$.

---

[45] [5]. En 1653, une seconde édition paraît (avec pagination continue) [8].

[46] [5, p. 63], [8, p. 146].

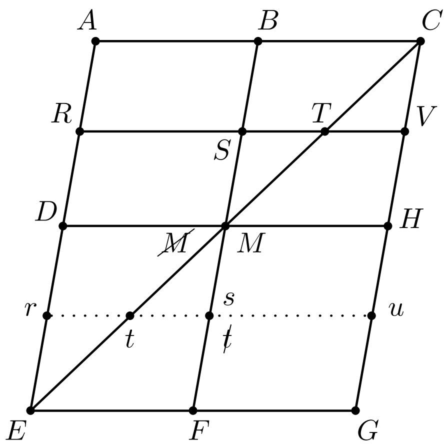
[47] [5, p. 78], [8, p. 159].

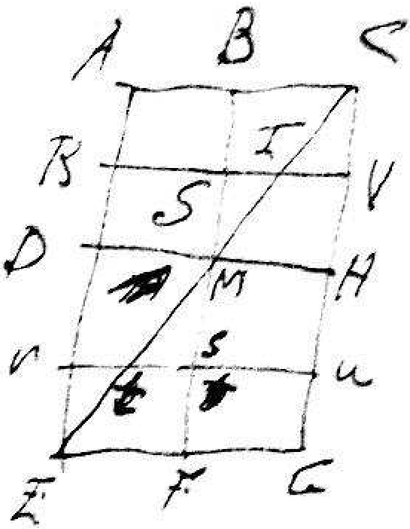
[48] [5, p. 29], [8, p. 120].

[49] [5, p. 30], [8, p. 121]

[50] [5, p. 32], [8, p. 123].

[51] [5, p. 68], [8, p. 150].





Dans les exercitationes geometricæ [sex] qui est paru en 1647 il a determiné (prop. 21 et 22) les proportions qu'ont tous les cubes et les quatriemes puissances des lignes d'un parallelogramme a celles des lignes d'un triangle. Il a trouve la premiere de 4 à 1 et la 2^{d} de 5 à 1 et de la il a conclu pour les puissances suivantes. Il dit dans la preface de l'exercitatione 4^{m} qu'il avoit trouvé ces resultats des 1640 et qu'il les a publiés dans le dernier probleme de sa Centuria[52].

Voici comment on peut faire la demonstration generale. En conservant la meme figure on aura [puisque $RT = RS + ST$]

$$\int \overline{RT}^m = \int \overline{RS}^m + m\overline{RS}^{m-1}\int TS + \frac{m(m-1)}{2}\overline{RS}^{m-2}\int \overline{TS}^2 + \&\text{c}.$$

Or $\int TS = 0$, $\int \overline{TS}^3 = 0$ &c et $\int \overline{TS}^2 = \frac{1}{4}\int \overline{RT}^2$, $\int \overline{TS}^4 = \frac{1}{16}\int \overline{RT}^4$ &c et $\int \overline{RS}^m = \frac{1}{2^m}\int \overline{RV}^m$ [car $RS = \frac{1}{2}RV$].

$$\int \overline{RT}^m = \frac{1}{2^m}\int \overline{RV}^m + \frac{m(m-1)}{2}\overline{RS}^{m-2} \times \frac{1}{2^2}\int \overline{RT}^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\overline{RS}^{m-4} \times \frac{1}{2^4}\int \overline{RT}^4 + \&\text{c}.$$

Or on a prouvé que $\int \overline{RT}^2 = \frac{\int \overline{RV}^2}{3}$, $\int \overline{RT}^4 = \frac{\int \overline{RV}^4}{5}$ &c donc

$$\int \overline{RT}^m = \frac{1}{2^m}\int \overline{RV}^m + \frac{m(m-1)}{2}\,\frac{\overline{RV}^{m-2}}{2^{m-2}} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{\int \overline{RV}^2}{3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{\overline{RV}^{m-4}}{2^{m-4}} \times \frac{1}{2^4} \times \frac{\int \overline{RV}^4}{5} + \&\text{c}.$$

Mais on a en general [$\overline{RV} = \overline{AC}$ et] $\int \overline{RV}^m = \overline{AC}^m \times AE$. Donc

$$\begin{aligned}\int \overline{RT}^m &= \frac{1}{2^m}\overline{AC}^m \times AE + \frac{m(m-1)}{2}\,\frac{\overline{AC}^m \times AE}{2^m\cdot 3} \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{\overline{AC}^m \times AE}{2^m\cdot 5} + \&\text{c} \\ &= \frac{\overline{AC}^m \times AE}{2^m}\left(1 + \frac{m(m-1)}{2\cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \&\text{c}\right).\end{aligned}$$

[52] Voir l'ouvrage cité à la note 25.

$$\text{Soit } m=1 \text{ donc } \int RT = \frac{AC\times AE}{2}$$

$$m=2 \qquad \int \overline{RT}^2 = \frac{\overline{AC}^2\times AE}{4}\left(1+\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\overline{AC}^2\times AE}{3}$$

$$m=3 \qquad \int \overline{RT}^3 = \frac{\overline{AC}^3\times AE}{8}\left(1+1\right) = \frac{\overline{AC}^3\times AE}{4}$$

$$m=4 \qquad \int \overline{RT}^4 = \frac{\overline{AC}^4\times AE}{16}\left(1+2+\tfrac{1}{5}\right) = \frac{\overline{AC}^4\times AE}{5}$$

et ainsi de suite. Par suite

$$1+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^4+\&c = \frac{(1+x)^m+(1-x)^m}{2}.$$

et integrant on aura

$$x+\frac{m(m-1)}{2\cdot 3}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\&c = \frac{(1+x)^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)}.$$

Faisant $x=1$ on a

$$1+\frac{m(m-1)}{2\cdot 3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\&c = \frac{2^m}{m+1}.$$

Donc $\int \overline{RT}^m = \frac{\overline{AC}^m\times AE}{m+1}$.

On peut trouver aussi la somme de la serie sans integration car la serie

$$1+\frac{m(m-1)}{2\cdot 3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\&c$$
$$= \frac{m+1+\frac{(m+1)m(m-1)}{2\cdot 3}+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\&c}{m+1} = \frac{(1+x)^{m+1}-(1-x)^{m+1}}{2(m+1)}$$

en faisant $x=1$ et par consequent $=\dfrac{2^m}{m+1}$ comme plus haut.

Références

[1] K. Andersen, « Cavalieri's method of indivisibles », *Arch. Hist. Exact Sci.* **31** (1985), no. 4, p. 291-367.

[2] H. Bosmans, « Un chapitre de l'œuvre de Cavalieri (Les Propositions XVI-XXVII de l'*Exercitatio quarta* », *Mathesis* **36** (1922), p. 365-373 et p. 446-456.

[3] C. B. Boyer, « Cavalieri, limits and discarded infinitesimals », *Scr. Math.* **8** (1941–1942), p. 79-91.

[4] L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 3e edition, Bibliothèque de philosophie contemporaine, Presses Universitaires de France: Paris, 1947.

[5] B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum, nova quadam ratione promota*, Clementis Ferronij: Bologne, 1635.

[6] B. Cavalieri, *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso, e la facilità de' logaritmi nella gnomonica, astronomia, geograffia, altimetria, pianimetria, stereometria, & aritmetica prattica*, Giacomo Monti e Carlo Zenero: Bologne, 1639.

[7] B. Cavalieri, *Exercitationes geometricæ sex*, Iacobi Montij: Bologne, 1647.

[8] B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum. Nova quadam ratione promota*, Ex Typographia de Ducijs: Bologne, 1653.

[9] A. Dahan Dalmedico, « La méthode critique du « mathématicien-philosophe » », dans *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace–Lagrange–Monge* (J. Dhombres, ed.), Dunod: Paris, 1992, p. 171-192.

[10] P. Fermat, *Œuvres de Fermat* (P. Tannery et C. Henry, eds.), Gauthier-Villars: Paris, 1891–1922.

[11] F. de Gandt, « Cavalieri's indivisibles and Euclid's canons », dans *Revolution and continuity : essays in the history and philosophy of early modern science*, The Catholic University of America Press: Washington, 1991, p. 157-182.

[12] E. Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles*, Edizioni Cremonese: Bologne, 1980.

[13] P. Henry, « Un mémoire inédit de Lagrange sur le développement successif des courbes », *Enseign. Math. (2)* **67** (2021), no. 1-2, p. 95-122.

[14] J. Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Joannes Plancus: Linz, 1615.

[15] F. Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint : geometry* (E. R. Hendrik et C. A. Noble, eds.), Dover Publications: New York, 2004.

[16] A. Koyré, « Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continus », dans *Études d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, 1985, p. 334-361.

[17] J. L. Lagrange, « Sur la géométrie des indivisibles ». Manuscrits de la Bibliothèque de l'Institut de France, Ms 909 fol. 63–66.

[18] M. Muntersbjorn, « The quadrature of parabolic segments 1635–1658 : A response to Herbert Breger », dans *The growth of mathematical knowledge* (E. Grosholz et H. Breger, eds.), Synthese Library, vol. 289, Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 231-256.

[19] P. Palmieri, « Superposition : on Cavalieri's practice of mathematics », *Arch. Hist. Exact Sci.* **63** (2009), p. 471-495.

[20] L. Pepe, « Lagrange (1736–1813) : a life in mathematics », *Lettera Matematica* **2** (2014), p. 3-8.

[21] D. J. Struik, *A source book in mathematics, 1200–1800*, Harvard University Press: Cambridge (MA), 1969.

[22] E. Torricelli, *Opere di Evangelista Torricelli*, N. Zanichelli: Bologne, 1919.

[23] H. G. Zeuthen, « Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat », *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger* **2** (1895), p. 37-80.

[24] H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Teubner: Leipzig, 1903.