



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 91–98



Injection de bulles en paroi d'un écoulement cisailé visqueux

Bubble injection at the wall of a viscous shear flow

Géraldine Duhar, Catherine Colin

Institut de mécanique des fluides de Toulouse, UMR CNRS-INP-UPS 5502, 2, avenue du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Reçu le 18 novembre 2002 ; accepté après révision le 18 décembre 2002

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

L'injection de bulles d'air en paroi d'un écoulement cisailé visqueux est filmée à l'aide d'une caméra vidéo rapide. Le traitement des images permet d'obtenir l'évolution temporelle du rayon équivalent des bulles et de la position de leur centre de gravité tout au long de leur croissance. Ces résultats expérimentaux sont utilisés pour valider un modèle de forces agissant sur les bulles pendant leur croissance et après leur détachement dans la limite des faibles nombres de Reynolds de bulle. **Pour citer cet article :** *G. Duhar, C. Colin, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Air bubble injection at the wall of a viscous shear flow is filmed using a high speed video camera. The temporal evolution of the bubbles equivalent radius and the position of their centre of mass throughout their growth are determined from image processing. The experimental results are then used to validate a model of forces acting on the bubbles during their growth and after their detachment within the limit of small bubble Reynolds numbers. **To cite this article:** *G. Duhar, C. Colin, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Écoulement à bulles ; Écoulement cisailé visqueux

Keywords: Fluid mechanics; Bubble flow; Viscous shear flow

Abridged English version

The aim of this Note is to present some experimental results concerning the growth and the detachment of bubbles injected at the wall of a viscous shear flow. The experimental data are then used to validate an expression of the forces acting on the bubbles during their growth and after their departure. The bubbles are injected through an hypodermic needle of 0.3 mm diameter at the lower wall of a toric channel (Fig. 1). The channel is filled with silicone oil (47V50) with the following properties at 20 °C: density $\rho_L = 960 \text{ kg/m}^3$, dynamic viscosity

Adresses e-mail : duhar@imft.fr (G. Duhar), colin@imft.fr (C. Colin).

$\mu_L = 0.05122 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, surface tension $\sigma = 0.0207 \text{ N/m}$. The cross section of the channel is rectangular and its upper wall can be rotated, creating a Couette flow inside it, with constant shear rates S up to 10 s^{-1} . The bubbles are injected with constant volumetric flow rates Q from 2 to $40 \text{ mm}^3/\text{s}$. High speed video pictures of the bubble growth and detachment are taken (Fig. 2). After image processing the evolutions of the bubble radius and of the co-ordinates of its geometric centre are determined. The bubble radii at detachment are plotted in Fig. 4, versus the shear rate S for different values of the air flow rate Q . The bubble radius at detachment increases with Q and decreases when S increases, due to the drag force exerted by the liquid flow on the bubble. The evolutions of the bubble radius R and of the co-ordinates x, z of the geometric centre, during its growth and after its detachment, are plotted in Fig. 5 for 2 runs, in a still liquid ($Q = 2.3 \text{ mm}^3/\text{s}$) and with a liquid flow ($Q = 2.9 \text{ mm}^3/\text{s}, S = 5 \text{ s}^{-1}$). These data are afterwards used to estimate the different forces acting on the bubble. These forces are the buoyancy force \vec{F}_A , the capillary force \vec{F}_S , the drag force \vec{F}_T , the added mass force \vec{F}_{MA} and the migration force \vec{F}_M (2). During the growth and after the detachment of the bubble, the bubble Reynolds number Re_B is smaller than 1 and the added mass force is weak excepted right at bubble detachment and at the beginning of the growth. For the drag and migration forces the theoretical expressions derived by Magnaudet et al. [3] for bubbles moving near a wall in a shear flow with small inertia effect, are applied to the bubble attached to the wall (Eqs. (3) and (4)). For the surface tension force keeping the bubble at the wall, the expression (5) proposed by Klauner et al. [5] is used. This force is a function of the upstream and downstream contact angles α and β (Fig. 3).

The time evolution of the different forces during the bubble growth and after its detachment is calculated using the experimental values of R, x and z . Eq. (2) is used to calculate the contact angles. The horizontal and the vertical components of the forces are plotted in Fig. 6 for $Q = 2.9 \text{ mm}^3/\text{s}$ and $S = 5 \text{ s}^{-1}$. During the bubble growth, the forces promoting the bubble detachment are the buoyancy force in the vertical direction and the drag force in the horizontal direction. The bubble is kept attached to the wall by the capillary force. The migration and added mass forces are very weak during the bubble growth. The measured values of the contact angles at the end of the growth are in good agreement with the values calculated from Eq. (2) (Fig. 7). This validates the force balance (2). After the detachment, the buoyancy force balances the drag force in the vertical direction and the drag force balances the migration force in the horizontal direction. Similar analyses are performed for different values of Q (up to $10 \text{ mm}^3/\text{s}$) and S (up to 10 s^{-1}). The balance of the forces during the bubble growth is well represented by (2) and the detachment of the bubble occurs when the upstream contact angle reaches a value close to 80° .

1. Introduction

La formation des bulles en paroi d'un écoulement cisailé est une situation physique rencontrée dans de nombreux problèmes pratiques comme l'injection de bulles de gaz par des barreaux poreux ou des membranes percées dans les contacteurs gaz-liquide en génie chimique ou la formation de bulles de vapeur à la paroi chauffée des évaporateurs. Dans toutes ces situations, il est crucial de pouvoir prédire la taille des bulles formées soit pour optimiser les transferts de masse entre les phases gazeuse et liquide dans les réacteurs chimiques soit pour modéliser les transferts de chaleur à la paroi en ébullition nucléée. De nombreuses études expérimentales ont été réalisées sur l'injection ou la vaporisation en paroi de bulles dans des liquides au repos ou en mouvement. Malheureusement la plupart des expériences sont difficiles à interpréter de par leur complexité : écoulement de liquide turbulent, nombreuses bulles, présence de transferts thermiques et massiques en ébullition. Les modèles dynamiques basés sur l'écriture d'un bilan de forces agissant sur la bulle en croissance sont souvent utilisés pour tenter de prédire le détachement de la bulle [1], mais rarement avec succès. La difficulté principale vient du fait qu'il n'existe pas d'expression théorique des différentes forces (traînée, portance, ...) agissant sur une bulle attachée à la paroi d'un écoulement cisailé. D'autre part, la détermination de la force capillaire agissant sur la ligne de contact triple solide-liquide-gaz et maintenant la bulle attachée à la paroi nécessite la détermination des angles de contact dynamiques ce qui est très délicat.

Le but de cette Note est de présenter quelques résultats expérimentaux sur la croissance et le détachement de bulles de gaz formées en paroi d'un écoulement de Couette laminaire. Dans ces expériences, le nombre de Rey-

nolds Re_B caractéristique de l'écoulement autour des bulles est inférieur à 1. Des visualisations à grande vitesse suivies d'un traitement des images permettent de déterminer l'évolution des paramètres géométriques de la bulle (rayon équivalent, coordonnées du centre de gravité). Ces données expérimentales sont ensuite utilisées pour valider un nouveau modèle de forces agissant sur les bulles pendant leur croissance, dans la limite des faibles nombres de Reynolds de bulles.

2. Dispositif expérimental et techniques de mesure

Le dispositif expérimental (Fig. 1) comprend un canal de géométrie torique dans lequel circule un liquide et un circuit d'alimentation en air comprimé permettant d'injecter des bulles d'air à travers la paroi inférieure du canal. Le canal, à section rectangulaire de 2,15 cm de hauteur, est usiné dans le plateau inférieur fixe en plexiglass (canal compris entre les rayons $r_1 = 32$ cm et $r_2 = 41$ cm). La partie supérieure du canal appartient au plateau supérieur mobile permettant d'entraîner le fluide en rotation et de créer un écoulement de Couette. L'injecteur est placé à un rayon r de 37,8 cm dans la paroi inférieure du canal. Les mesures par vélocimétrie laser et la simulation numérique de l'écoulement de liquide ont montré qu'en cette position le rapport entre les vitesses orthoradiales et les vitesses secondaires radiales et verticales était le plus important, ce qui permettra par la suite de considérer que l'écoulement de liquide est unidirectionnel. Le profil des vitesses orthoradiales est linéaire jusqu'à des taux de cisaillement de 10 s^{-1} .

L'injecteur de bulles est un tube capillaire de 0,3 mm de diamètre intérieur qui traverse la paroi inférieure du canal. La perte de pression à l'intérieur du tube capillaire et à travers les vannes de réglage est bien supérieure à la pression capillaire engendrée par la formation de la bulle, l'injection d'air s'effectue donc avec un débit volumique constant Q tout au long de la croissance de la bulle. L'évolution temporelle du rayon R de la bulle a ainsi la forme suivante :

$$R(t) = \left(\frac{3Qt}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (1)$$

Les expériences sont réalisées avec de l'huile silicone (47V50) de masse volumique $\rho_L = 960 \text{ kg/m}^3$, de viscosité dynamique $\mu_L = 0,05122 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ et de tension superficielle $\sigma = 0,0207 \text{ N/m}$ à 20°C . Les débits volumiques d'injection d'air Q sont compris entre 2 et $40 \text{ mm}^3/\text{s}$ et les taux de cisaillement S entre 0 et 10 s^{-1} .

Les phases de croissance et de détachement des bulles (Fig. 2) sont filmées au moyen d'une caméra vidéo rapide Kodak Ektapro EM, qui permet de filmer entre 250 et 1000 images par seconde. Le capteur CCD de la caméra comporte 239×192 pixels. Les images sont ensuite numérisées par une carte Mirovideo DC30+ à un format 768×576 pixels et traitées sur micro-ordinateur à l'aide du logiciel Optimas. Le traitement consiste en une division par une image de fond (sans bulle) qui permet d'améliorer le contraste ; un filtre médian est ensuite appliqué afin

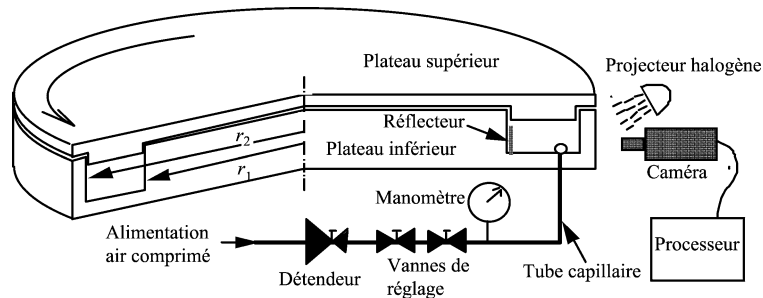


Fig. 1. Dispositif expérimental.

Fig. 1. Experimental set-up.

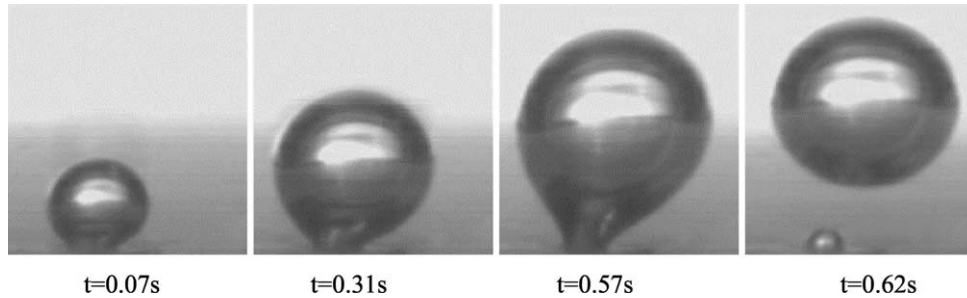


Fig. 2. Croissance et détachement d'une bulle pour $Q = 2,9 \text{ mm}^3/\text{s}$ et $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

Fig. 2. Bubble growth and detachment for $Q = 2.9 \text{ mm}^3/\text{s}$ and $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

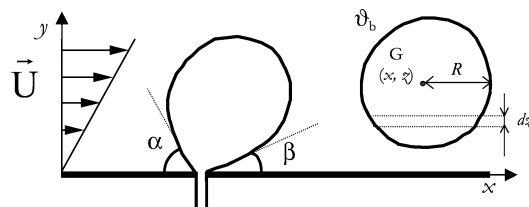


Fig. 3. Schéma de la croissance et du détachement d'une bulle sur une paroi dans un écoulement cisailé.

Fig. 3. Scheme of bubble growth and detachment on a wall in a shear flow.

d'augmenter la netteté du contour de la bulle ; enfin, une binarisation de l'image est effectuée avec un certain seuil pour détecter le contour de la bulle. Ce seuil est déterminé en superposant le contour détecté avec l'image brute de la bulle ; l'image étant uniforme, on s'autorise une erreur de 1 pixel sur la position du contour tout en privilégiant le pied de la bulle pour la binarisation. Les caractéristiques géométriques de la bulle au cours de la croissance (rayon équivalent R , coordonnées horizontale x et verticale z du centre de gravité) sont ensuite déterminées après une calibration de l'image réalisée en filmant une mire placée dans l'écoulement. La calibration et les différentes étapes du traitement d'image engendrent une erreur de $\pm 3\%$ sur les mesures de R , x et z . Le traitement des images effectué à l'aide du logiciel Optimas permet d'obtenir le contour de la bulle discrétisé sur N points ($N = 256$) ; les caractéristiques géométriques de la bulle sont ensuite calculées au moyen d'un programme Matlab. La bulle est découpée en disques élémentaires horizontaux, d'épaisseur dz égale à la différence d'ordonnées entre deux points successifs du contour (Fig. 3). Chaque disque est supposé circulaire. Le volume de la bulle est calculé par sommation de ces disques élémentaires, les coordonnées du centre de gravité de la bulle sont déterminées à partir de moyennes volumiques et le rayon équivalent est déduit directement à partir volume (en faisant l'hypothèse de bulles sphériques).

3. Résultats expérimentaux

Sur la Fig. 4, les rayons des bulles au détachement sont tracés pour différents débits d'injection d'air Q , en fonction du taux de cisaillement S . On constate que pour un débit Q donné, le rayon au détachement diminue lorsque le taux de cisaillement augmente. Ceci est dû à l'augmentation de la force de traînée exercée par le liquide sur la bulle. Le rayon de la bulle au détachement augmente avec le débit Q pour un taux de cisaillement donné. Cet effet est dû principalement à la forme de la bulle qui a tendance à s'élever de la paroi, ce qui a pour conséquence d'augmenter la force de tension superficielle maintenant la bulle à la paroi.

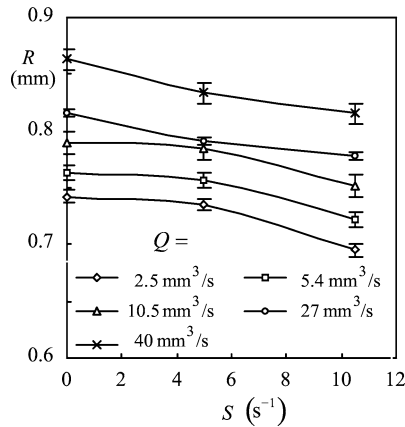


Fig. 4. Influence du débit d'injection d'air et du taux de cisaillement sur le rayon des bulles au détachement.

Fig. 4. Bubble radius at detachment versus the shear rate.

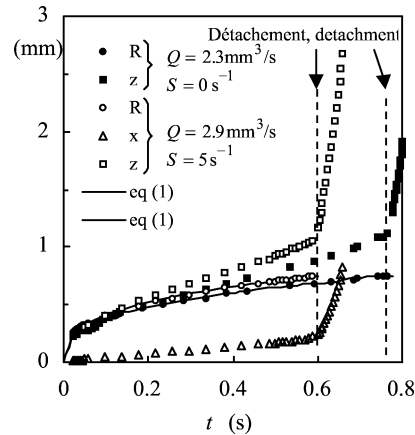


Fig. 5. Évolution du rayon de la bulle et de la position du centre de gravité pendant la croissance et après le détachement.

Fig. 5. Evolution of the bubble radius and of the co-ordinate of the centre of mass during the bubble growth and after its detachment.

Les évolutions du rayon de la bulle R et des coordonnées x, z du centre de gravité sont tracées sur la Fig. 5 pour deux essais particuliers sans écoulement de liquide ($Q = 2,3 \text{ mm}^3/\text{s}$) et avec écoulement ($Q = 2,9 \text{ mm}^3/\text{s}$ et $S = 5 \text{ s}^{-1}$). Le rayon de la bulle évolue bien selon la loi en $t^{1/3}$ donnée par Éq. (1). Au cours de la croissance de la bulle, la coordonnée z du centre de gravité suit bien le rayon R jusqu'à $t = 0,2$ secondes. Ensuite elle devient supérieure à R , il y a apparition d'un col entre l'injecteur et la partie sphérique de la bulle (Fig. 2). Pour $S = 5 \text{ s}^{-1}$, la valeur de x obtenue est caractéristique d'un léger déplacement de la bulle vers l'aval sous l'action du gradient de vitesse. Après le détachement, la bulle monte verticalement dans le fluide au repos, tandis qu'elle suit le gradient de vitesse lorsqu'il y a un écoulement. Ces résultats sont ceux obtenus pour une bulle mais la reproductibilité des expériences est telle que l'on peut dire que ce comportement est identique pour toutes les bulles injectées avec le même débit d'air dans le même écoulement de liquide. Seules les valeurs des rayons de bulles au détachement diffèrent légèrement pour le même essai comme le montrent les barres d'erreur de la Fig. 4.

Les évolutions temporelles du rayon de la bulle et de la position de son centre de gravité sont ensuite utilisées pour calculer les différentes forces agissant sur la bulle pendant sa croissance et déterminer celles qui sont responsables de son détachement.

4. Dynamique de la croissance et du détachement

Pour une bulle sphérique en croissance sur une paroi, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$(\rho_G - \rho_L) \frac{4\pi R^3}{3} \vec{g} + \int_0^{2\pi} r_c \sigma \vec{\tau} d\theta + \vec{F}_T + \rho_L C_{MA} \left[4\pi R^2 \frac{dR}{dt} (\vec{U} - \vec{V}) - \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{d\vec{V}}{dt} \right] + \vec{F}_M = \vec{0} \quad (2)$$

Les différentes forces intervenant dans Éq. (2) sont successivement la force d'Archimède, la force capillaire \vec{F}_S maintenant le pied de la bulle en contact avec l'injecteur, la force traînée visqueuse \vec{F}_T exercée par le fluide sur la bulle, la force d'inertie du liquide (masse ajoutée) qui s'oppose au mouvement instationnaire de la bulle et la force de migration (portance) F_M due aux interactions avec la paroi de la déformation de la bulle et des effets

inertiels résultant de la vitesse de glissement $\vec{V} - \vec{U}$ et du gradient de vitesse S . $\vec{U}(z) = Sz\vec{e}_x$ et $\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$ sont respectivement les vecteurs vitesses du liquide et de la bulle, r_c le rayon du tube capillaire, $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à l'interface et perpendiculaire à ligne de contact triple, C_{MA} est le coefficient de masse ajoutée. $C_{MA} = 0,5$ en milieu infini et augmente lorsque l'on s'approche de la paroi jusqu'à une valeur de $11/16$ [2]. Dans les expériences réalisées à faibles débits d'injection d'air, la force de masse ajoutée est négligeable sauf au tout début de la croissance et au moment du détachement. Dans l'équation, on ne connaît malheureusement pas les expressions des forces de traînée et de migration s'appliquant sur une bulle en croissance sur une paroi. Cependant, une expression théorique de ces forces a été récemment établie par Magnaudet et al. [3] pour une bulle sphérique se déplaçant à proximité d'une paroi en régime faiblement inertielle. La force de traînée a l'expression suivante :

$$\vec{F}_T = 4\pi\mu_L R(\vec{U} - \vec{V})k_{x(z)} - \frac{\pi}{2}\mu_L R^2 S \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left(1 + \frac{3R}{8z}\right)\vec{e}_x \quad (3)$$

Les coefficients k_x et k_z sont fonction de la distance de la bulle à la paroi :

$$k_x \approx 1 + \frac{3R}{8z}, \quad k_z \approx \left[1 - \frac{3R}{4z} - \frac{9}{64}\left(\frac{R}{z}\right)^4\right]^{-1} \quad \text{pour } \frac{R}{z} \ll 1, \quad Re_B \ll 1$$

Le second terme de Éq. (3) est une correction de Faxen due la présence de la paroi. Pour une bulle en croissance dans un écoulement uniforme, les simulations numériques réalisées par Legendre et al. [4] ont montré que les coefficient k_x ou k_z étaient compris entre 1 et 3.

La force de migration comprend deux termes, le premier dû à la déformation de la bulle et l'autre à l'interaction avec le gradient de vitesse :

$$\vec{F}_M = \frac{4}{5}\pi \frac{\mu_L^2 R^2 S}{\sigma} \frac{dz}{dt} \left(1 + \frac{3R}{8z}\right)\vec{e}_x - \frac{5}{8}\pi \rho_L R^3 S \frac{dz}{dt} \left(\frac{z}{R} - \frac{121}{120}\right)\vec{e}_x \quad (4)$$

Dans nos expériences, le nombre de Reynolds de bulle Re_B basé sur le diamètre de la bulle, sa vitesse relative et la viscosité du liquide est typiquement inférieur à 1 pendant la croissance et après le détachement de la bulle. Les expressions (3) et (4) ont été établies pour $R/z \ll 1$ et peuvent raisonnablement être utilisées après le détachement de la bulle. Par la suite on les utilisera également pour la bulle en croissance à la paroi ($R/z = 1$).

Une expression analytique de la force de tension superficielle a été établie par Klausner et al. [5] en fonction des angles de contact amont α et aval β de la bulle :

$$\vec{F}_S = 1,25 \frac{2\pi r_c \sigma (\alpha - \beta)}{\pi^2 - (\alpha - \beta)^2} (\sin \alpha + \sin \beta)\vec{e}_x + \frac{2\pi r_c \sigma}{(\alpha - \beta)} (\cos \beta - \cos \alpha)\vec{e}_z \quad (\alpha \neq \beta) \quad (5)$$

Une valeur approximative de ces angles de contact est obtenue par traitement d'image en fin de croissance de la bulle. La méthode consiste à déterminer dans un premier temps les points de contact de la bulle avec la paroi puis à interpoler les points du contour les plus proches des deux points de contact par une droite : on obtient ainsi les tangentes au contour, à partir desquelles on déduit les angles de contact amont α et aval β (Fig. 3). Les valeurs des angles de contact sont sensibles au nombre de points choisis pour calculer la droite tangente au contour. La Fig. 7 montre les erreurs que l'on commet sur leur détermination en faisant varier le nombre de points de 10 à 30.

Les évolutions temporelles des différentes forces au cours de la croissance de la bulle sont calculées à partir des évolutions du rayon de la bulle et de la position de son centre de gravité déterminées par traitement d'image. Éq. (2) est résolue pour calculer les angles de contact α et β qui sont comparés aux valeurs expérimentales.

Sur la Fig. 6, sont portées les composantes selon les axes x et z des différentes forces agissant sur la bulle pendant sa croissance et après son détachement. Les forces responsables du détachement de la bulle sont la force d'Archimède selon l'axe vertical z et la force de traînée du liquide selon l'axe horizontal x . La seule force s'opposant au détachement est la force de capillarité. Jusqu'au détachement, les forces de migration et d'inertie du liquide sont très faibles. Le bilan des forces est bien vérifié sur les deux axes pour $t > 0,35$ s, jusqu'au détachement où les effets d'inertie sont importants. Les angles de contact amont et aval (Fig. 7) n'ont pu être mesurés qu'en fin

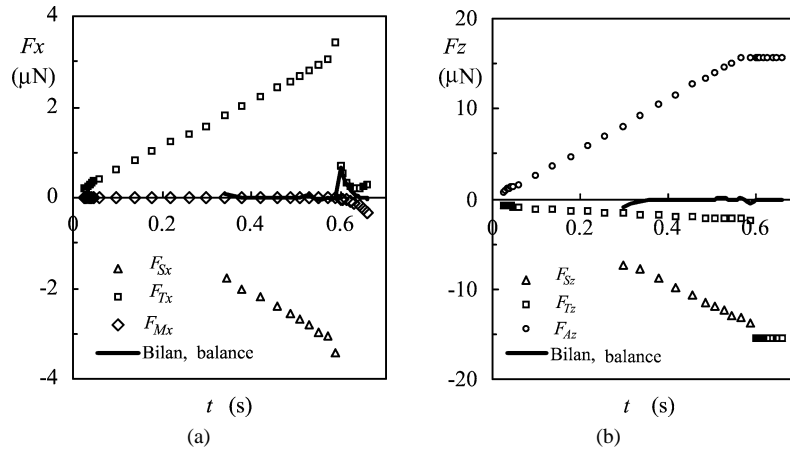


Fig. 6. Bilan des forces agissant sur une bulle en projection sur l'axe horizontal x et sur l'axe vertical z pour un débit d'injection $Q = 2,9 \text{ mm}^3/\text{s}$ et un taux de cisaillement $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

Fig. 6. Horizontal x and vertical z components of the forces acting on a bubble for an air flow rate $Q = 2.9 \text{ mm}^3/\text{s}$ and a shear rate $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

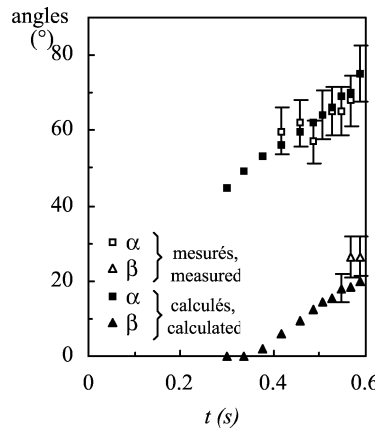


Fig. 7. Angles de contact amont α et aval β mesurés par traitement d'images et calculés à partir de Éq. (2) pour $Q = 2,9 \text{ mm}^3/\text{s}$ et $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

Fig. 7. Upstream α and downstream β contact angles measured by image processing and calculated from Eq. (2) for $Q = 2.9 \text{ mm}^3/\text{s}$ and $S = 5 \text{ s}^{-1}$.

de croissance, lorsque le col est bien formé à la base de la bulle. Ils sont en assez bon accord avec ceux calculés en résolvant Éq. (2). L'angle de contact amont α est supérieur à l'angle aval β témoignant d'une orientation de la bulle dans le sens de l'écoulement. En début de croissance, la partie aval de la bulle est couchée sur la paroi horizontale, β est alors très faible ; puis la bulle se redresse en fin de croissance : β augmente. Pour des cisaillements plus importants, l'aplatissement de la bulle est encore plus marqué. En absence d'écoulement, les angles α et β sont égaux. Le bilan des forces sur l'axe vertical est sensiblement le même que sur la Fig. 6. L'incertitude sur les angles de contact est déterminée en faisant la moyenne des valeurs des angles obtenues pour différentes valeurs du nombre de points (10, 20 et 30) permettant de calculer les tangentes au contour.

Juste après le détachement, la bulle accélère selon une trajectoire inclinée par rapport à la paroi, d'autant plus inclinée que le cisaillement est grand. Les forces significatives après le détachement sont les forces d'Archimède et de traînée selon l'axe vertical et les forces de traînée et de migration selon l'axe horizontal.

Une analyse similaire a été réalisée pour différents débits d'injection d'air Q et différents taux de cisaillement S . Ces résultats expérimentaux ont permis d'estimer les forces agissant sur la bulle au cours de sa croissance et d'identifier celles responsables de son détachement. Pour des faibles taux de cisaillement ou de forts débits de gaz, c'est la force d'Archimède qui est responsable du détachement de la bulle qui s'effectue selon l'axe vertical. Lorsque le gradient de vitesse à la paroi est plus important, la bulle s'incline sur la paroi et c'est la force de traînée exercée par le liquide sur la bulle qui est responsable du détachement de celle-ci parallèlement à la paroi. Éq. (2) représente bien la dynamique de la croissance de la bulle jusqu'à son détachement obtenu lorsque l'angle de contact amont atteint une valeur proche de 80° .

Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier Sébastien Cazin, ingénieur d'étude au CNRS, pour son aide précieuse dans l'obtention des images.

Références

- [1] G.E. Thorncroft, J.F. Klausner, R. Mei, Bubble forces and detachment models, *Multiphase Sci. Technology* 13 (3&4) (2001) 35–76.
- [2] L.N. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, 5th edition, Macmillan, London, 1968.
- [3] J. Magnaudet, S. Takagi, D. Legendre, Drag, deformation and lateral migration of a buoyant drop moving near a wall, *J. Fluid Mech.* 476 (2003) 115–157.
- [4] D. Legendre, J. Boree, J. Magnaudet, Thermal and dynamic evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid, *Phys. Fluids* 10 (6) (1998) 1256–1272.
- [5] J.F. Klausner, R. Mei, M.D. Bernhard, L.Z. Zeng, Vapor bubble detachment in forced convection boiling, *Int. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 651–662.