



Espaces d'écoulements dits « universels » Spaces of universal flows

Michel Bouthier

Laboratoire de modélisation en mécanique, UPMC, tour 66, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France

Reçu le 9 janvier 2002 ; reçu après révision le 15 octobre 2002

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Un mouvement isochore sera réalisable conjointement en fluide parfait, en fluide newtonien, en fluide de Maxwell (à faible vitesse) et en fluide de Rivlin–Ericksen de second grade quels que soient la viscosité et les coefficients viscométriques, si (et seulement si) il est premier. Tout mouvement premier à tourbillon stationnaire est vissé généralisé, et satisfait l'équation de Stokes. Si la vitesse \mathbf{u} d'un mouvement premier vérifie $\text{rot}[(\nabla^t(\Delta\mathbf{u}))\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, le mouvement devient réalisable dans tous les fluides viscoélastiques du second ordre. Fratrie des écoulements potentiels, ces divers ensembles de mouvements premiers sont scannés parallèlement aux écoulements potentiels : ce sont des faisceaux d'espaces conoïdes de dimensions variées, finies et infinies, issus du repos $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. *Pour citer cet article : M. Bouthier, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

An isochoric motion can be performed both in perfect fluid, in Newtonian fluid, in Maxwell fluid (slow motions) and in Rivlin–Ericksen fluid of second grade whatever be viscosities and viscometric coefficients, iff the motion is universal. Every universal motion with steady vorticity is a generalised Belrami flow, and fulfils the Stokes equation. If the velocity \mathbf{u} of an universal motion complies with $\text{rot}[(\nabla^t(\Delta\mathbf{u}))\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, the motion stands for feasible motion in every second order fluid. Brothers of the potential flows, all the sets of universal motions make up bundles of linear or conoïd spaces with various dimensions, finite or infinite, issued from the rest $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. The structures appear by scanning parallel to the potential flows. *To cite this article : M. Bouthier, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Mécaniques des fluides ; Tourbillon des fluides simples ; Écoulement de Couette ; Écoulement de Poiseuille ; Écoulement de Strakhovitch ; Hypothèse de Dunn–Fosdick–Rajagopal

Keywords : Fluid mechanics ; Vorticity in simple fluids ; Couette flow ; Poiseuille flow ; Strakhovitch flow ; Dunn–Fosdick–Rajagopal hypothesis

Abridged English version

One can add any plane or axisymmetrical potential flow to Couette or Hagen–Poiseuille flows respectively, and so construct Newtonian flows [1,2]. In similar way adding appropriate potential flows to Strakhovitch helical flow down a rotating pipe will provide universal motions [4]. Let denote the vorticity of a velocity field \mathbf{u} by $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$.

Due to its definition (1) an universal motion (translated by *mouvement premier* in French) satisfies Navier–Stokes equation whatever be the viscosity ν . Wang [3] defines generalised Beltrami motions by $\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Couette, Hagen–Poiseuille and Strakhovitch flows stand for both universal and generalised Beltrami motions. In such cases, Eqs. (2) hold verified as well as the Stokes equation $\boldsymbol{\omega}'_t = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$. The set of such universal flows with steady vorticity is projective invariant, namely: any motion remains universal with steady vorticity after multiplied by any scalar τ .

Let now add a potential flow $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ to a prescribed universal motion \mathbf{u} . We obtain another universal motion iff Eqs. (3) hold valid. The motions $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ corresponding to the solutions of Eqs. (3) make up a closed affine space. The space may have infinite dimension as the works [1–4] and the remarks reported above suggest it. We can regard the affine space as a cross-section of the set of universal motions. We can also apply the section procedure both to the Newtonian flows, to the generalised Beltrami motions and to the universal motions with steady vorticity. In the three cases, it yields the very same Eqs. (3). Hence we shall regard the cross-sections as classes of equivalence for isochoric motions; here the relation of equivalence $\mathbf{u} \sim \mathbf{w}$ is determined by $\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{w}$ et $\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u}) = \text{rot}(\mathbf{w} \wedge \text{rot } \mathbf{w})$. Whenever the vorticity is steady, the space of \mathbf{v} stays invariant under the projective multiplication of the universal motion \mathbf{u} by τ . Then $\tau \mathbf{u} + \mathbf{v}$ sweeps out a linear space. The universal motions with steady vorticity split in linear spaces with various dimensions, and evoke a sand rose as that extends the two-dimensional case [8]. The generalised Beltrami motions too make up a rose, which includes the former one.

At low velocities, the motions of Maxwell fluids obey to Eqs. (4), (5), where p , ρ , \mathbf{T} , λ represent respectively pressure, specific mass, extra stress tensor and relaxation time; we assign the symbols $\nabla \mathbf{u}$ and $\nabla^t \mathbf{u}$ to the gradient of \mathbf{u} and its transpose. The elimination of p , \mathbf{T} yields Eqs. (8) via Eqs. (6), (7). The substitution of (1) in Eqs. (8) readily shows that each universal motion can be performed in any Maxwell fluid.

The motions of Rivlin–Ericksen fluids obey to Eqs. (4) and (10), where α_1 , α_2 and β are viscometric coefficients. Here the symbol $d\mathbf{D}/dt$ indicates material derivative. We set $\mathbf{u} \equiv (u^1, u^2, u^3)$ when referring to rectangular Cartesian coordinates x^1, x^2, x^3 ; accordingly, we represent the coordinates of $\nabla \mathbf{u}$ and $\nabla^t \mathbf{u}$ by $u^i_k \equiv \partial u^i / \partial x^k$ and $u^k_i \equiv \partial u^k / \partial x^i$; here we attach the indices i and k to lines and columns respectively. Thanks to calculations reported between Eqs. (10) and (11), where repetitions of indices denote summations, we eliminate \mathbf{T} and \mathbf{D} from Eqs. (4) and (10); that furnishes the equation of motion (11). Vorticity Eq. (12) now results from Eq. (11) readily. Firstly consider the second grade fluids: $\beta = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Eq. (12) becomes Eq. (13). Then each universal motion stands for a motion of every second grade fluid. Conversely, every motion of second grade fluid with harmonic vorticity is universal. As a result, every cross-section through the universal motions coincides with its extension through the union of second grade fluids motions. Next consider the other second order fluids: $\beta = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Universal motions will now comply with Eq. (12) iff they satisfy Eq. (14). By way of examples, potential flows, circular or helicoidal motions as well as the rectilinear flows with the velocity $0, 0, u^3(f(x^1, x^2), t)$, always fulfil Eq. (14), for they merely cancel $\nabla(\Delta \mathbf{u})$. The cross-sections through the universal motions fulfilling (14) are now determined by Eqs. (15). Let focus our attention on universal motions satisfying Eq. (14) as moreover having steady vorticity: they make up a third rose included in the former ones. More generally, if $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ satisfies (1) or (14), $\tau \mathbf{u}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$ satisfies (1) or (14) as well, whatever the constants σ , τ . In both the cases, (15) admits the general solution $\mathbf{v}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$. As this extends the two-dimensional case [8] once again, the universal motions complying with (14) or not, compose two bundles of conoid spaces issued from the rest $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. Of course, the bundles include all the roses. Lastly in the general case $\beta \neq 0$ of third grade fluids, the cubic terms of Eq. (12) has linear form in \mathbf{u} with coefficients depending on both $\boldsymbol{\omega}$ and a . The norm $a \equiv |\mathbf{D}|$ of the stretching tensor hence plays a role as basic as the vorticity, and the cross-sections no longer stand for linear spaces. Because $\alpha_1 + \alpha_2$ generally differs from zero, the universal motions will satisfy Eq. (12), iff they comply with both Eqs. (14) and (16). Only the potential flows complying with $\text{rot}[(\nabla^t \mathbf{u}) \nabla a] = \mathbf{0}$ can be performed here. Correlatively, Poiseuille, Hagen–Poiseuille, Taylor–Couette, Strakhovitch flows hold no longer valid. Indeed the requirement (16) greatly restricts the set of universal flows valid for third grade fluids. The universal motions stand for brothers of the potential flows: they possess most remarkable properties (circulation-preserving, Bernoulli theorem, Helmholtz–Rayleigh dissipation theorem, . . .) as they stand for noteworthy outer flows in boundary layer theory.

1. Introduction

L'addition de deux mouvements fournit parfois une troisième solution pour les équations du mouvement. Cette propriété fondamentale pour les écoulements potentiels permet à Wang [1] de classer de nombreux écoulements newtoniens en superposant des écoulements rectilignes, circulaires, potentiels, . . . Berker [2] mentionne la possibilité d'engendrer des écoulements newtoniens plans à partir du modèle de Couette, ou bien encore des écoulements newtoniens de révolution à partir du modèle de Hagen–Poiseuille, en leur ajoutant des mouvements potentiels respectivement plans ou axisymétriques quelconques. Ces deux possibilités sont étudiées plus en détail par Wang dans sa généralisation [3] des mouvements vissés (dits aussi de Gromeka–Beltrami). Seul, l'addendum [4] de Marris et Ames signale que la superposition de l'écoulement newtonien par hélices dans un tube en rotation (appelé écoulement de Strakhovitch) et de mouvements potentiels idoines fournit un écoulement dit « universal » ou « contrôlable ». Ces deux adjectifs en concurrence relient moult parangons fondamentaux chers aux pionniers de la Mécanique des Fluides. C'est pourquoi nous demandons l'autorisation de les traduire en français par *premier*. « Extremely important » pour les fluides simples d'après Truesdell [5], les mouvements premiers semblent avoir retenu l'attention d'Helmholtz, de Kelvin et de Rayleigh dès l'origine, car leurs illustres théorèmes ainsi que le théorème de Bernoulli, peuvent leur être adaptés [6]. Ils ont fourni, ainsi que lesdits théorèmes, matière aux recherches modernes [7–11]. En Section 1, nous distinguons les mouvements premiers à tourbillon stationnaire qui auront deux vertus supplémentaires : premièrement ils satisfont l'équation de Stokes, deuxièmement ils forment des espaces vectoriels quand on les groupe par tourbillons proportionnels. En Section 2, nous montrons qu'à faible vitesse tout mouvement premier est réalisable dans chaque fluide de Maxwell. En Section 3, nous présentons l'équation au tourbillon des fluides de troisième grade. En Section 4, nous montrons que tout mouvement premier est réalisable dans chaque fluide de second grade, puis distinguons une famille de mouvements premiers dont chacun est réalisable dans chaque fluide du second ordre. Chemin faisant dans ces sections, par coupes parallèles à l'espace des mouvements potentiels nous « scannons » les divers ensembles d'écoulements. Le procédé est pertinent quand les équations sont de forme linéaire à coefficients dépendant du seul tourbillon. Nous montrons ainsi que quatre familles remarquables de mouvements premiers forment quatre faisceaux emboîtés d'espaces de dimension variées, finies et infinies. L'étude achoppe finalement sur les fluides de troisième grade où les équations n'ont pas la forme requise. Nous montrons cependant que tourbillon et norme du tenseur vitesse de déformation y jouent des rôles complémentaires d'influences comparables.

2. Spécificité des mouvements premiers à tourbillon stationnaire

Soit $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ le tourbillon d'un écoulement incompressible de vitesse \mathbf{u} . Le mouvement est dit *vissé généralisé* si $\text{rot}(\omega \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Le mouvement est dit « *contrôlable* », « *universal* » ou *premier* si

$$\omega'_t + \text{rot}(\omega \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

Ces définitions sont cinématiques : elles relèvent uniquement de ce que nous appelons le mouvement, c'est-à-dire du champ de vitesse. Chaque mouvement premier est réalisable aussi bien en fluide parfait que dans tout fluide newtonien : il satisfait l'équation de Navier–Stokes $\omega'_t + \text{rot}(\omega \wedge \mathbf{u}) = \nu \Delta \omega$ quelque soit la viscosité ν . Tout comme les écoulements potentiels, les modèles de Couette, Hagen–Poiseuille, Kirchhoff, Poiseuille, Strakhovitch, Taylor–Couette, . . . sont simultanément premiers et vissés généralisés. On a alors

$$\omega'_t = \mathbf{0}, \quad \text{rot}(\omega \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \Delta \omega = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Plus généralement, un mouvement newtonien par droites parallèles, par cercles concentriques ou par hélices coaxiales est premier si, et seulement si, son tourbillon est stationnaire. A l'instar de [8], distinguons donc les mouvements premiers à tourbillon stationnaire. Ces derniers satisfont l'équation de Stokes $\omega'_t = \nu \Delta \omega$ en sus des équations d'Euler et de Navier–Stokes. En outre, ils restent solutions de (2), donc premiers à tourbillon stationnaire, après multiplication par toute constante.

Ajoutons maintenant un mouvement potentiel $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, stationnaire ou non, à un mouvement premier \mathbf{u} quelconque : un autre mouvement premier est obtenu si et seulement si

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

Les potentiels φ qui satisfont cette condition (3) composent manifestement le noyau d'un opérateur linéaire, et les éléments $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ correspondants forment un espace affine fermé. Cet espace, qui dépend du seul tourbillon $\boldsymbol{\omega}$, représente une coupe de l'ensemble des mouvements premiers parallèlement à l'espace des mouvements potentiels. Bien que le cas trivial du noyau réduit à $\{\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}\}$ et de l'élément \mathbf{u} isolé soit très fréquent, la coupe peut ne pas se réduire à un point. Comme l'indiquent les remarques et les propriétés [1,4] citées en tête, les espaces peuvent même se révéler parfois de dimensions infinies. Le potentiel φ vérifiant l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, on pourra alors imposer une condition de frontière (l'équivalent d'une condition de glissement) à $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, mais pas la double condition d'adhérence : la pleine validité en fluide visqueux ne sera acquise qu'aux écoulements qui occupent tout l'espace physique, et à quelques écoulements avec parois. Les autres mouvements gardent néanmoins un intérêt qualitatif certain en fluide visqueux si, comme dans [2,11–14], les conditions d'adhérence sont remplacées par des conditions de glissement ou de transfert massique.

Semblables coupes appliquées soit aux écoulements newtoniens, soit aux mouvements vissés généralisés, soit aux seuls mouvements premiers à tourbillon stationnaire conduisent chaque fois aux mêmes conditions (3). Assimilons donc les coupes à des classes d'équivalence de mouvements isochores \mathbf{u} , \mathbf{w} que nous dirons équivalents si $\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{w}$ et $\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{u}) = \text{rot}(\mathbf{w} \wedge \text{rot } \mathbf{w})$. En effet, chaque coupe est contenue dans une de ces classes, et réciproquement, si un élément d'une classe est d'un certain type, tous les autres éléments de la classe sont de ce type. Les mouvements newtoniens, les mouvements vissés généralisés, les mouvements premiers et les mouvements premiers à tourbillon stationnaire constituent alors quatre collections de ces classes d'équivalence (Fig. 1).

Quand un mouvement premier à tourbillon stationnaire est multiplié par un réel τ variable, on obtient pour \mathbf{v} des équations toutes équivalentes à (3), et l'espace des \mathbf{v} s'avère indépendant de τ . Conséquemment, $\tau\mathbf{u} + \mathbf{v}$ parcourt tout un espace vectoriel de mouvements premiers dont les tourbillons sont proportionnels. Par sa structure généralisant le cas bidimensionnel [8], l'ensemble des mouvements premiers à tourbillon stationnaire nous évoque une rose des sables : c'est un *faisceau d'espaces vectoriels de dimensions variées, finies ou infinies, issus de l'origine formée du repos* $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. Il en est de même des écoulements newtoniens vissés généralisés (en effet, si \mathbf{u} est vissé généralisé, $\tau\mathbf{u}$ l'est également). Cette deuxième rose contient la première, et d'après ce qui précède, ne peut en différer que par « pétales » entiers.

3. A faible vitesse, chaque mouvement premier est réalisable dans tous les fluides de Maxwell

Les écoulements d'un fluide homogène sont régis par

$$\mathbf{u}'_t + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = -\nabla(\rho^{-1}p) + \text{div } \mathbf{T}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

où p et ρ sont la pression et la masse volumique. Pour un fluide de Maxwell, définissons le tenseur des contraintes visqueuses \mathbf{T} par [15] sous hypothèse d'écoulement lent :

$$\mathbf{T} + \lambda\mathbf{T}'_t = \nu\mathbf{D}, \quad \text{où } \mathbf{D} \equiv \nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u} \text{ est le (double du) tenseur vitesse de déformation} \quad (5)$$

La constante λ représente un temps de relaxation. Les symboles $\nabla\mathbf{u}$ et $\nabla^t\mathbf{u}$ désignent le gradient de \mathbf{u} et son transposé. Cette équation différentielle en t nécessite la donnée de la valeur \mathbf{T}_0 de \mathbf{T} à l'instant initial pour que sa solution soit unique. Prenons la divergence de (5), puis son rotationnel et celui de (4), il vient

$$\boldsymbol{\omega}'_t + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = \text{rot}(\text{div } \mathbf{T}), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\text{rot}(\text{div } \mathbf{T}) + \lambda[\text{rot}(\text{div } \mathbf{T})]'_t = \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \quad (7)$$

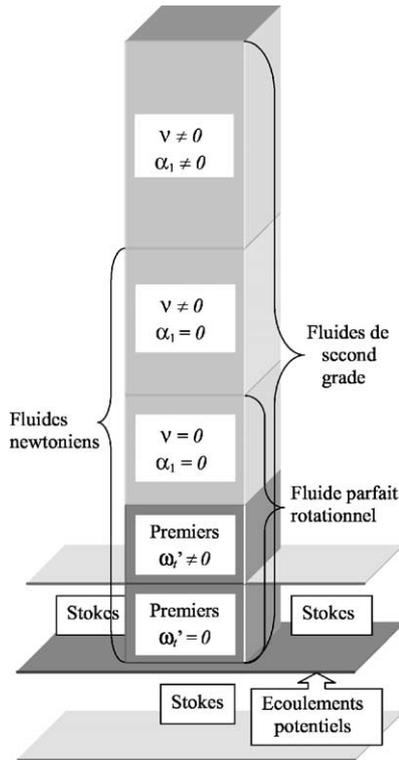


Fig. 1. Dans l'espace des mouvements isochores, on a représenté symboliquement : les écoulements potentiels par un plan horizontal foncé, les coupes par des sections horizontales, les mouvements premiers par les trois portions foncées, les écoulements de Stokes par la tranche d'espace comprise entre les deux plans horizontaux clairs, et les autres mouvements de fluide parfait, de fluides newtoniens ou de fluides de second grade par trois tronçons aboutés aux mouvements premiers. La complexité des fluides va croissante suivant les valeurs indiquées de ν, α_1 en s'éloignant des écoulements potentiels, qui, tout comme les autres mouvements premiers, représentent des mouvements possibles de tous les fluides.

Fig. 1. In the space of isochoric motions, we have symbolically represented: the potential flows as a dark horizontal plane, the cross-sections as horizontal cuttings by the three dark portions, the Stokes motions as the slice of space bounded by two clear horizontal planes and the other motions of perfect fluid, Newtonian fluids or second grade fluids as three stumps joined to the universal motions. Fluid complexity is growing in accordance with the mentioned values of ν, α_1 as we move away from the potential flows, which, as the other universal motions, stand for feasible motions of all the fluids.

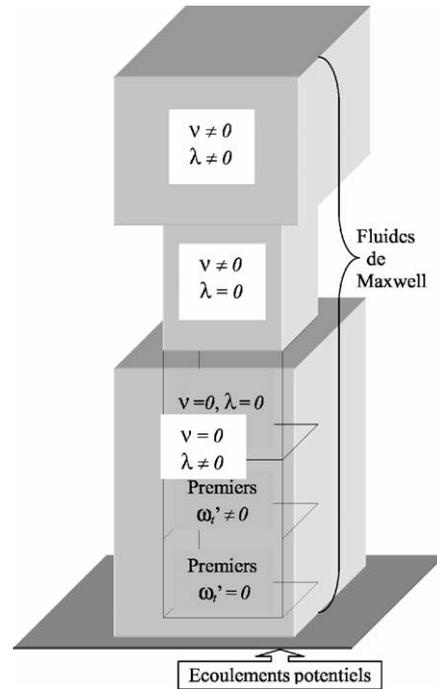


Fig. 2. Les mouvements des fluides de Maxwell comportent trois tronçons : le bloc inférieur ($\nu = 0, \lambda \neq 0$) représente les coupes interceptant un mouvement de fluide parfait, il englobe les blocs inférieurs de la Fig. 1 ; le second ($\nu \neq 0, \lambda = 0$), déjà porté en Fig. 1, comprend le reste des écoulements newtoniens. Enfin, le bloc supérieur ($\lambda \nu \neq 0$) rassemble tous les autres mouvements de fluides de Maxwell.

Fig. 2. The motions of Maxwell fluids comprise three stumps: the lower block ($\nu = 0, \lambda \neq 0$) represents the sections merging perfect fluid motions, it includes the lower blocks of Fig. 1; the second one ($\nu \neq 0, \lambda = 0$), already mentioned in Fig. 1, is made up of the other Newtonian flows. Lastly, the upper block ($\lambda \nu \neq 0$) gathers all the other motions of Maxwell fluids.

Soit maintenant un champ premier \mathbf{u} , à tourbillon stationnaire ou non. Il sera solution de (6) si $\text{rot}(\text{div } \mathbf{T})$ est nul à tout instant. D'après l'équation (7) devenue homogène, il en sera ainsi si et seulement si $\text{rot}(\text{div } \mathbf{T})$ est nul à un instant donné, autrement dit si les forces visqueuses $\text{div } \mathbf{T}$ dérivent d'un potentiel à un instant donné. A tout

mouvement premier \mathbf{u} , il correspond donc *une infinité de contraintes telles que le couple (\mathbf{u}, \mathbf{T}) définit un mouvement de fluide de Maxwell*. L'élimination de \mathbf{T} entre (6) et (7) fournit

$$\boldsymbol{\omega}'_t + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) + \lambda[\boldsymbol{\omega}'_t + \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u})]'_t = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

La substitution de (1) dans cette équation annule les deux membres, et de ce simple fait, tous les mouvements premiers sont réalisables en fluide de Maxwell. Observons que tous les écoulements de fluide parfait, rotationnels ou non, sont aussi solutions de (8) quand $\nu = 0$. Bien qu'ainsi nous différiions l'énoncé des diverses extensions du théorème de Bernoulli pour les écoulements premiers, nous emprunterons désormais le raccourci via l'équation du tourbillon. Notons que, dans un mouvement premier, seules les contraintes (pression, frottements internes et pariétaux) varient d'un fluide à l'autre, et permettent d'identifier les fluides lors de mesures physiques.

Toute coupe parallèle aux écoulements potentiels est ici déterminée par

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) + \lambda[\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v})]'_t = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

Les coupes sont donc à nouveau des espaces affines fermés. Elles dépendent de $\boldsymbol{\omega}$ mais aussi du coefficient λ . Prolongeons les coupes des mouvements premiers voire celles des écoulements de fluide parfait au travers des écoulements de Maxwell : la solution générale de (9) comprend toutes les solutions de (3) mais aussi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}) e^{-t/\lambda}$, \mathbf{x} étant le point courant de \mathbb{R}^3 , et $\mathbf{v}_s(\mathbf{x})$ un mouvement isochore potentiel stationnaire quelconque (Fig. 2).

4. L'équation au tourbillon des fluides de Rivlin–Ericksen jusqu'au troisième grade

Les *fluides du second ordre* sont caractérisés par une viscosité newtonienne ν et deux coefficients viscométriques α_1 et α_2 (rapportés à l'unité de masse). Les *fluides de second grade* en forment une sous-famille définie par $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Seuls ces derniers respectent l'inégalité de Clausius–Duhem. Par définition, les *fluides de troisième grade* aussi obéissent à cette hypothèse thermodynamique [16] dite de Dunn–Fosdick–Rajagopal; elle s'écrit alors $\nu \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta \geq 0$, $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \leq 24\nu\beta$, où β est le quatrième coefficient viscométrique intervenant dans la loi de comportement suivante commune aux trois types de fluides :

$$\mathbf{T} = \nu \mathbf{D} + \alpha_1 \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{D} \nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \right) + \alpha_2 \mathbf{D}^2 + \beta a \mathbf{D}, \quad \text{où } a \equiv \text{tr } \mathbf{D}^2 \text{ est la trace de } \mathbf{D}^2 \quad (10)$$

Le symbole d/dt désigne ici la dérivée particulière. Dans un système de coordonnées x^1, x^2, x^3 orthonormées, soient u^1, u^2, u^3 les composantes de \mathbf{u} . Indiquons les dérivations par des indices inférieurs, et posons $u'_k \equiv \partial u^i / \partial x^k$ et $u''_i \equiv \partial u^k / \partial x^i$. Le gradient $\nabla \mathbf{u}$ et son transposé $\nabla^t \mathbf{u}$ ont ainsi pour composantes u''_k et u'_i , où i et k désigneront respectivement les indices de ligne et de colonne. Les sommes étant indiquées par des indices répétés, la norme du tenseur \mathbf{D} sera définie par $|\mathbf{D}|^2 \equiv (u''_n + u''_n)(u''_n + u''_n) = \text{tr}[(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})^2] = a$. Pour éliminer \mathbf{T} et \mathbf{D} entre (4) et (10), développons comme suit :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \right) &\equiv \text{div}[\mathbf{D}'_t + u^n \nabla u_n + u^n \nabla^t u_n + (\nabla \mathbf{u})^2 + 2 \nabla^t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla^t \mathbf{u})^2] \\ \text{div } \mathbf{D}^2 &\equiv \text{div}[(\nabla \mathbf{u})^2 + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla^t \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla^t \mathbf{u})^2], \quad \text{div}(a \mathbf{D}) = a \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \nabla a \end{aligned}$$

Notons que si $|\mathbf{D}|$ est uniforme dans un mouvement de fluide du second ordre, le mouvement peut être effectué par tous les fluides de troisième grade dont la viscosité ν_3 et le coefficient β_3 satisfont $\nu_3 + \beta_3 a = \nu_2$, ν_2 étant la viscosité dudit fluide du second ordre. Puis rassemblons les égalités suivantes, qui résultent de $\text{div } \mathbf{u} \equiv u''_k = 0$ sauf la cinquième :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= \Delta \mathbf{u}, \quad \text{div}(\mathbf{D}'_t) = \Delta \mathbf{u}'_t, \quad \text{div}(u^n \nabla^t u_n) = (u^n u''_{in})_k = u''_k u''_{in} = (u''_i u''_{kn})_k = \text{div}[(\nabla^t \mathbf{u})^2] \\ \text{div}[u^n \nabla u_n + (\nabla \mathbf{u})^2] &= (u''_n u''_{kn} + u''_n u''_{kn})_k = u''_n u''_{kkn} + 2u''_{nk} u''_k + u''_n u''_{kk} = \Delta[(\nabla \mathbf{u})^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[(\nabla \mathbf{u})^2 + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla^t \mathbf{u}] &= u_{nk}^i u_k^n + u_n^i u_{kk}^n + u_{nk}^i u_n^k = \Delta[(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}] - [\nabla(\Delta \mathbf{u})]\mathbf{u} \\ a &\equiv (u_k^n + u_n^k)(u_k^n + u_n^k) = u_k^n u_k^n + 2u_k^n u_n^k + u_n^k u_n^k = 2u_k^n u_k^n + 2u_n^k u_n^k \\ \operatorname{div}[\nabla^t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla^t \mathbf{u})^2] &= u_{ik}^n u_k^n + u_i^n u_{kk}^n + u_{ik}^n u_n^k = \nabla a/4 + \nabla(\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u}) - [\nabla^t(\Delta \mathbf{u})]\mathbf{u} \end{aligned}$$

Utilisons alors l'identité $[\nabla(\Delta \mathbf{u}) - \nabla^t(\Delta \mathbf{u})]\mathbf{u} \equiv (\Delta \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{u}$, posons $h \equiv p\rho^{-1} - (2\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} + a/4)$, nous obtenons pour équation d'évolution de la vitesse

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_t + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} \\ = -\nabla h + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha_1 \Delta \mathbf{u}'_t + (\alpha_1 + \alpha_2) \{ \Delta[(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}] - 2[\nabla^t(\Delta \mathbf{u})]\mathbf{u} \} + \alpha_2 \mathbf{u} \wedge \Delta \boldsymbol{\omega} + \beta(a \Delta \mathbf{u} + \mathbf{D}\nabla a) \end{aligned} \quad (11)$$

Enfin grâce à $\operatorname{rot}[a \Delta \mathbf{u} + \mathbf{D}\nabla a] = a \Delta \boldsymbol{\omega} + \nabla a \wedge \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot}(\mathbf{D}\nabla a)$, éliminons la pression. Nous parvenons à l'équation

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} + \alpha_2 \Delta \boldsymbol{\omega})'_t + \operatorname{rot}[(\boldsymbol{\omega} + \alpha_2 \Delta \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{u}] - \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \\ = (\alpha_1 + \alpha_2) \{ \Delta[\boldsymbol{\omega}'_t + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u})] + 2 \operatorname{rot}[(\nabla^t(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}))\mathbf{u}] \} + \beta \{ a \Delta \boldsymbol{\omega} - \nabla a \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \operatorname{rot}(\mathbf{D}\nabla a) \} \end{aligned} \quad (12)$$

Manifestement, le tourbillon, les relations (1), (2), l'hypothèse thermodynamique $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et la norme de \mathbf{D} y jouent des rôles essentiels.

5. Les mouvements premiers des divers fluides de Rivlin–Ericksen, conclusion

Considérons d'abord le cas des fluides de second grade : $\beta = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. L'équation du tourbillon devient simple :

$$(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega})'_t + \operatorname{rot}[(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{u}] = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (13)$$

Quand le tourbillon est harmonique ($\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$), Éq. (13) se réduit à l'équation d'Euler. En conséquence : (i) *Chaque mouvement premier est un mouvement possible pour chaque fluide de second grade* ; (ii) *Un mouvement de fluide de second grade est premier si et seulement si son tourbillon est harmonique*. Les coupes dans l'ensemble des mouvements d'un fluide de second grade donné sont définies par $\operatorname{rot}[(\boldsymbol{\omega} - \alpha_1 \Delta \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{v}] = \mathbf{0}$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Elles dépendent de α_1 , mais si le tourbillon est harmonique, le système devient indépendant dudit α_1 , donc identique à (3) ; (iii) *Chaque coupe des mouvements premiers est égale à son prolongement dans la réunion de tous les mouvements de fluides de second grade*. La Fig. 1 illustre ces propriétés que partagent fluide parfait et fluides newtoniens en $\alpha_1 = 0$.

Considérons le cas des autres fluides du second ordre : $\beta = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ (fluide de Walters de type B, $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; ...). Un mouvement premier sera solution de (12) si et seulement si

$$\operatorname{rot}[(\nabla^t(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}))\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad \text{ou encore } \operatorname{rot}[(\nabla^t(\Delta \mathbf{u}))\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (14)$$

Pour les écoulements potentiels et les modèles invoqués avant (2), $\nabla(\Delta \mathbf{u})$ est toujours nul. Partant, ces mouvements satisfont à la fois (1) et (14). Plus généralement, les écoulements newtoniens circulaires ou hélicoïdaux, permanents ou non, ainsi que les seuls écoulements newtoniens rectilignes de vitesse $0, 0, u^3(f(x^1, x^2), t)$ où la fonction f est arbitraire, vérifient aussi (14). Toute coupe dans les mouvements premiers vérifiant (1)–(14) est définie par

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot}[(\nabla^t(\operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}))\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (15)$$

Chacune forme un sous-espace pour son prolongement (3) au travers des autres mouvements premiers ; sous-espace et prolongement sont confondus si $\nabla(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Quand \mathbf{u} est à tourbillon stationnaire et vérifie donc conjointement (2)–(14), la multiplication de \mathbf{u} par un réel τ laisse la relation (14) vérifiée et la solution \mathbf{v} de (15) invariante. On peut classer de tels mouvements par tourbillons proportionnels dans des espaces vectoriels : ce sont des sous-espaces de ceux introduits pour les mouvements premiers à tourbillon stationnaire. On obtient ainsi une

troisième rose incluse dans les deux premières. Trois « pétales » passant par un même élément où $\nabla(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, sont confondus. Plus généralement, si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est premier, $\tau \mathbf{u}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$ l'est aussi pour tous les réels σ, τ . Si \mathbf{u} satisfait en outre (14), $\tau \mathbf{u}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$ satisfait également (14). Dans ces deux cas, la solution de (15) est $\mathbf{v}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$, et l'élément $\tau \mathbf{u}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t) + \mathbf{v}(\sigma \mathbf{x}, \sigma \tau t)$ parcourt un espace courbe dont les sections sont des espaces affines isomorphes parallèles aux mouvements potentiels : les mouvements premiers et leur sous-famille délimitée par (14) forment deux faisceaux d'espaces conoïdes issus du repos $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$.

Considérons enfin le cas des fluides de troisième grade $\beta \neq 0$. Éq. (12) ne se réduit plus à une forme linéaire en \mathbf{u} à coefficients dépendant exclusivement de $\boldsymbol{\omega}$. Les coefficients des termes en β dépendent aussi de a : tourbillon et norme du tenseur vitesse de déformation y jouent des rôles complémentaires d'importances comparables. Les coupes parallèles aux écoulements potentiels y perdent leur structure linéaire. La somme $\alpha_1 + \alpha_2$ étant ici généralement différente de zéro, un mouvement premier sera réalisable si, outre la condition (14), on a

$$\nabla a \wedge \text{rot } \boldsymbol{\omega} - \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \nabla a) - 2 \text{rot}[(\nabla^t \mathbf{u}) \nabla a] \equiv \mathbf{0} \quad (16)$$

La double condition (14)–(16) réduit fortement le nombre des mouvements premiers la vérifiant : un écoulement potentiel doit annuler $\text{rot}[(\nabla^t \mathbf{u}) \nabla a]$ pour être réalisable ; corrélativement, les mouvements de Couette et de Kirchhoff restent réalisables (a est alors uniforme), mais les mouvements de Poiseuille, Hagen–Poiseuille, Taylor–Couette, Strakhovitch ne le sont plus, et ce. . . même si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Ce cas d'exception, qui comporte l'exemple important $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ d'un « power law fluid », n'exige pourtant que la seule condition (16) !

Fratrie des écoulements potentiels dont ils détiennent plusieurs propriétés illustres (mouvements à flux conservatif, théorème de Bernoulli, théorème de Helmholtz–Rayleigh sur la dissipation, . . .), les mouvements premiers sont aussi de remarquables approximations extérieures en théorie de couche limite. À défaut universelle leur *polyvalence* est exceptionnelle, qui valide, par *pans d'espaces entiers*, leurs insignes propriétés jusqu'en fluides non newtoniens (en anglais l'adjectif « polyvalent » n'existe pas, excepté en chimie).

Références

- [1] C.Y. Wang, Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations, *Appl. Mech. Rev.* (2) 42 (11) (1989) 269–282.
- [2] R. Berker, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, in: *Handbuch der Physik*, Vol. 8, Part 2, Springer, Berlin, 1963, pp. 1–384. Mouvements à tourbillon constant, Section 16, p. 39; Mouvements potentiels perturbés, Section 19, p. 45; Mouvements où $D^2 \Psi = Kr^2$, lignes 25–26, Section 21 β , p. 53; Mouvements où $D^2 \Psi = f(r)$, écoulement de Strakhovitch, écoulement autour d'un paraboloïde, Section 21 γ , p. 55.
- [3] C.Y. Wang, Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension, *Acta Mech.* 81 (1990) 60–74.
- [4] A.W. Marris, W.F. Ames, Addendum: On complex-lamellar motions, *Arch. Rational Mech. Anal.* 64 (1977) 371–379. Third part of main theorem, p. 372.
- [5] C. Truesdell, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 6 (1974) 111–146. Yin and Pipkin's theorems. Universal flows, pp. 129–130.
- [6] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, in: S. Flugge, C. Truesdell (Eds.), *Handbuch der Physik*, Vol. 8, Part. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1959, Sections 75–76, pp. 258–261.
- [7] M.P. Stallybrass, A class of exact solutions of the Navier–Stokes equations. Plane unsteady flow, *Lett. Appl. Engrg. Sci.* 21 (2) (1983) 179–186.
- [8] W.-L. Yin, Circulation-preserving plane flows of incompressible viscous fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.* 83 (1983) 169–194.
- [9] M. Bouthier, Vorticity in plane parallel, axially symmetrical or spherical flows of viscous fluid, *Appl. Sci. Res.* 50 (1993) 1–27.
- [10] O. Richmond, S. Alexandrov, Extension of Bernoulli's theorem on steady flows of inviscid fluids to steady flows of plastic solids, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib* 328 (2000) 835–840.
- [11] C. Truesdell, *The Kinematics of Vorticity*, Bloomington, 1954, pp. 72–76.
- [12] J. Ackeret, Über exakte Lösungen der Stokes–Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen, *Z. Angew. Math. Phys.* 3 (1952) 259–271.
- [13] G. Hamel, Über die Potentialströmungen zäher Flüssigkeiten, *Z. Angew. Math. Mech.* 21 (1941) 129–139.
- [14] R.M. Terrill, T. Colgan, Some simple analytic solutions of the Navier–Stokes equations, *Int. J. Engrg. Sci.* 29 (1) (1991) 55–68.
- [15] K. Walters, *Rheometry*, Chapman and Hall, London, 1975, Eqs. (2.11), p. 13, (6.29), p. 130.
- [16] F. Baldoni, R. Gudhe, K. Yeleswarapu, Helical flow of a simple fluid between eccentric cylinders, *Int. J. Non-Linear Mech.* 28 (2) (1993) 221–235. Introduction de l'Éq. (8), p. 223.