Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 77–84

COMPTES RENDUS MECANIQUE

Détermination du comportement macroscopique d'un milieu à fissures frottantes

Determination of the macroscopic behavior of a medium with frictional cracks

Jean-François Barthélémy [a], Luc Dormieux [a], Djimédo Kondo [b]

[a] *LMSGC, CNRS/ENPC/LCPC, 6 et 8, av. Blaise Pascal, cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée, France*
[b] *Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441 – Université de Lille-I, bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

Reçu le 24 septembre 2002 ; accepté le 1er octobre 2002

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

L'existence d'une fissuration affecte de façon déterminante les propriétés macroscopiques des matériaux. Une approche micromécanique fondée sur une modélisation des fissures fermées lisses ou parfaitement adhérentes comme des inclusions ellipsoidales aplaties a été proposée récemment dans [Deudé et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 589–599]. La présente Note reprend la même approche dans le cas de fissures frottantes. Pour un frottement de von Mises, on obtient un écrouissage linéaire et une loi de comportement en vitesse identique à celle d'un milieu à fissures fermées lisses. Pour un frottement de Drucker–Prager, le modèle rend compte d'un comportement macroscopique dilatant. ***Pour citer cet article : J.-F. Barthélémy et al., C. R. Mecanique 331 (2003).***

Abstract

A micromechanical modeling of closed cracks as flat ellipsoidal inhomogeneities has been recently proposed in [Deudé et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 589–599]. The present Note extends this approach to the case of a frictional contact between the crack lips. For von Mises friction, a linear hardening is obtained at the macroscopic scale, the state equation in terms of stress and strain rates being identical to that derived for unfrictional cracks. For Drucker–Prager friction, the micromechanical approach predicts a macroscopic dilatant behavior. ***To cite this article: J.-F. Barthélémy et al., C. R. Mecanique 331 (2003).***

Mots-clés : Endommagement ; Micromécanique ; Fissuration ; Von Mises ; Drucker–Prager

Keywords: Damage; Micromechanics; Cracks; Von Mises; Drucker–Prager

Adresses e-mail : barthelemy@lmsgc.enpc.fr (J.-F. Barthélémy), dormieux@lmsgc.enpc.fr (L. Dormieux), djimedo.kondo@univ-lille1.fr (D. Kondo).

1631-0721/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-0721(02)00010-4

Abridged English version

This contribution extends the determination of the macroscopic behavior of a cracked medium proposed in [5] to the case of a frictional contact between the crack lips.

The representative elementary volume (r.e.v.) is made up of an isotropic linear elastic solid phase (k^s and μ^s denote the bulk and shear moduli) and a low density of randomly distributed parallel cracks ($\underline{e}_3$ denotes the normal to the crack plane). A friction law characterizes the behavior of the cracks modelled as interfaces. This friction law is formulated by means of a criterion $f(\underline{T}) \leqslant 0$ involving the stress vector $\underline{T}$ applied to the interface and of a flow rule involving the velocity jump between the lips ($\dot{\beta}$ and $\underline{\dot{\gamma}}$ are the normal and tangential average discontinuities). Three interface friction laws are considered in this paper: von Mises (3), Coulomb (11) and Drucker–Prager (12).

The r.e.v. is submitted to homogeneous strain boundary conditions and the macroscopic deformation follows a monotonous radial path $\underline{\underline{E}} = E\underline{\underline{E}}^o$. A simple shear loading between one direction of the crack plane and the normal is considered (1).

As in [5], the macroscopic behavior of such a cracked medium is obtained by means of a homogenization technique based on Eshelby's results. The idea consists in modeling the cracks as flat ellipsoidal inhomogeneities having a ficticious three-dimensional nonlinear elastic behavior once activated. This nonlinear behavior is selected so as to saturate the interface criterion.

In the case of von Mises, the activation of the cracks occurs for a certain level of macroscopic strain ($E = E^{\mathrm{el}}$). Then, the nonlinear ficticious crack behavior is characterized by a secant stiffness tensor $\mathbb{C}^f$ (4) depending on the second invariant of the strain. In the dilute approximation, the strain field $\underline{\underline{\varepsilon}}$ is uniform within the crack and can be obtained through the concentration equation (5). A Taylor expansion of the strain field is provided for an aspect ratio $\omega \ll 1$. The expression of $\underline{\underline{\varepsilon}}$ obtained by means of (7) leads to the values $\dot{\beta}$ and $\underline{\dot{\gamma}}$ given in (8) which comply with the von Mises flow rule (3). The macroscopic constitutive behavior takes the form $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\mathrm{app}}(\underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{E}}$ with $\mathbb{C}^{\mathrm{app}}(\underline{\underline{E}})$ given in (9). Before crack activation, the cracked medium has the same behavior as the solid phase, whereas, after the activation, the relationship between $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ and $\underline{\underline{\dot{E}}}$ is the same as that obtained for a medium with closed frictionless cracks [5].

The difference between von Mises and Coulomb friction laws only comes from the activation criterion. In the case of von Mises law, the cracks are activated when the tangential stress vector reaches a given threshold whereas, in the case of Coulomb law, the threshold depends on the normal component of the stress vector. For this second case, the following loading is considered: first, the r.e.v. is submitted to an œdometric compression and then, additionally, to the simple shear (1). The first step mobilizes a compressive stress at the origin of the activation threshold and the second one activates the cracks. It is shown that the response to the simple shear can be treated as if the cracks were of von Mises type.

Von Mises and Coulomb criteria do not involve any plastic dilatancy of the cracks whereas this phenomenon can occur in the reality. As in Coulomb law, Drucker–Prager law accounts for the influence of the normal stress on the criterion. However, it introduces a dilatant behavior of the cracks through an associated flow rule (12). As regards the three-dimensional modeling, the nonlinear elastic behavior (14), chosen so as to saturate a Drucker–Prager criterion (see [6]), depends on a parameter a which tends towards 0. In this case, the crack constitutive equation tends towards the expression (15) involving a Lagrange multiplier F. In addition, Eshelby's results allow to relate the strain $\underline{\underline{\varepsilon}}$ and the stress $\underline{\underline{\sigma}}$ in the crack to the macroscopic strain $\underline{\underline{E}}$ (16). For $\omega \ll 1$, this relation together with (15) lead to an equation to be solved by $\underline{\underline{\eta}} = \omega\underline{\underline{\varepsilon}}$ (18), which solution (19) complies with the flow rule because of the compatibility between the two and three-dimensional criteria (21). The macroscopic behavior is then obtained in the form $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^o : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^p$ where $\mathbb{C}^o$ denotes the macroscopic tensor in the case of opened cracks [5] and $\underline{\underline{\Sigma}}^p$, calculated by Levin's formula, is the correction due to the effect of the stress state within the cracks. The dilatancy appears, at the microscopic level, by a normal displacement jump (23) and, at the macroscopic level, by a negative Σ_{33} component (25) of the macroscopic stress induced by simple shear.

1. Principe de la méthode

Le milieu considéré se compose d'une phase solide et de fissures. On note $\mathbb{C}^s = 3k^s\,\mathbb{J} + 2\,\mu^s\,\mathbb{K}$ le tenseur d'élasticité de la phase solide dont le comportement est supposé élastique linéaire isotrope ($\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ désignent les projecteurs s'appliquant sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 et extrayant respectivement les parties sphérique et déviatorique).

L'existence d'une fissuration affecte de façon déterminante les propriétés macroscopiques des matériaux (cf. [1–4]). S'agissant des fissures, la loi de frottement se formule a priori sous la forme d'un critère $f(\underline{T}) \leqslant 0$ portant sur le vecteur-contrainte $\underline{T}$ dans l'interface constituée par les deux faces et une règle d'écoulement portant sur la discontinuité de vitesse entre celles-ci. Dans le prolongement de [5], la méthodologie utilisée ici consiste à représenter géométriquement la fissure non pas comme une interface, mais comme un ellipsoide aplati possédant la symétrie de révolution autour du petit axe. On remplace donc le cadre bidimensionnel de l'interface par une description tridimensionnelle. On rend compte du comportement mécanique de l'interface en introduisant un matériau fictif dans la fissure ellipsoidale, régi par une loi de comportement tridimensionnelle élastique non linéaire dérivant d'un potentiel (cf. [6]). Ce dernier est choisi de façon à saturer le critère de plasticité d'interface et à garantir le respect de la règle d'écoulement associée.

Considérant une densité de fissures suffisamment faible ainsi qu'une répartition aléatoire, on admet que les interactions entre fissures sont négligeables. On s'intéresse, par la suite, à un milieu ne comportant qu'une seule famille de fissures parallèles de révolution, caractérisée par le rayon R, le rapport d'aspect $\omega \ll 1$ (rapport du petit axe au grand axe) et la densité N (nombre par unité de volume). $\underline{e}_3$ désigne la normale au plan de la fissure. On introduit le paramètre de densité de fissures $\epsilon = NR^3$ (cf. [7]), ainsi que la fraction volumique $\varphi = \frac{4}{3}\pi\epsilon\omega$. Le volume élémentaire représentatif (v.e.r.) Ω est alors constitué du solide Ω^s (fraction volumique $1-\varphi$) et de fissures Ω^f (fraction volumique φ).

On se place dans la suite dans l'hypothèse des petites perturbations en négligeant notamment les variations du rapport d'aspect. Dans ce cadre, on définit un chargement sur le v.e.r. à l'aide de conditions aux limites uniformes en déformation en fixant le déplacement de la forme $\underline{\xi} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x}$ sur $\partial\Omega$. On recherche le lien entre la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$ et la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ définie comme la moyenne du champ de contraintes dans le v.e.r. Le recours à un matériau fictif (que l'on précisera) pour rendre compte du comportement mécanique des fissures permet de déterminer le comportement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\underline{E}})$ à partir d'un schéma d'homogénéisation classique basé sur les résultats d'Eshelby dans lequel les fissures jouent le rôle d'une phase inclusionnaire.

L'état initial étant naturel, on considère dans la suite un chargement radial monotone de glissement dans lequel la déformation macroscopique vaut :

$$\underline{\underline{E}} = E\,\underline{\underline{E}}^o \quad \text{avec } \underline{\underline{E}}^o = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1\,;\ \ \dot{E} \geqslant 0 \tag{1}$$

On s'intéresse au cas où la condition d'activation du critère ($f(\underline{T}) = 0$) est réalisée de façon uniforme dans la fissure. Il apparaît clairement que cette condition est automatiquement réalisée lorsque l'état de contrainte initial est uniforme (en particulier pour un état initial naturel). En effet, dans ce cas, les contraintes demeurent uniformes à tout moment du chargement avant activation de la fissure en raison de l'uniformité des propriétés élastiques du matériau. On introduit les composantes normale $\dot{\beta}$ et tangentielle $\dot{\underline{\gamma}}$ de la discontinuité de vitesse moyenne entre les deux faces de la fissure. La contribution des fissures au taux de déformation macroscopique est alors [2,5]

$$\dot{\underline{\underline{E}}}^f = NS^f(\dot{\underline{\gamma}} + \dot{\beta}\underline{e}_3) \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 \tag{2}$$

où $S^f = \pi R^2$ désigne l'aire d'une fissure.

2. Fissure de von Mises

2.1. Comportement de la fissure

La loi de frottement d'interface de von Mises avec règle d'écoulement associée s'écrit :

$$|\underline{T}_t| \leqslant T_0\,; \quad \dot{\beta} = 0\,; \quad \underline{\dot{\gamma}} = \dot{\lambda}\underline{T}_t, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0 \tag{3}$$

où l'indice t désigne la composante dans le plan de la fissure, de normale $\underline{e}_3$. Le multiplicateur $\dot{\lambda}$ est nul lorsque $|\,\underline{T}_t\,| < T_0$. Les contraintes et déformations dans le v.e.r. sont alors homogènes et l'on a $\underline{T} = 2\mu^s E\underline{e}_1$. Le seuil de déformation macroscopique pour lequel le glissement tangentiel $\underline{\dot{\gamma}}$ est activé est donc $E^{\mathrm{el}} = T_0/2\mu^s$.

Comme annoncé à la Section 1, on modélise la fissure pour $E > E^{\mathrm{el}}$ par une inhomogénéité ellipsoidale présentant a priori un comportement élastoplastique. Toutefois, le caractère radial monotone du chargement (1) nous permet de traiter formellement le comportement élastoplastique de la fissure en le remplaçant par un comportement élastique non linéaire bien choisi. Ce comportement élastique non linéaire est caractérisé par un tenseur d'élasticité sécant $\mathbb{C}^f$ fonction de la déformation déviatorique équivalente ε_d qui désigne la norme $\sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d}$ de la partie déviatorique de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (cf. [6]) :

$$\mathbb{C}^f(\varepsilon_d) = 3\,k^f\,\mathbb{J} + 2\,\mu^f(\varepsilon_d)\,\mathbb{K} \quad \text{avec } \mu^f(\varepsilon_d) = \frac{T_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon_d}\,,\ k^f \neq 0 \tag{4}$$

Par ce procédé, on note que l'état de contrainte dans la fissure sature un critère de von Mises de limite en compression simple $\sigma_0 = T_0\sqrt{3}$. La continuité de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la fissure en $E = E^{\mathrm{el}}$ impose pour cette valeur que $\underline{\underline{\varepsilon}} = E^{\mathrm{el}}\underline{\underline{E}}^o$ et l'on vérifie que la structure de $\mathbb{C}^f$ est bien compatible avec la condition d'activation, c'est-à-dire $|\underline{T}_t| = \sigma_{13} = T_0$.

2.2. Résolution du problème non linéaire de localisation après activation

Après activation, le comportement de la fissure exprimé par (4) est non linéaire. Négligeant l'interaction entre fissures, la solution en déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ à l'intérieur du volume de la fissure peut être approchée par la déformation uniforme qui s'établit dans un ellipsoide d'élasticité $\mathbb{C}^f(\varepsilon_d)$, de même orientation et de même rapport d'aspect, placé dans une matrice infinie d'élasticité $\mathbb{C}^s$ avec des conditions en déformations uniformes à l'infini. Le résultat d'Eshelby fournit alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbb{A}_f : \underline{\underline{E}} \quad \text{avec } \mathbb{A}_f = \left(\mathbb{I} + \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{C}^{s\,-1} : \left(\mathbb{C}^f(\varepsilon_d) - \mathbb{C}^s\right)\right)^{-1} \tag{5}$$

où $\mathbb{S}^s_\omega$ est le tenseur d'Eshelby relatif à la matrice d'élasticité $\mathbb{C}^s$, dependant du rapport d'aspect ω des fissures, ainsi que de leur orientation.

La relation (5) exprime une équation non linéaire en $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dont la solution développée au voisinage de $\omega = 0$, obtenue à l'aide d'un outil de calcul formel, s'écrit

$$\varepsilon_d = \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi\,\omega}\,\frac{1-\nu^s}{2-\nu^s} + \mathrm{O}\big(\omega^0\big)\right)\big(E - E^{\mathrm{el}}\big) + \sqrt{2}E^{\mathrm{el}} + \mathrm{O}(\omega)\,; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_d}{\sqrt{2}}\underline{\underline{E}}^o \tag{6}$$

où ν^s désigne le coefficient de Poisson de la matrice solide. On vérifie immédiatement que (6) implique la saturation du critère d'interface de (3) en observant que $\underline{T} = \underline{e}_3 \cdot \mathbb{C}^f : \underline{\underline{\varepsilon}} = T_0\,\underline{e}_1$. Compte tenu de l'uniformité de la déformation dans la fissure, la discontinuité de vitesse $\underline{\dot{\gamma}} + \dot{\beta}\underline{e}_3$ est donnée par :

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \underline{\dot{\xi}} \overset{s}{\otimes} \underline{n}\,\mathrm{d}S = V^f\,\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = S^f\,(\underline{\dot{\gamma}} + \dot{\beta}\underline{e}_3) \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 \tag{7}$$

où $\partial\mathcal{F}$ désigne la frontière de l'ellipsoide et V^f son volume. Il en résulte les relations suivantes qui garantissent la compatibilité avec la règle d'écoulement de (3) :

$$\dot{\beta}=0\,;\quad \underline{\dot{\gamma}}=\frac{32R}{3\pi}\frac{1-\nu^s}{2-\nu^s}\dot{E}\underline{e}_1 \tag{8}$$

2.3. Loi de comportement macroscopique

Le tenseur d'élasticité sécant $\mathbb{C}^{f*}=\mathbb{C}^f(\varepsilon_d)$ avec ε_d donné en (6) caractérise la réponse de la fissure pour le niveau de déformation macroscopique considéré. Le tenseur macroscopique s'écrit formellement $\underline{\underline{\Sigma}}=\mathbb{C}^{\mathrm{app}}(\underline{\underline{E}}):\underline{\underline{E}}$, où le tenseur macroscopique apparent $\mathbb{C}^{\mathrm{app}}(\underline{\underline{E}})$ s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\mathrm{app}}(\underline{\underline{E}})=\mathbb{C}^s+\frac{4}{3}\pi\epsilon\omega\big(\mathbb{C}^{f*}(\underline{\underline{E}})-\mathbb{C}^s\big):\mathbb{A}_f(\underline{\underline{E}}) \tag{9}$$

dans laquelle $\mathbb{C}^{f*}$ et $\mathbb{A}_f$ dépendent de E et de ω. En notant $\mathbb{T}'=\lim_{\omega\to 0}\omega\mathbb{K}:(\mathbb{I}-\mathbb{S}^s_\omega:\mathbb{K})^{-1}$, on introduit le tenseur $\mathbb{C}^l=\mathbb{C}^s:(\mathbb{I}-\frac{4}{3}\pi\epsilon\mathbb{T}')$ qui s'interprète comme le tenseur d'élasticité homogénéisé dans le cas des fissures fermées lisses [5]. La seule composante non nulle de $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'écrit :

$$\begin{cases}\Sigma_{13}=2\mu^s E & \text{pour } E\leqslant E^{\mathrm{el}}\\ \Sigma_{13}=2C^l_{1313}\big(E-E^{\mathrm{el}}\big)+2\mu^s E^{\mathrm{el}} & \text{pour } E>E^{\mathrm{el}} \text{ avec } C^l_{1313}=\mu^s\left(1-\epsilon\dfrac{16(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)}\right)\end{cases} \tag{10}$$

Ainsi, avant activation des fissures, le matériau a le comportement linéaire de la phase solide, tandis qu'ensuite, la relation « en vitesse » entre $\dot{\Sigma}_{13}$ et $\dot{E}$ est identique à celle qui prévaut dans un milieu à fissures fermées lisses.

Dans le cas des fissures de von Mises, on peut montrer que la présence éventuelle de composantes non nulles du chargement $\underline{\underline{E}}$ dans les directions $\underline{e}_i\otimes\underline{e}_{i\,(i=1,2,3)}$ ou $\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2+\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1$ s'ajoutant au tenseur de (1) n'affecte pas le résultat (6) et par conséquent laisse (10) inchangé.

3. Fissure de Coulomb

On examine dans cette section un modèle de fissure plus réaliste dont le critère d'activation fait intervenir la composante normale de la force T_n tout en gardant la règle d'écoulement des fissures de von Mises :

$$|\underline{T}_t|\leqslant -QT_n\,;\quad \dot{\beta}=0\,;\quad \underline{\dot{\gamma}}=\dot{\lambda}\underline{T}_t,\quad \dot{\lambda}\geqslant 0 \tag{11}$$

Cette règle d'écoulement interdisant toute dilatance ($\dot{\beta}=0$) n'est pas associée.

On considère un chargement au cours duquel le milieu est soumis, dans un premier temps, à une compression œdométrique de la forme $-\mathcal{E}\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$ ($\mathcal{E}\geqslant 0$) permettant de mobiliser une contrainte de compression $\sigma_{33}=-(4\mu^s/3+k^s)\mathcal{E}=T_n$ au niveau de la fissure intervenant directement sur le critère (11). Puis vient se superposer le chargement (1). On a donc finalement $\underline{\underline{E}}=-\mathcal{E}\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3+E\underline{\underline{E}}^o$. On peut montrer que la séquence de glissement n'affecte pas la valeur de T_n. La loi (11) se ramène donc, dans ce cas, à la loi de von Mises (3) pour la valeur $T_0=Q(4\mu^s/3+k^s)\mathcal{E}$. Ainsi la détermination du comportement macroscopique d'un milieu comportant ce type de fissures s'effectue formellement comme dans le cas des fissures de von Mises. Ceci résulte du fait que la composante de $\underline{\underline{E}}$ suivant $\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$ (i.e., $-\mathcal{E}$) ne joue aucun rôle dans l'expression du cisaillement macroscopique Σ_{13} (seule composante de $\underline{\underline{\Sigma}}$ affectée par la présence de fissures) conformément à la dernière remarque du Paragraphe 2.3. Ceci est la signature d'un comportement non dilatant.

4. Fissure de Drucker–Prager

4.1. Comportement de la fissure

On cherche dans cette partie à rendre compte d'un comportement macroscopique dilatant. A cet effet, on introduit la loi de frottement associée suivante :

$$|\underline{T}_t| \leqslant -QT_n\ ; \quad \dot{\beta} = -\dot{\lambda}Q^2T_n\ ; \quad \underline{\dot{\gamma}} = \dot{\lambda}\underline{T}_t, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0 \tag{12}$$

Par analogie avec la Section 2, on cherche à rendre compte du comportement (12) en introduisant un matériau fictif bien choisi dans la fissure décrite comme un ellipsoide aplati, vérifiant le critère de Drucker–Prager

$$\sqrt{\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} + T\frac{\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}}{3} \leqslant 0 \tag{13}$$

Le lien entre les scalaires T et Q rendant compatibles les critères de (12) et (13) sera clarifié ultérieurement. Dans [6], on propose un comportement non linéaire issu d'un potentiel (dépendant d'un paramètre a) asymptotiquement proche de la fonction d'appui du critère de Drucker–Prager et fournissant un tenseur des contraintes satisfaisant ce critère. Avec ce choix, la loi de comportement de la fissure s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = f'_a(\varepsilon_v - T\varepsilon_d)\left(\underline{\underline{1}} - T\frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_d}{\varepsilon_d}\right) \tag{14}$$

où $\varepsilon_v = \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}$ et f_a est une fonction convexe décroissante de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $]-a,+\infty[$, valant 0 pour un argument positif, présentant une branche infinie en a et strictement décroissante sur $]-a,0]$. Lorsque a tend vers 0, ce comportement tend vers :

$$\underline{\underline{\sigma}} = F\left(\underline{\underline{1}} - T\frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_d}{\varepsilon_d}\right) \quad \text{avec la condition } \varepsilon_v = T\varepsilon_d \tag{15}$$

F apparaît comme une contrainte moyenne de compression ($F \leqslant 0$). Mathématiquement, F s'interprète aussi comme le multiplicateur de la liaison $\varepsilon_v = T\varepsilon_d$. L'état initial étant naturel, l'activation de la fissure se produit dès le début du cisaillement.

4.2. Résolution du problème non linéaire de localisation

On considère le v.e.r. de solide fissuré soumis à la déformation macroscopique $\underline{\underline{E}}$. On choisit par commodité de calculer la déformation à l'intérieur d'une fissure ellipsoidale en remarquant qu'elle est identique à celle qui s'établit dans un pore ellipsoidal (élasticité nulle), de même orientation et de même rapport d'aspect, soumis à une précontrainte égale à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ de (15) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1} : \left(\underline{\underline{E}} - \mathbb{P}^s_\omega : \underline{\underline{\sigma}}\right) \quad \text{avec } \mathbb{P}^s_\omega = \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{C}^{s-1} \tag{16}$$

En notant $\underline{\underline{\eta}} = \omega\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\mathbb{P} = \lim_{\omega\to 0}\mathbb{P}^s_\omega$, et $\mathbb{T} = \lim_{\omega\to 0}\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega)^{-1}$, Éq. (16) donne au voisinage de $\omega = 0$:

$$\underline{\underline{\eta}} = \mathbb{T} : (\underline{\underline{E}} - \mathbb{P} : \underline{\underline{\sigma}}) \tag{17}$$

Le problème non linéaire à résoudre permettant d'identifier $\underline{\underline{\eta}}$ et la variable F est obtenu à l'aide de (15) et (17) :

$$\underline{\underline{\eta}} = \left(\mathbb{I} - \frac{TF}{\eta_d}\mathbb{T} : \mathbb{P} : \mathbb{K}\right)^{-1} : \mathbb{T} : (\underline{\underline{E}} - F\mathbb{P} : \underline{\underline{1}})\ ; \quad \eta_v = T\eta_d \tag{18}$$

La structure de la solution du système (18), obtenue à l'aide d'un outil de calcul formel, est la suivante :

$$\underline{\underline{\eta}} = \eta_{13}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \eta_{33}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad \text{avec } \frac{\eta_{13}}{\eta_{33}} = \frac{\sqrt{1 - 2T^2/3}}{T\sqrt{2}} \tag{19}$$

Le calcul du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ de (15) fait intervenir $\underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\eta}}_d/\eta_d = \underline{\underline{\varepsilon}}_d/\varepsilon_d$

$$\underline{\underline{\kappa}} = \frac{T}{3}(2\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sqrt{\frac{1-2T^2/3}{2}}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \tag{20}$$

Le vecteur-contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ déduit de (20) sature le critère (12) sous réserve de choisir

$$T = \frac{Q\sqrt{2}}{\sqrt{1+4Q^2/3}} \tag{21}$$

(21) constitue la règle permettant de définir le matériau de Drucker–Prager dans la modélisation tridimensionnelle équivalent à l'interface (12). La discontinuité de vitesse $\underline{\dot{\gamma}} + \dot{\beta}\underline{e}_3$ se calcule par (7), écrite à présent sous la forme

$$\frac{4R}{3}\underline{\underline{\dot{\eta}}} = (\underline{\dot{\gamma}} + \dot{\beta}\underline{e}_3) \overset{s}{\otimes} \underline{e}_3 \tag{22}$$

La compatibilité de (22) avec la règle d'écoulement de (12) résulte de la propriété $\dot{\eta}_{33}/\dot{\eta}_{13} = 2Q$ déduite de (19). La dilatance au niveau des fissures se manifeste par la discontinuité normale β ainsi que l'apparition d'une contrainte normale $T_n = (1-2T^2/3)F < 0$:

$$\begin{cases} \beta = A_\beta(\nu^s, T)E \qquad \text{avec } A_\beta(R, \nu^s, T) = \dfrac{16R\sqrt{2}(1-\nu^s)T\sqrt{1-2T^2/3}}{\pi(3(2-\nu^s) - T^2(1-2\nu^s))} \\ F = A_F(\nu^s, T)\mu^s E \quad \text{avec } A_F(\nu^s, T) = -\dfrac{6\sqrt{2}T}{\sqrt{1-2T^2/3}(3(2-\nu^s) - T^2(1-2\nu^s))} \end{cases} \tag{23}$$

4.3. Loi de comportement macroscopique

La contrainte macroscopique sous le chargement $\underline{\underline{E}}$ est celle qui prévaut dans un milieu à fissures ouvertes (tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^o$) corrigée par l'effet des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = F(\underline{\underline{1}} - T\underline{\underline{\kappa}})$ dans les fissures. Elle s'écrit donc $\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^o : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Sigma}}^p$ avec $\mathbb{C}^o = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi\epsilon\mathbb{T})$ [5], la « précontrainte » macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}^p$ se calculant par la formule de Levin [8] au voisinage de $\omega = 0$:

$$\underline{\underline{\Sigma}}^p = NV^f \underline{\underline{\sigma}} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1} \approx \frac{4}{3}\pi\epsilon F(\underline{\underline{1}} - T\underline{\underline{\kappa}}) : \mathbb{T} \tag{24}$$

En utilisant l'équation de (23) donnant F, on obtient l'expression suivante des composantes Σ_{13} et Σ_{33} sur le trajet radial monotone (1) :

$$\begin{cases} \Sigma_{13} = 2\mu^s\left(1 - 16\epsilon\dfrac{(1-\nu^s)(1-2T^2/3)}{(3(2-\nu^s) - T^2(1-2\nu^s))}\right)E \\ \Sigma_{33} = -32\sqrt{2}\mu^s\epsilon\dfrac{(1-\nu^s)^2\sqrt{1-2T^2/3}}{(1-2\nu^s)(3(2-\nu^s) - T^2(1-2\nu^s))}E \end{cases} \tag{25}$$

Le modèle micromécanique proposé prend en compte le frottement dans les fissures par l'intermédiaire d'un module de cisaillement macroscopique apparent. De plus, dans le cadre du trajet (1), on note que la dilatance au niveau local se traduit à l'échelle macroscopique par des contraintes de compression.

Ce travail peut s'étendre à un type de chargement présentant à la fois un glissement (1) et une composante suivant $\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ c'est-à-dire $\underline{\underline{E}} = E(\underline{\underline{E}}^o - \alpha\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$ avec $\alpha \geqslant 0$. Contrairement au cas des fissures de von Mises, le paramètre α va jouer un rôle sur les composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ modifiées par la présence de fissures (25). Quoique plus lourdes que (25), des expressions analytiques peuvent en outre être obtenues pour $\alpha \neq 0$.

Références

[1] D. Leguillon, É. Sanchez-Palencia, On the behavior of a cracked elastic body with (or without) friction, J. Méc. Théor. Appl. 1 (2) (1982) 195–209.
[2] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.J. Marigo, Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons, J. Méc. Théor. Appl. 5 (1986) 471–513.
[3] V. Pensée, D. Kondo, Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésofissuration, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb 329 (2001) 271–276.
[4] J.-B. Leblond, Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips, Eur. J. Mech. A Solids 19 (2000) 633–647.
[5] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, V. Pensée, Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésofissuré, C. R. Mecanique 330 (2002) 589–592.
[6] J.F. Barthélémy, L. Dormieux, Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire, C. R. Mecanique, sous presse.
[7] B. Budiansky, J.R. O'Connel, Elastic moduli of a cracked solid, Int. J. Solids Structures 12 (1976) 81–97.
[8] A. Zaoui, Matériaux hétérogènes et composites, Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1997.