

Contrôle des profils de vitesse par déformation de parois dans une conduite

Meryem Sijelmassi, Jaâfar Khalid Naciri

Laboratoire de mécanique, faculté des sciences Ain-Chock, BP 5366 Mâarif, Casablanca, Maroc

Reçu le 28 mai 2001 ; accepté le 9 septembre 2001

Note présentée par Sébastien Candel.

Résumé

On propose dans ce travail, à partir de l'étude des équations aux perturbations pour un écoulement stationnaire d'un fluide newtonien dans une conduite rigide déformée, une méthode semi-analytique permettant de générer dans une section donnée de la conduite, un profil de vitesse arbitraire préalablement défini. Ce profil est obtenu en modifiant sur une longueur donnée, la forme de la paroi de la conduite pour créer des perturbations particulières du profil amont, ce qui permet de générer le profil choisi. *Pour citer cet article* : M. Sijelmassi, J. Khalid Naciri, C. R. Mécanique 330 (2002) 153–158. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / conduite déformée / perturbations / profil de vitesse

Control of velocity profiles by walls deformation in a deformed conduit

Abstract

Starting from a study of perturbation equations for stationary Newtonian fluid flow in deformed axisymmetric tubes, we propose a semi-analytical method allowing to generate in a given section of the conduit, an arbitrary velocity profile previously defined. We get this velocity profile by geometrical modification of the duct walls on a given length. Doing this, we create a specific perturbation of the upstream profile which allows to generate the chosen velocity profile. *To cite this article*: M. Sijelmassi, J. Khalid Naciri, C. R. Mécanique 330 (2002) 153–158. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / deformed conduit / perturbations / velocity profile

Abridged English version

The incompressible viscous fluid flow in deformed axisymmetric tubes is a confined flow where one can control the level of convective acceleration terms in the Navier–Stokes equations. Indeed, the order of magnitude of these terms is directly related to the wall shape through the slope and curvature of the boundary [1–3].

For the flow in deformed axisymmetric tubes, these convective acceleration terms are directly related to the axial evolution of the longitudinal velocity profile.

It is proposed to give some characteristics of this evolution by developing analytical relations between the shape of velocity profiles and the wall equation. Furthermore, in the framework of flow control, a semi-analytic method is devised allowing to generate in a given section of the conduit an arbitrary velocity

Adresse e-mail : sijel@hotmail.com (M. Sijelmassi).

profile defined. This velocity profile is obtained by geometrical modification of walls of the conduit on a given length L . In this way, a perturbation is imposed to the upstream profile yielding the chosen velocity profile further downstream.

Section 2, summarizes the dimensionless equations for incompressible viscous fluid flow in deformed axisymmetric tubes. We then establish the perturbation linearised equations. In Section 3, we successively expose the principle of the method and the relationship between the shape of velocity profiles to wall equation. The method is finally illustrated in Section 4.

1. Introduction

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite rigide à parois déformées est l'un des cas où l'on peut maîtriser l'importance des termes d'accélération convective dans les équations de Navier–Stokes. Ces termes dont l'ordre de grandeur est directement lié à la pente et à la courbure de la paroi [1–3], traduisent une évolution axiale du profil de vitesse longitudinale.

On se propose de dégager certaines caractéristiques de cette évolution en reliant, à travers des expressions analytiques, les formes de profil de vitesse à l'équation définissant la paroi. Dans le cadre du contrôle de ces écoulements, on élabore une méthode semi-analytique permettant de générer à travers des modifications de géométrie, un profil de vitesse arbitraire préalablement défini dans une section donnée de la conduite. Ce profil est obtenu en modifiant sur une longueur L donnée, la forme de la paroi de la conduite pour créer des perturbations particulières du profil amont aboutissant à la génération du profil souhaité.

Le domaine de validité de l'approche proposée est limitée aux écoulements laminaires en conduite axisymétrique, pour lesquelles les hypothèses d'unidimensionnalité sont vérifiées [4,5]. Notons que la forme de la paroi introduit une échelle de longueur caractéristique pour l'écoulement dont la comparaison avec les autres échelles permet de dégager une modélisation adaptée à la situation que l'on souhaite étudier [6,7,4].

On rappelle dans la section 2 les équations adimensionnelles pour un écoulement axisymétrique d'un fluide newtonien incompressible dans une conduite cylindrique, rigide et déformée, puis on établit les équations aux perturbations linéarisées. Dans la section 3, on expose successivement le principe de la méthode développée et la relation qui lie les formes de profil de vitesse à l'équation définissant la paroi. La mise en œuvre de la méthode est effectuée dans la section 4.

2. Formulation

Dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on considère l'écoulement axisymétrique d'un fluide Newtonien incompressible dans une conduite cylindrique, rigide et déformée, d'équation $R = R(z)$ et d'axe z (figure 1). On introduit les quantités adimensionnelles suivantes :

$$r = \frac{\tilde{r}}{R_0}, \quad z = \varepsilon \frac{\tilde{z}}{R_0}, \quad v_z = \frac{\tilde{v}_z}{U_0}, \quad v_r = \frac{\tilde{v}_r}{\varepsilon U_0}, \quad p = \varepsilon \frac{R_0 \tilde{p}}{\nu \rho U_0}$$

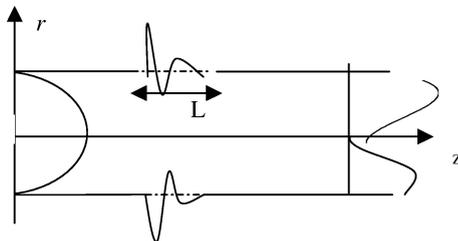


Figure 1. Géométrie du problème.

Figure 1. Problem geometry.

où \tilde{v}_r , \tilde{v}_z , \tilde{p} , ν et ρ sont respectivement les vitesses radiale et axiale, la pression, la viscosité cinématique et la masse volumique et où $\varepsilon = R_0/L_0$ est un paramètre de forme. R_0 , L_0 sont respectivement des dimensions caractéristiques radiale et axiale et U_0 représente une vitesse axiale typique. Pour $\varepsilon \ll 1$, on peut adapter un modèle d'écoulement unidimensionnel [5] et les équations de Navier–Stokes s'écrivent, en l'absence de forces volumiques, sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1c)$$

où $\text{Re} = \varepsilon(U_0 R_0/\nu)$ est le nombre de Reynolds.

Les conditions aux limites traduisant l'adhérence du fluide à la paroi et la symétrie par rapport à l'axe du conduit s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_r(R(z), z) = v_z(R(z), z) = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r}(0, z) = 0 \end{aligned}$$

Afin d'isoler dans le système d'équations (1) la contribution des termes correspondants à un profil de vitesse axiale de type parabolique, on introduit les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r}{R(z)} \\ V &= v_z R^2(z) \\ U &= R(z)v_r - \eta R R'(z)v_z \\ \pi' &= R^4(z) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Notons que ce type de transformation est utilisé par de nombreux auteurs dans le cadre de l'approche menée à grand nombre de Reynolds [8].

En tenant compte de ces transformations et sachant que l'écoulement à profil parabolique constitue l'écoulement de base dans le cadre de cette étude, on établit le système d'équations aux perturbations en notant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = V_p + v \\ U = u \\ \pi' = \pi'_p + P \end{array} \right.$$

où $V_p = 2(1 - \eta^2)$ et $\pi'_p = -8$ sont le profil de vitesse et le gradient de pression pour un écoulement à profil de vitesse axiale parabolique. Au cas où, en terme de perturbation, le rapport des échelles de longueurs caractéristiques axiale et radiale est de l'ordre du nombre de Reynolds [9], les équations aux perturbations peuvent être linéarisées. Elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right. \quad (2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left(u \frac{\partial V_p}{\partial \eta} + V_p \frac{\partial v}{\partial z} - 2 \frac{R'(z)}{R(z)} V_p^2 \right) = -P + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad (2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2c)$$

où $R'(z) = dR(z)/dz$.

En dérivant l'équation (2b) par rapport à η , on supprime le terme de pression et on obtient, en posant $z^* = z/\text{Re}$:

$$2(1 - \eta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial z^*} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] = \frac{32R'(z^*)}{R(z^*)} \eta (\eta^2 - 1) \quad (3)$$

Les conditions aux limites adimensionnelles traduisant l'adhérence, l'axisymétrie et la conservation du débit sont respectivement :

$$u(1, z^*) = v(1, z^*) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(0, z^*) = 0, \quad \int_0^1 \eta u(\eta, z^*) d\eta = 0$$

On remarque que l'équation (3) [3] est indépendante du nombre de Reynolds, ce qui signifie que dans le cadre de l'approche adoptée, les perturbations axiales du profil de vitesse sont indépendantes du nombre de Reynolds de l'écoulement à un changement d'échelle de longueur axiale près.

3. Principe de la méthode

La nature linéaire de l'équation (3) montre que si à une paroi $R_k(z^*)$ il correspond une solution en terme de perturbation de profil de vitesse $u_k(\eta, z^*)$, alors le profil $\alpha_k u_k(\eta, z^*)$ est généré par une paroi d'équation $R_k^{\alpha_k}(z^*)$. De plus, à un profil $u(\eta, z_s) = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k(\eta, z_s)$ dans une section particulière $z^* = z_s$, il correspond la paroi $R(z^*)$ vérifiant la relation :

$$\frac{R'(z^*)}{R(z^*)} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{R'_k(z^*)}{R_k(z^*)} \quad (4)$$

On en déduit par intégration de (4), que la paroi créant le profil $u(\eta, z_s) = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k(\eta, z_s)$ à la section z_s est donnée par l'expression :

$$R(z^*) = \prod_{k=1}^N R_k^{\alpha_k}(z^*) \quad (5)$$

Cette dernière propriété inhérente à la nature de l'équation (3) peut être exploitée en vue de répondre à la question suivante « quelle forme de paroi $R^* = R^*(z^*)$ faut-il se donner pour créer dans une section z_s de la conduite, une perturbation de profil de vitesse ayant une forme $f(\eta, z_s)$ préalablement défini ? ».

La méthode proposée consiste à générer un ensemble de N profils de vitesse $u(\eta, z_s)$ indépendants à partir d'une série de formes de parois $R_N(z^*)$. Les profils $u_N(\eta, z_s)$ sont alors orthogonalisés par le procédé de Gramm–Schmidt [10], ce qui permet d'obtenir pour la section z_s , une base orthogonale constituée de N fonctions $\psi_i(\eta, z_s)$ s'exprimant linéairement en fonction des $u_k(\eta, z_s)$. Le profil $f(\eta, z_s)$ est alors projeté sur cette base ; on obtient :

$$f(\eta, z_s) = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(\eta, z_s) \quad (6)$$

où les coefficients a_i sont calculées par projection de $f(\eta, z_s)$ sur la base $\psi_i(\eta, z_s)$.

Compte tenu de la relation liant les ψ_i aux u_k , on établit alors la relation :

$$f(\eta, z_s) = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k(\eta, z_s) \quad (7)$$

où les coefficients α_k sont connus. D'où l'on déduit la forme de paroi :

$$R^*(z^*) = \prod_{k=1}^{N^*} R_k^{\alpha_k}(z^*) \quad (8)$$

Ainsi, en se donnant un profil parabolique à l'entrée de la conduite et un profil cible à atteindre dans une section donnée, on détermine à l'aide de cette dernière relation la forme du conduit.

4. Résultats et discussion

A titre d'exemple, nous considérons la perturbation $f(\eta, z_s) = -5\eta^3 + 6\eta^2 - 1$, qui vérifie les conditions d'adhérence, d'axisymétrie et de débit nul.

Les formes de parois $R_{N^*}(z^*)$ sont :

$$R_N(z) = 1 + 0.2 \sin\left(\frac{2\pi(N-1)(z-z_1)}{z_3}\right)$$

où N est un entier. z_1 et z_2 sont des constantes définissant la zone de déformation de paroi.

Après résolution et en se limitant à $N^* = 6$, les coefficients α_k obtenus sont :

$$\alpha_1 = 56.6, \quad \alpha_2 = 745.8, \quad \alpha_3 = -13603.1, \quad \alpha_4 = 51701.3, \quad \alpha_5 = -68955.2, \quad \alpha_6 = 29932.7$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur la *figure 2*. La courbe en traits plein représente la perturbation $f(\eta, z_s)$, les symboles ronds représentent le profil obtenu par résolution numérique de l'équation (3) pour la paroi $R^*(z^*)$ calculée à partir de la relation (8). Les résultats obtenus sont en accord remarquable avec le profil exact.

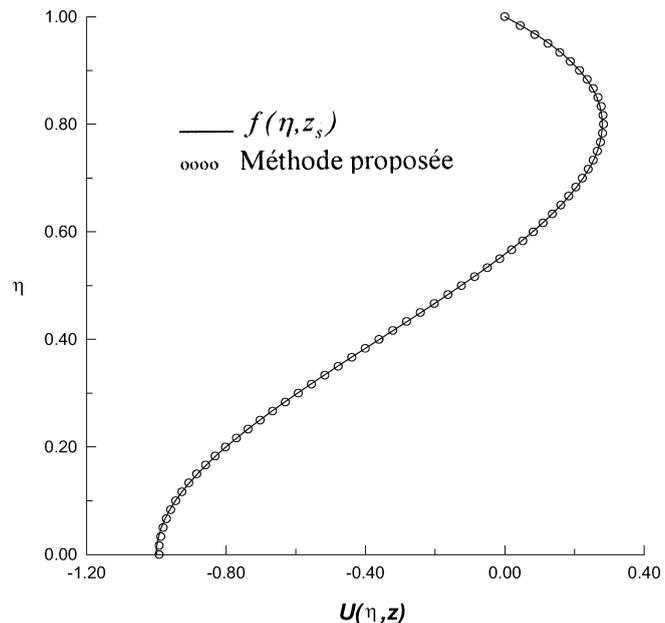


Figure 2. Visualisation des profils de vitesse pour :

$$f(\eta, z_s) = -5\eta^3 + 6\eta^2 - 1.$$

Figure 2. Visualisation of velocity profiles for: $f(\eta, z_s) = -5\eta^3 + 6\eta^2 - 1$.

Références bibliographiques

- [1] M. Friedman, Laminar flow in a channel with a step, *J. Engrg. Math.* 6 (1972) 285–290.
- [2] J.R. Stocker, P.W. Duck, Stationary perturbations of Couette–Poiseuille flow: the flow development in long cavities and channels, *J. Fluid Mech.* 292 (1995) 153–182.
- [3] A. Benjelloun, Sur l'étude analytique de l'écoulement dans une conduite déformée. *Mécanique des fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIB 327 (1999) 759–764.
- [4] Z. Doulfoukar, M. Ouazzani Touhami, J. Khalid Naciri, M. Zagzoule, Méthode numérique pour la résolution de l'écoulement d'un fluide viscoélastique en conduite à paroi déformable, *J. Phys. III* 6 (1996) 433–442.
- [5] J. Khalid Naciri, Contribution à la modélisation d'écoulements instationnaires en tubes déformables, Thèse d'état, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1987.
- [6] A. Achiq, Sur l'analyse conduisant à la théorie de la triple couche. *Mécanique des fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 315 (1992) 1611–1614.
- [7] B.E. Morgan, D.F. Young, An integral method for the analysis of flow in arterial stenoses, *Bull. Math. Biol.* 36 (1974) 39–53.
- [8] S. Saintlos, Structure de couche limite pour des écoulements en canaux ou conduites à grands nombres de Reynolds, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1992.
- [9] A. Achiq, Sur la structure en triple couche, Application à l'analyse du sillage en écoulement confiné, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1992.
- [10] A. Nikiforov, V. Ouvarov, *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*, Moscou, 1968.