



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 85–90



# Asymptotics at infinity of solutions to the Neumann problem in a sieve-type layer

## Comportement asymptotique à l'infini d'un problème de Neumann dans une couche perforée

Sergueï A. Nazarov<sup>a</sup>, Gudrun Thäter<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Inst. of Mechanical Engineering Problems, V. O. Bol'shoï pr. 61, St. Petersburg, 199178, Russia*

<sup>b</sup> *Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany*

Received and accepted 21 November 2002

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

---

### Abstract

The Neumann problem is considered in a domain  $\Omega$ , which can differ from a periodic layer inside a compact set. We prove the Fredholm property of the corresponding operator in step-weighted Sobolev spaces and determine its kernel and cokernel. All these results are based on the obtained asymptotic representation of solutions at infinity. **To cite this article:** *S.A. Nazarov, G. Thäter, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

### Résumé

On considère un problème de Neumann dans un domaine  $\Omega$ , qui coïncide avec une couche périodique excepté sur une partie compacte. On démontre que l'opérateur correspondant satisfait à la propriété de Fredholm dans des espaces de Sobolev avec poids et on détermine son noyau et son conoyau. Tous ces résultats sont déduits de la représentation asymptotique des solutions à l'infini. **Pour citer cet article :** *S.A. Nazarov, G. Thäter, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Keywords:* Computational solid mechanics; Periodic layer; Homogenization procedure; Asymptotic behaviour; Step-weighted spaces

*Mots-clés :* Mécanique des solides numérique ; Couche périodique ; Processus d'homogénéisation ; Comportement asymptotique ; Espaces avec poids

---

*E-mail address:* [thaeter@ifam.uni-hannover.de](mailto:thaeter@ifam.uni-hannover.de) (G. Thäter).

### Version française abrégée

Les représentations asymptotiques des solutions des problèmes aux limites dans les jonctions de plaques minces et de poutres, font apparaître différents types de couches limites situées au voisinage des zones de jonctions (cf. [1–5], etc.). Le phénomène de couche limite est décrit en utilisant les solutions de problèmes limites modèles, définis sur des domaines non bornés qui débouchent à l’infini sous forme cylindrique ou de type couche, Fig. 1. Comme dans les techniques d’homogénéisation, on pose le problème de Neumann (2) dans le domaine  $\Omega$ , qui diffère de la couche périodique  $\Lambda$  définie en (1) sur une partie compacte  $K$ . Compte tenu de la structure périodique de  $\Lambda$ , la  $3 \times 3$ -matrice  $\mathcal{A}(x)$  de (2) dépend  $t_i$ -périodiquement de  $y_i, i = 1, 2$ , pour de grandes valeurs de  $r := |y|$ . De plus elle est symétrique et définie positive uniformément dans  $\overline{\Omega}$ . Le but essentiel de cet article est de déterminer le comportement asymptotique des solutions de (2) quand  $r \rightarrow +\infty$ . Dans la couche  $\Pi := \mathbb{R}^2 \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , les expressions asymptotiques ont été obtenues dans [6] pour les équations du second ordre, dans [7] pour le problème de l’élasticité et dans [8] pour le système de Stokes. Nos résultats sont nouveaux même dans le cas  $\Lambda = \Pi$  si  $\mathcal{A}$  est une matrice périodique (cf. [9]). Soit  $\mathcal{A}_0$  le prolongement périodique à  $\Lambda$  de la matrice périodique  $\mathcal{A}|_{\Omega \setminus K}$ . Alors on trouve les fonctions  $S$ -périodiques  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  comme solutions des problèmes (3) dans  $S$ . De manière analogue aux techniques utilisées en homogénéisation, on réduit la dimension du problème (2) et on obtient (4) dans  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  où la matrice constante  $\mathfrak{A}$  définie en (5) a des termes non nuls seulement dans le bloc  $2 \times 2$   $\mathfrak{A}_0$  situé en haut et à gauche. Soit  $\Phi(y) := a_0 \ln r + a_1(\varphi)$  la solution fondamentale de l’opérateur  $\mathfrak{L}(\nabla_y)$ , où  $(r, \varphi)$  désignent les coordonnées polaires du plan des  $y$ . Comme la transformation affine  $y \mapsto \mathfrak{A}_0^{-1/2} y$  ramène Éq. (4) à l’équation de Laplace, les solutions puissances (power solutions) de (4) peuvent être exhibées mais on montre seulement ici que les  $v^{j,i}(y)$  pour  $j \in \mathbb{N}_0$  et  $i = 1, 2$  sont de la forme (6) où les  $P^{j,i}(\mathfrak{A}^{1/2} y)$  sont des polynômes harmoniques. Comme en [7,12] on introduit les espaces fonctionnels avec poids  $\mathcal{W}_\beta^{l,s}(\Omega)$  complétés de  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  pour la norme (7). Si  $s = l$ , (7) est la norme de Kondratiev [13] tandis que  $\mathcal{W}_\beta^{l,0}(\Omega)$  est l’espace de Sobolev de norme  $\|(1+r^2)^{(\beta-l)/2} w; H^l(\Omega)\|$ . L’espace de trace  $\mathcal{W}^{l-1/2,s_\beta}(\partial\Omega)$  est muni de sa norme naturelle. On associe l’opérateur (8) au problème (2). Pour tout polynôme  $v^{j,i}$  de (6), il existe une solution  $\zeta^{j,i} \in \mathcal{W}_{\beta-1}^{l+1,1}(\Omega)$  du problème homogène (2) telle que (9) soit satisfaite pour tout entier positif  $l, \beta - l - j \in (0, 1)$  et où  $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  est une fonction plateau égale à 0 sur  $\Omega \cup K$  et à 1 à l’infini. En particulier  $\zeta^{0,1} = 1$ . On remarque que  $v^{j,i} + \chi \mathcal{V}^\top \nabla v^{j,i} \notin \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$ .

On peut alors montrer les propriétés suivantes de (8) :

Si  $\beta - l \in (k - 1, k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , alors l’opérateur (8) est un monomorphisme de conoyau de dimension  $2k - 1$  engendré par les fonctionnelles (10). Si  $\beta - l \in (-k, 1 - k)$ , alors l’opérateur (8) est un épimorphisme dont le noyau de dimension  $2k - 1$  est engendré par les solutions  $\zeta^{j,i}$  du problème homogène (2) posé en (9) et avec les mêmes indices que ceux décrits en (10). Dans le cas  $\beta \in \mathbb{Z}$  l’opérateur (8) ne vérifie pas la propriété de Fredholm.

Les démonstrations présentées dans cette Note reposent alors sur le théorème suivant :

**Théorème.** Soit  $\beta, \gamma \notin \mathbb{Z}, \gamma \in (\beta, \beta + 1)$  soit  $u \in \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$  solution du problème (2) muni du second membre  $f \in \mathcal{W}_\beta^{l-1,0}(\Omega), g \in \mathcal{W}_\beta^{l-1/2,0}(\partial\Omega)$ . Alors (11) est vérifié avec  $c_i \in \mathbb{R}$  et  $j \in \mathbb{Z}$  appartenant à l’intervalle  $(l - \gamma, l - \beta)$  (si cet intervalle ne contient pas de nombres entiers, alors  $c_1 = c_2 = 0$ ). De plus on a l’estimation (12).

En combinant les applications successives du théorème avec la résolution des problèmes dans la cellule  $S$  et la recherche de solutions de l’équation non homogène (4) en puissances de logarithmes, on montre que la solution  $u$  admet la forme asymptotique (15) où  $\tilde{u} \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l+1,1}(\Omega)$  si  $l, N \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}, \beta - l + p \in (-1, 0)$  et où  $u \in \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$  est solution du problème (2) avec le second membre (14) et le reste  $\tilde{f} \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l-1,0}(\Omega), \tilde{g} \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l-1/2,0}(\partial\Omega)$ . Les coefficients dépendent alors régulièrement de  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  et sont polynomiaux en  $\ln r$ . De plus  $F_k, G_k$ , et  $U_k$  sont périodiques en  $y_1$  et  $y_2$  et où on a posé  $x = (y, z)$  et pour tout  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  et  $l \in \mathbb{R}$ , les conditions (16) sont satisfaites. Finalement les degrés des polynômes  $\mathcal{U}_k$  et  $U_k$  en  $\ln r$  sont respectivement égaux à  $d_k + \kappa_{p-k}$  et  $d_k$ , où  $d_k$  est le degré (maximal) des polynômes  $\mathcal{F}_k, F_k$ , et  $G_k$  tandis que  $\kappa_m = 1$  si  $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$  et  $\kappa_0 = 2$ .

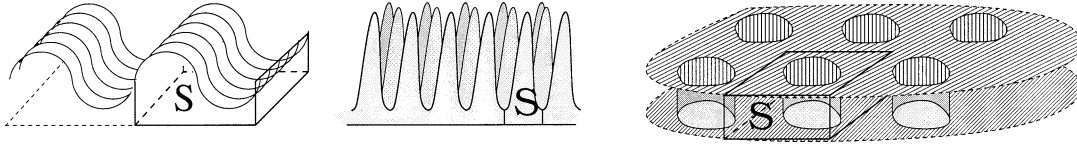


Fig. 1. Examples for infinite sieves with different periodic cells.

Fig. 1. Exemples des couches perforées avec des structures périodiques différentes.

### 1. Formulation of the problem

Asymptotic structures of solutions to boundary value problems on junctions (see [1–5] and others) include different kinds of boundary layers located near junction zones. For junctions of thin plates and rods (cf. [3,4]), the boundary layer phenomenon is described with the help of solutions to model (limit) problems posed on unbounded domains with cylindrical and layer-like outlets to infinity, Fig. 1. According to the background of homogenization theory, here we consider the periodic layer  $\Lambda$  defined as follows:

$$\bar{\Lambda} := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \bar{S}_\alpha, \quad \text{where } S_\alpha := \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : x - (t_1\alpha_1, t_2\alpha_2, 0) \in S\} \tag{1}$$

Here  $\alpha_i \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  and  $t_1, t_2$  are the “longitudinal” sizes of the periodic cell

$$S \subset \left\{ x : |y_i| < \frac{t_i}{2}, i = 1, 2, |z| < \frac{t_3}{2} \right\}$$

Assuming that the interior  $\Lambda$  of the set (1)<sub>1</sub> is a (connected) domain with a two-dimensional boundary, we address the Neumann problem in the domain  $\Omega$ , which can differ from  $\Lambda$  inside a compact set  $K$ , that is to say we study

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \nabla)u(x) &:= -\nabla^\top \cdot (\mathcal{A}(x) \cdot \nabla u(x)) = f(x) \quad \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}(x, \nabla)u(x) &:= \mathbf{n}(x)^\top \cdot \mathcal{A}(x) \cdot \nabla u(x) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

where  $\nabla$  is the gradient,  $^\top$  stands for transposition and  $\mathbf{n}$  for the unit vector in outward normal direction (we regard all vectors to be columns). We assume that the matrix  $\mathcal{A}(x)$  of size  $3 \times 3$  is symmetric and positive definite uniformly in  $\bar{\Omega}$ ; moreover, for large  $r := |y|$  it depends  $t_i$ -periodically on  $y_i, i = 1, 2$ . For simplicity the entries of  $\mathcal{A}$  shall be smooth functions and the boundary  $\partial\Omega$  is smooth as well.

The main aim of this paper is to detect the asymptotic behaviour of the solutions to (2) as  $r \rightarrow +\infty$ . In the layer  $\Pi := \mathbb{R}^2 \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , asymptotic formulae were obtained in [6] for second order equations, in [7] for the elasticity problem, and in [8] for the Stokes system. Our results are new even in the case  $\Lambda = \Pi$  if  $\mathcal{A}$  is a periodic matrix-function (cf. [9], where the Dirichlet problem with periodic coefficients in a two-dimensional angle was considered).

### 2. The resultant problem in $\mathbb{R}^2$

When  $r \rightarrow +\infty$ , the size of the periodic cell  $S_\alpha$  becomes small in comparison to the distance  $r$ , so that the formal asymptotics can be constructed by means of the homogenization technique (cf. [10,11] and others). By  $\mathcal{A}_0$  we denote the periodic extension to  $\Lambda$  of the periodic matrix  $\mathcal{A}|_{\Omega \setminus K}$  and introduce the auxiliary periodic in  $y$  solutions  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  to the problems

$$\begin{aligned} -\nabla^\top \cdot (\mathcal{A}_0(x) \cdot \nabla \mathcal{V}_i(x)) &= \nabla^\top \cdot \mathcal{A}_0^i(x) \quad x \text{ in } S \\ \mathbf{n}(x)^\top \cdot \mathcal{A}_0(x) \cdot \nabla \mathcal{V}_i(x) &= -\mathbf{n}(x)^\top \cdot \mathcal{A}_0^i(x) \quad x \text{ on } \Sigma := \partial S \cap \partial \Lambda \end{aligned} \tag{3}$$

where  $\mathcal{A}_0^i$  is the  $i$ -th column of  $\mathcal{A}_0$ ,  $i = 1, 2$ . The dimension reduction in problem (2) mimics the homogenization procedure and leads to the resultant equation on the punctured plane

$$\mathfrak{L}(\nabla_y)V(y) := -\nabla_y^\top \cdot \mathfrak{A} \cdot \nabla_y V(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus 0 \quad (4)$$

with the constant matrix

$$\mathfrak{A} := \int_S (\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(x)\nabla^\top \mathcal{V}(x)) dx \quad (5)$$

Since  $\nabla_y = (\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, 0)$  and  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, 0)^\top$ , only the upper left  $2 \times 2$ -block  $\mathfrak{A}_0$  of matrix (5) contributes to (4).  $\mathfrak{A}_0$  is symmetric and positive definite.

Let  $\Phi(y) := a_0 \ln r + a_1(\varphi)$  be the fundamental solution of the operator  $\mathfrak{L}(\nabla_y)$ , where  $(r, \varphi)$  are the polar coordinates on the  $y$ -plane. Since the affine transformation  $y \mapsto \mathfrak{A}_0^{-1/2}y$  reduces Eq. (4) to the Laplace equation, power solutions to (4) can be listed explicitly but we only mention here that

$$\begin{aligned} v^{j,i}(y) &= P^{j,i}(y), \quad v^{-j,i}(y) = P^{j,i}(-\nabla_y)\Phi(y), \quad j \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \quad i = 1, 2 \\ v^{0,1} &= 1, \quad v^{0,2}(y) = \Phi(y) \end{aligned} \quad (6)$$

where  $P^{j,i}(\mathfrak{A}_0^{1/2}y)$  are harmonic polynomials.

### 3. Function spaces and solvability of the problem

Following [7,12] we introduce the step-weighted function spaces  $\mathcal{W}_\beta^{l,s}(\Omega)$  as the completion of  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  with respect to the norm

$$\|w; \mathcal{W}_\beta^{l,s}(\Omega)\| := \left( \int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^l (1+r^2)^{\beta-l+|\alpha|-(|\alpha|-s)_+} |\nabla^\alpha w|^2 dx \right)^{1/2} \quad (7)$$

where  $t_+ := \frac{1}{2}(t + |t|)$  and  $l, s \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $l \geq s$ . If  $s = l$ , (7) becomes the Kondratiev norm [13] while  $\mathcal{W}_\beta^{l,0}(\Omega)$  is the weighted Sobolev space with norm  $\|(1+r^2)^{(\beta-l)/2}w; H^l(\Omega)\|$  for the aforementioned weight exponents. The trace space  $\mathcal{W}_\beta^{l-1/2,s}(\partial\Omega)$  is supplied with the natural norm

$$\|W; \mathcal{W}_\beta^{l-1/2,s}(\partial\Omega)\| := \inf\{\|w; \mathcal{W}_\beta^{l,s}(\Omega)\| : w = W \text{ on } \partial\Omega\}$$

With problem (2) we relate the mapping

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega) \rightarrow \mathcal{W}_\beta^{l-1,0}(\Omega) \times \mathcal{W}_\beta^{l-1/2,0}(\partial\Omega) \quad (8)$$

which is continuous for  $l \in \mathbb{N}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Lemma.** For any polynomial  $v^{j,i}$  in (6), there exists a solution  $\zeta^{j,i} \in \mathcal{W}_{\beta-1}^{l+1,1}(\Omega)$  to the homogeneous problem (2) such that

$$\zeta^{j,i} - v^{j,i} - \chi(\mathcal{V}^\top \nabla v^{j,i}) \in \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega) \quad (9)$$

where  $l$  is any positive integer,  $\beta - l - j \in (0, 1)$  and  $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  is a cut-off function which is equal to 0 on  $\Omega \cap K$  and 1 near infinity. In particular  $\zeta^{0,1} = 1$ .

We emphasize, that  $v^{j,i} + \chi \mathcal{V}^\top \nabla v^{j,i}$  does not belong to  $\mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$  and hence,  $\zeta^{j,i}$  is not a trivial solution.

**Proposition.** *If  $\beta - l \in (k - 1, k)$  with  $k \in \mathbb{N}$ , then operator (8) is a monomorphism with a cokernel of dimension  $2k - 1$  spanned by the functionals*

$$\int_{\Omega} \zeta^{j,i}(x) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \zeta^{j,i}(x) g(x) ds_x, \quad \text{for } \begin{cases} j = 1, \dots, 2k - 1, & i = 1, 2 \\ j = 0, & i = 1 \end{cases} \quad (10)$$

*If  $\beta - l \in (-k, 1 - k)$ , then operator (8) is an epimorphism with a kernel of dimension  $2k - 1$  spanned by the solutions  $\zeta^{j,i}$  of the homogeneous problem (2) specified in (9) (indices of (10)).*

*In case  $\beta \in \mathbb{Z}$  the operator (8) is not Fredholm.*

#### 4. Asymptotics

The proof of all assertions presented in this paper is based on the following theorem on asymptotics.

**Theorem.** *Let  $\beta, \gamma \notin \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in (\beta, \beta + 1)$  and  $u \in \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$  is a solution of problem (2) with the right-hand sides  $f \in \mathcal{W}_\gamma^{l-1,0}(\Omega)$  and  $g \in \mathcal{W}_\gamma^{l-1/2,0}(\partial\Omega)$ . Then*

$$\tilde{u} = u - \chi \sum_{i=1}^2 c_i (v^{j,i} + \mathcal{V}^\top \nabla v^{j,i}) \in \mathcal{W}_\gamma^{l+1,1}(\Omega) \quad (11)$$

where  $c_i \in \mathbb{R}$  and  $j \in \mathbb{Z}$  belongs to the interval  $(l - \gamma, l - \beta)$  (if this interval does not contain an integer, then  $c_1 = c_2 = 0$ ). Moreover, there holds the estimate

$$|c_1| + |c_2| + \|\tilde{u}; \mathcal{W}_\gamma^{l+1,1}(\Omega)\| \leq c (\|f; \mathcal{W}_\gamma^{l-1,0}(\Omega)\| + \|g; \mathcal{W}_\gamma^{l-1/2,0}(\partial\Omega)\| + \|u; \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)\|) \quad (12)$$

In our proof of the theorem, the crucial point is a reduction of the problem (2) to the inhomogeneous model equation (4) for the mean-value function

$$\mathbb{R}^2 \setminus 0 \ni y \mapsto \bar{u}(y) = \int_{S(y)} \chi(\eta) u(\eta, \zeta) d\eta d\zeta$$

where  $S(y) = \{(\eta, \zeta) \in \Lambda: |\eta_i| < |y_i| < t_i/2, i = 1, 2\}$ . The right-hand side of this equation depends on the solution  $u$  and it achieves the necessary decay properties only when being regarded in the appropriate weighted space with negative smoothness index. Thus, in the first step we only obtain the asymptotic formula (11) in a very weak sense. To increase the smoothness properties of the remainder  $\tilde{u}$  we consider the perturbed problem (2)

$$\mathcal{L}\tilde{u} + \vartheta(1 + r^2)^{-1}\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in } \Omega, \quad \mathcal{B}\tilde{u} = \tilde{g} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (13)$$

which has a unique solution  $\tilde{u} \in W_\gamma^{1,1}(\Omega)$  for any  $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in (W_{-\gamma}^{1,1}(\Omega))^*$  and a sufficiently large  $\vartheta > 0$ . Of course, the perturbation of the left-hand side in (13) makes  $\tilde{f}$  dependent on  $\tilde{u}$ . However, the weak decay properties mentioned above provide that  $\tilde{u} \in W_\gamma^{1,1}(\Omega)$ . Using local elliptic estimates and a suitable partition of the domain  $\Omega$  completes the proof of the theorem.

Combining the iterative application of the theorem with solving problems in the cell  $S$  and detecting power-logarithmic solutions of the inhomogeneous equation (4) finally provides

**Corollary.** *Let  $l, N \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta - l + p \in (-1, 0)$ . Assume that  $u \in \mathcal{W}_\beta^{l+1,1}(\Omega)$  is a solution of problem (2) for the right-hand sides*

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \tilde{f}(x) + \chi(x) \sum_{k=0}^{N-1} r^{p-k} \left( \frac{1}{r^2} \mathcal{F}_k(\varphi, \ln r) + \frac{1}{r} F_k(\varphi, \ln r, x) \right) \\
 g(x) &= \tilde{g}(x) + \chi(x) \sum_{k=0}^{N-1} r^{p-k-1} G_k(\varphi, \ln r, x)
 \end{aligned} \tag{14}$$

with the remainders  $\tilde{f} \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l-1,0}(\Omega)$ ,  $\tilde{g} \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l-1/2,0}(\partial\Omega)$ . Then the solution  $u$  has the asymptotic form

$$u(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^{N-1} r^{p-k} \left( \mathcal{U}_k(\varphi, \ln r) + \frac{1}{r} U_k(\varphi, \ln r, x) \right) + \tilde{u}_N(x) \tag{15}$$

with the remainder  $\tilde{u}_N \in \mathcal{W}_{\beta+N}^{l+1,1}(\Omega)$ . Here all coefficients depend smoothly on  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  and are polynomials in  $\ln r$ . Furthermore  $F_k$ ,  $G_k$ , and  $U_k$  are periodic in  $y_1$  and  $y_2$  while the third argument is  $x = (y, z)$  and for any  $\varphi \in \mathbb{S}^1$  and  $l \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_S F_k(\varphi, l, x) dx + \int_\Sigma G_k(\varphi, l, x) ds_x = 0, \quad \int_S U_k(\varphi, l, x) dx = 0 \tag{16}$$

Finally the degrees of the polynomials  $\mathcal{U}_k$  and  $U_k$  in  $\ln r$  are equal to  $d_k + \kappa_{p-k}$  and  $d_k$ , respectively, where  $d_k$  is the (maximal) degree of the polynomials  $\mathcal{F}_k$ ,  $F_k$ , and  $G_k$  while  $\kappa_m = 1$  if  $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$  and  $\kappa_0 = 2$ .

## References

- [1] P.G. Ciarlet, Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures. An Asymptotic Analysis, Masson, Paris, 1990.
- [2] D. Leguillon, É. Sanchez-Palencia, Approximation of a two dimensional problem of junctions, Comput. Mech. 6 (1990) 435–455.
- [3] S.A. Nazarov, B.A. Plamenevski, Asymptotics of the spectrum of the Neumann problem in singularly perturbed thin domains, Leningr. Math. J. 2 (1991) 287–311.
- [4] V.A. Kozlov, V.G. Mazya, A.B. Movchan, Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure, Asymptotic Anal. 8 (1994) 105–143.
- [5] S.A. Nazarov, Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. 1 & 2, Trudy Sem. Petrovsk. 18 (1995) 3–78 and 20 (1997) 155–195.
- [6] S.A. Nazarov, Asymptotics of the solution to a boundary value problem in a thin cylinder with nonsmooth lateral surface, Math. Izvestiya 42 (1994) 183–217.
- [7] S.A. Nazarov, Asymptotic expansions at infinity of solutions to the elasticity theory problem in a layer, Trudy Moskov. Mat. Obsch. 60 (1998) 3–97.
- [8] S.A. Nazarov, K.I. Pileckas, The asymptotic properties of the solution to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity, J. Math. Fluid Mech. 1 (1999) 131–167.
- [9] S.A. Nazarov, Asymptotics at infinity of the solution to the Dirichlet problem for a system of equations with periodic coefficients in an angular domain, Russian J. Math. Phys. 3 (1995) 297–326.
- [10] É. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, in: Lecture Notes in Phys., Vol. 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [11] N.S. Bakhvalov, G. Panasenko, Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.
- [12] S.A. Nazarov, Vishik–Lyusternik method for elliptic boundary-value problems in regions with conical points. 1. The problem in a cone, Siberian Math. J. 22 (1982) 594–611.
- [13] V.A. Kondratiev, Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967) 227–313.