



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 179–182



## Détermination de la résonance de Bragg et des largeurs des bandes interdites par le modèle d'onde plane corrigé

## Determination of the Bragg resonance and line width of forbidden bands using the corrected plane wave model

Smail Naasse, Chakib Chahine, Mohamed Chagdali

*L.C.S.M, Faculté des sciences, Ben Msik sidi Othmane, BP 7955, Sidi Othmane, Casablanca, Maroc*

Reçu le 23 avril 2002 ; accepté après révision le 19 novembre 2002

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

### Résumé

Lors de l'interaction de la houle avec un fond constitué d'une série de marches, au moyen du modèle d'onde plane corrigé par la longueur efficace : (1) On détermine les position exactes de la résonance de Bragg dans le cas d'un fond périodique ou contenant une partie périodique ; (2) La détermination des largeurs des bandes interdites est ramenée à l'étude du signe du discriminant du polynôme caractéristique de la matrice de transfert du motif générateur de la partie périodique du fond ; (3) On peut augmenter la largeur des bandes interdites en utilisant des marches de longueurs légèrement croissantes ou légèrement décroissantes. **Pour citer cet article : S. Naasse et al., C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

During the interaction of the swell with a sea bottom composed of a set of steps, using the model of plane wave corrected by the effective length: (1) We determine the exact position of the Bragg resonance in case of a periodic bottom or containing a periodic part; (2) The determination of forbidden band widths is brought back to the study of the sign of the discriminant of the polynomial characteristic of the matrix of transfer of the generating motive of the periodic part of the bottom; (3) One can increase the width of the forbidden band while using some slightly increasing or decreasing length steps. **To cite this article: S. Naasse et al., C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

*Mots-clés* : Mécanique des fluides ; Houle ; Résonance de Bragg ; Bande interdite

*Keywords*: Fluid mechanics; Swell; Bragg resonance; Forbidden band

---

*Adresse e-mail* : [s.naasse@caramail.com](mailto:s.naasse@caramail.com) (S. Naasse).

## 1. Introduction

Lors du passage d'une houle sur un fond périodique, pour certaines bandes de fréquence dites bandes interdites, la réflexion est totale. Ce phénomène est appelé en cristallographie résonance de Bragg [1]. Depuis sa mise en évidence en hydrodynamique par Heathershaw [2] ce sujet a été étudié par beaucoup d'auteurs (voir Liu et Mei [3]).

Dans le présent travail, on simule la propagation d'une houle dans un canal à fond horizontal contenant une série de marches fixées au fond. Cette étude est faite dans le cadre de la théorie potentielle en profondeur intermédiaire en l'absence de toute réflexion à l'aval. Le modèle d'onde plane corrigé [4] nous permet : (1) Dans le cas d'un fond périodique, de déterminer avec exactitude la position de la résonance de Bragg et les largeurs des bandes interdites ; (2) D'augmenter la largeur d'une bande interdite en prenant une série de marches de longueurs légèrement croissantes ou légèrement décroissantes.

## 2. Cas d'un fond périodique constitué de marches identiques

### 2.1. Détermination de la condition de résonance de Bragg par le modèle d'onde plane corrigé

Lors d'une étude expérimentale, d'une structure périodique, Guazzelli [5] a constaté qu'il y a résonance de Bragg lorsque la longueur d'onde du fond  $l + d$  est voisine d'un nombre entier de demi longueur d'onde  $\lambda_0$  de l'onde incidente  $2(l + d) \approx n\lambda_0$ . Or cela suppose que la célérité est partout la même, ce qui n'est pas le cas pour la structure étudiée puisqu'il y a trois profondeurs différentes,  $H_0$  en amont et en aval,  $h$  au dessus des marches et  $H = H_0 + \Delta H$  entre les marches. Le décalage temporel entre les ondes réfléchies par deux marches successives est déterminé par la longueur des marches, la distance entre les marches, la profondeur d'eau au-dessus des marches, la profondeur d'eau entre les marches et le déphasage introduit par la présence des modes évanescents qui peut être déterminé par la connaissance de la longueur efficace  $L$ . Il y a résonance de Bragg lorsque ce décalage est un multiple entier de la période. Il en résulte que :  $2(L/\lambda_1 + d/\lambda_2) = n$  avec :  $\lambda_1$  désigne la longueur d'onde au dessus des marches,  $\lambda_2$  la longueur d'onde entre les marches,  $l$  la longueur réelle des marches,  $L$  la longueur efficace des marches,  $d$  la distance entre les marches et  $n$  est un nombre entier. La longueur d'onde  $\lambda_0$  est calculée par la relation de dispersion :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} H_0 \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} H_0\right) = \left(2\pi f \sqrt{\frac{H_0}{g}}\right)^2 \quad (1)$$

où  $f$  est la fréquence et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Les longueurs d'ondes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont calculées en remplaçant dans l'expression (1)  $H_0$  par  $h$  et  $H$  respectivement.

Sur le Tableau 1 nous avons comparé nos résultats avec ceux de Guazzelli [5] pour deux configurations expérimentales différentes.

Tableau 1  
Comparaison des résultats avec ceux de Guazzelli [5]

Table 1  
Comparison of the results with those of Guazzelli [5]

		Guazzelli		Prévision	
		Expérience	Prévision	Onde plane	Onde plane corrigé
		$F_{\text{exp}}$ (Hz)	$2(l + d)/\lambda_0$	$2l/\lambda_1 + 2d/\lambda_2$	$2L/\lambda_1 + 2d/\lambda_2$
$H_0 = 3$ cm, $H = 3,75$ cm, $h = 2,25$ cm	1 <sup>ère</sup> bande $n = 1$	2,58	0,90	0,92	$1,00 \approx n = 1$
$H_0 = 1,75$ cm, $H = 2,5$ cm, $h = 1$ cm	1 <sup>ère</sup> bande $n = 1$	2,00	0,83	0,89	$0,98 \approx n = 1$
	2 <sup>ème</sup> bande $n = 2$	3,62	1,69	1,81	$1,97 \approx n = 2$

Des résultats présentés sur ce tableaux on constate que le modèle d’onde plane corrigé permet de prédire la condition de résonance de Bragg avec exactitude. Le modèle qu’on propose intègre l’effet des modes évanescents dans celui des modes propagatifs. Avec ce modèle on peut évaluer l’influence des modes évanescents sur la phase de l’onde réfléchié lors d’un changement de fond.

2.2. Détermination des largeurs des bandes interdites

Connaissant la longueur efficace des marches le coefficient de réflexion par une série de  $N$  marches identiques peut être calculé, par le modèle d’onde plane corrigé [4], comme étant la limite, lorsque  $n$  tend vers  $N$ , de la suite récurrente :  $R_{n+1} = -(\beta^* - \alpha R_n)/(\alpha^* - \beta R_n)$  avec  $R_0 = -\beta^*/\alpha^*$ ,  $n = 0$  à  $N - 1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les éléments de la matrice carrée de transfert d’une marche :

$$[S] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \tag{2}$$

Nous remarquons que le terme général de cette suite est une transformation homographique de l’intérieur du cercle unité sur lui-même [6] et qui admet deux points fixes. Les affixes de ces deux points, qu’on note  $a$  et  $b$ , sont les deux complexes solutions d’une équation du second degré à coefficients complexes dont le discriminant  $\Delta$  est égal à celui du polynôme caractéristique de la matrice de transfert (2). Par le changement de variable  $V_n = (-R_n + b)/(R_n - a)$  la suite  $R_n$  est ramenée à une suite géométrique  $V_n$  de raison  $q = (a\beta - \alpha^*)/(b\beta - \alpha^*)$ . D’où :

$$R_{n+1} = \frac{a(R_1 - b)/(R_1 - a)q^n - b}{(R_1 - b)/(R_1 - a)q^n - 1} \tag{3}$$

On montre que : si  $\Delta$  est strictement positif on a :  $|a| = |b| = 1$  et  $|q| < 1$  et de l’expression (3) on déduit que le module du coefficient de réflexion tend vers l’unité et par conséquent la réflexion est totale (Fig. 1). Si  $\Delta$  est strictement négatif on a  $|q| = 1$  et on en déduit que le module du coefficient de réflexion est borné et oscillant.

Dans le cas d’un fond constitué de plusieurs motifs identiques contenant chacun des marches différentes, la matrice de l’expression (2) est remplacée par la matrice de transfert du motif générateur.

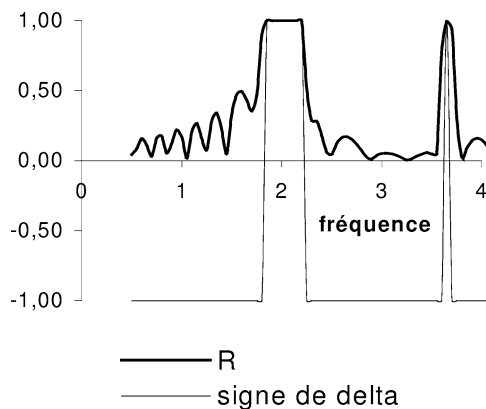


Fig. 1. Bandes interdites pour une série 29 marches  $l = d = 4,1$  cm,  $h = 1$  cm,  $H = 2,5$  cm.

Fig. 1. Forbidden strips for a set of 29 steps  $l = d = 4.1$  cm,  $h = 1$  cm,  $H = 2.5$  cm.

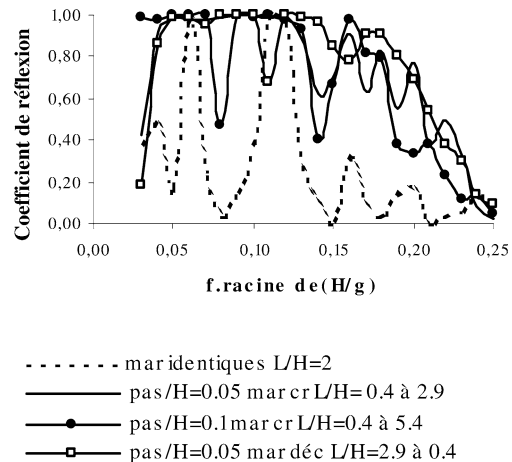


Fig. 2. Coefficient de réflexion pour 50 marches  $h/H = 0,4$ .

Fig. 2. Reflection coefficient for 50 steps  $h/H = 0.4$ .

### 3. Elargissement de la bande interdite

#### 3.1. Calcul du coefficient de réflexion

Dans le cas d'un fond constitué d'une série de marches différentes, en utilisant le modèle d'onde plane corrigé [4], le coefficient de réflexion est donné par :  $R_{n+1} = -(\beta_{n+1}^* - \alpha_{n+1} R_n) / (\alpha_{n+1}^* - \beta_{n+1} R_n)$  où  $R_{n+1}$  est le coefficient de réflexion de  $n + 1$  marches, comptées à partir de l'aval,  $\alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1}$  sont des constantes complexes qui dépendent des caractéristiques de la  $(n + 1)^{\text{ième}}$  marche et de la fréquence.

#### 3.2. Résultats

Sur la Fig. 2 nous avons tracé les variations du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence adimensionnelle  $f\sqrt{H/g}$  provenant de l'équation de dispersion (1), pour une immersion de 40% ( $h/H = 0.4$ ). Toutes les longueurs et les hauteurs ont été rapportées à la profondeur d'eau totale  $H$ . Trois cas ont été considérés : une série de marches identiques de longueur relative ( $L/H = 2$ ), une série de marches de longueurs décroissantes ( $\text{pas}/H = 0.05$  mar dec  $L/H = 2.9$  à  $0.4$ ) et une série de marches de longueurs croissantes ( $\text{pas}/H = 0.05$  mar cr  $L/H = 0.4$  à  $2.9$  et  $\text{pas}/H = 0.1$  mar cr  $L/H = 0.4$  à  $5.4$ ). Le pas désigne la différence entre les longueurs de deux marches successives ( $\text{pas} = |L_{k+1} - L_k|$ ).

Sur ces courbes on constate qu'on peut élargir la bande interdite au moyen d'un fond de périodicité qui croit ou qui décroît très lentement.

### 4. Conclusion

Le modèle d'onde plane corrigé par la notion de longueur efficace permet : (1) De déterminer avec exactitude la fréquence de résonance de Bragg ; (2) De montrer que pour un fond périodique ou contenant un fond périodique la largeur des bandes interdites ne dépend que du discriminant du polynôme caractéristique de la matrice de transfert du motif générateur de la partie périodique ; (3) D'élargir la bande interdite, afin d'augmenter la gamme de fréquences totalement réfléchies, en utilisant un fond constitué de plusieurs marches dont les longueurs augmentent (ou diminuent) graduellement en allant de l'extrémité amont du fond à l'extrémité aval.

### Références

- [1] Kittel, Introduction to Solid Physics, Wiley, 1976.
- [2] A.D. Heathershaw, Seabed-wave resonance and sand bar growth, Nature 296 (1982) 343–345.
- [3] J. Yu, C.C. Mei, Do longshore bars shelter the shore, J. F. M. 404 (2000) 71–72.
- [4] S. Naasse, C. Chahine, M. Chagdali, Notion de longueur apparente pour la détermination de la réflexion de la houle par un obstacle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Iib 330 (2002) 9–12.
- [5] E. Guazzelli, Deux études expérimentales du désordre en hydrodynamique physique : désordre spatial de structures convectives ; effet du désordre sur la propagation d'ondes de gravité, Thèse d'état, Université de Provence, 1986.
- [6] M. Lavrentiev, B. Chabat, Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe, Mir.