

# Evaluation a priori d'un modèle non-linéaire de turbulence

Omar El Yahyaoui, Gilmar Mompean, Hassan Naji

Laboratoire de mécanique de Lille, LML URA CNRS 1441, École universitaire d'ingénieurs de Lille, USTL, cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 11 septembre 2001 ; accepté après révision le 24 octobre 2001

Note présentée par Olivier Pironneau.

---

## Résumé

Le but de ce travail est l'évaluation *a priori* et l'amélioration des performances d'un modèle non-linéaire de turbulence à partir d'une simulation directe des équations de Navier–Stokes. Le modèle algébrique explicite non-linéaire récemment mis au point par Rumsey C.L. et al. [1] est étudié. Les résultats de la simulation directe d'un écoulement turbulent dans une conduite de section carrée sont utilisés. Pour ce type d'écoulement, cette étude confirme que l'hypothèse d'équilibre du tenseur anisotropique utilisée pour le développement des modèles de turbulence est valable. L'analyse est réalisée en utilisant la carte des second et troisième invariants du tenseur de Reynolds. La démarche utilisée montre que le modèle utilisé avec la fonction de paroi améliore la prédiction de l'anisotropie. Pour citer cet article : O. El Yahyaoui et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 27–34. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des fluides / mécanique des fluides numérique / turbulence / modèles non-linéaires**

## A priori evaluation and improvement of a non-linear model for turbulent flows

## Abstract

The aim of this work is *a priori* evaluation and improvement of a non-linear model for turbulent flows using the results from direct numerical simulation of Navier–Stokes equations. The algebraic explicit non-linear model recently proposed by Rumsey C.L. et al. [1] is studied. The data base used here comes from a direct numerical simulation of a turbulent flow through a square duct. For this flow, this study shows that the hypothesis of equilibrium state for the anisotropic tensor is correct. The analysis is made using the maps of the second and third invariants of the Reynolds stress tensor. The approach used permits to conclude that the model using a wall function improves the numerical prediction of the anisotropy. To cite this article: O. El Yahyaoui et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 27–34. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fluid mechanics / computational fluid mechanics / turbulence / non-linear models**

---

## *Abridged English version*

The evaluation of turbulent models is a subject of great scientific and industrial interest. Numerical simulation of turbulent flows at high Reynolds numbers is a challenge today. Three kinds of approaches

---

Adresse e-mail : gilmar.mompean@eudil.fr (G. Mompean).

are mainly employed: (a) RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes equations), (b) LES (Large Eddy Simulation) and (c) DNS (Direct Numerical Simulation). The DNS approach of the Navier–Stokes equations is limited for flows at low Reynolds numbers ( $\sim 10,000$ ) in simple configurations such as ducts, plan channels and cavities. This limit is imposed by the power of computers (memory and speed) because we have to solve the flow up to the Kolmogorov scale in order to respect the energy cascade spectrum of turbulence. This represents a large system given by the discretized Navier–Stokes equations in space and time. For engineering applications, this approach is too expensive and therefore the RANS equations are mostly used. The major problem, when using the RANS approach, is the choice of a good turbulence model in order to capture the physics of turbulence.

The numerical *a posteriori* evaluation of turbulence models for RANS equations is a difficult task and can give erroneous results. This uncertainty is related with grid-resolution effects, convergence errors and, most significantly, the consequences of the chosen boundary conditions. In the present work, the *a priori* evaluation of the model used with the RANS equations is done using the data from a direct simulation of a low Reynolds number turbulent flow. This *a priori* approach is illustrated in Fig. 1. The data from the DNS are supplied at the non-linear model and their predictions are tested against the DNS data. This is done using the same mesh of the direct simulation. The values obtained for the Reynolds stress components are compared with the DNS. It shows the compatibility of the turbulence model with the results from the Navier–Stokes equations.

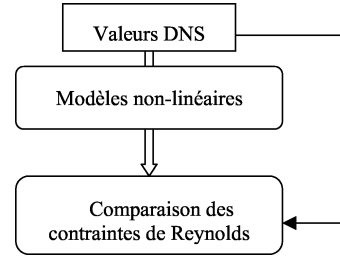
The data obtained by Gavrilakis [2] with the direct numerical simulation of a flow through a straight square duct is used in this study. The Reynolds number based on the averaged velocity and on the height of the duct is 4800. The maximum Komogorov scale is  $1,5\nu/u_\tau$ . This flow has been chosen because it presents a secondary flow and the anisotropy between the Reynolds stress components is important. These physical characteristics are very useful to test non-linear algebraic models, as it is well known that linear eddy viscosity models are unable to predict anisotropy and secondary flows. The model chosen for this study is a recent model devised by Rumsey et al. [1]. The explicit model is obtained using the expansion of polynomial basis.

In order to construct algebraic models, several authors – Rodi [7], Gatski and Rumsey [4] – have employed an equilibrium hypothesis of the anisotropic Reynolds stress tensor, i.e.  $Db_{ij}/Dt = 0$ . Using DNS data, it is shown that in the present work, the above hypothesis is valuable for the considered flow. Contour values of  $Db_{11}/Dt$  and  $Db_{22}/Dt$  are illustrated respectively in Figs. 2a and 2b. The values of these quantities are negligible when compared with the others terms present in equation (5). To compensate the low Reynolds number effect due to the walls, we introduce a wall function. The DNS results are compared with the ASM results, with and without wall function, for the Reynolds stress profiles (see Fig. 3). We can see clearly that the results obtained using the proposed wall function  $f_\mu = 1 - a \exp(-bz^+)$  are in better agreement with the DNS. The values of the constants  $a$  and  $b$  for this case are shown in Table 1. The map of second versus third invariant of the anisotropic Reynolds stress tensor (**b**) is presented in Fig. 4. The anisotropy is also better represented using the wall function. In light of these results we can conclude that the ASM model studied here and coupled with the proposed wall function is adequate to predict the anisotropy and the secondary flow through square ducts. Future numerical simulations using the RANS equations will be done in order to check these *a priori* results.

## 1. Introduction

L'évaluation des modèles non-linéaires de turbulence permettant de fermer les équations de Reynolds moyennées (RANS) qui gouvernent les écoulements turbulents de fluides incompressibles présente beaucoup de difficultés dues à la complexité des hypothèses physiques faites pour assurer la fermeture de ces équations. Ceci provient du fait que les prédictions des modèles contiennent, en plus des effet

**Figure 1.** Schéma du test *a priori*.  
**Figure 1.** Scheme for the *a priori* test.



physiques, des erreurs dues au maillage, des erreurs de convergence et les effets explicites ou implicites des conditions aux limites. Ces considérations illustrent qu’une évaluation *a posteriori* des modèles de turbulence demeure incertaine. Malgré ces réserves, l’évaluation des hypothèses de fermeture de la turbulence peut fournir d’excellents résultats rationnels par application de tels modèles. L’utilisation de cette démarche semble aussi réduite car, en général, les divers modèles de turbulence mis en œuvre sont appliqués, sans modifications, à des écoulements de natures différentes. Néanmoins, leur modélisation correcte permet d’assurer une bonne représentation d’un écoulement turbulent homogène ou non. Parmi les modèles non-linéaires de turbulence, Rumsey et al. [1] ont proposé récemment un modèle explicite à contraintes algébriques (EASM) dont les coefficients polynomiaux sont directement reliés aux coefficients de fermeture utilisés dans l’équation tensorielle des contraintes de Reynolds. Ce modèle fait l’hypothèse d’une action à la fois sur les composantes linéaires et non-linéaires des contraintes turbulentes. C’est ce modèle que nous considérons ici en vue de procéder à des comparaisons *a priori* avec des résultats de simulations numériques directes de Gavrilakis [2] dans une conduite à section carrée. L’objectif principal de ce travail est la vérification de l’hypothèse d’équilibre employée dans la fermeture de l’explicitation des modèles algébriques non-linéaires. Cette étude vient en continuation des travaux concernant les tests *a priori* des modèles de turbulence [3].

La démarche utilisée est illustrée sur la Fig. 1. Les valeurs moyennes du champ de vitesse et des grandeurs turbulentes (énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation) issues de la simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier–Stokes sont injectées dans les relations explicites algébriques non-linéaires (i.e. membre de droite de l’équation (6)). Pour le cas étudié, le test *a priori* est réalisé en utilisant le même maillage que la simulation directe pour le plan normal à la direction principale de l’écoulement. En effet, l’écoulement dans le canal à section carrée est périodique dans la direction principale et un maillage bidimensionnel est suffisant pour cette étude. Les valeurs obtenues avec cette procédure sont comparées avec les résultats de la simulation directe pour toutes les composantes du tenseur de Reynolds. Ceci montre la compatibilité du modèle de turbulence avec les résultats issus de la simulation directe des équations de Navier–Stokes.

## 2. Modélisation algébrique des contraintes

Dans cette section le modèle utilisé est présenté brièvement ; pour plus de détails concernant la dérivation de ce modèle, le lecteur pourra consulter les références [1,4,5] et [6]. Les modèles algébriques des contraintes (ASM) reposent sur l’équation tensorielle de transport modélisée des contraintes de Reynolds qui peut s’écrire sous la forme [1] :

$$\frac{1}{2k} \left[ \frac{D\tau_{ij}}{Dt} - \frac{\tau_{ij}}{k} \frac{Dk}{Dt} \right] - \frac{1}{2k} \left( D_{ij} - \frac{\tau_{ij}}{k} D \right) = -\frac{b_{ij}}{a_4} - a_3 \left( b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + a_2 (b_{ik} W_{kj} - W_{ik} b_{kj}) - a_1 S_{ij} \quad (1)$$

où  $b_{ij} = (\tau_{ij} - 2/3k\delta_{ij})/2k$  est le tenseur d’anisotropie adimensionnel,  $\tau_{ij}$  est le tenseur de Reynolds,  $k = \tau_{nn}/2$  est l’énergie cinétique turbulente,  $D_{ij}$  est le tenseur de transport turbulent et de diffusion

de  $\tau_{ij}$ ,  $D = D_{nn}/2$ ,  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$  est le tenseur taux de déformation moyen et  $W_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i/\partial x_j - \partial U_j/\partial x_i)$  est le tenseur taux de rotation moyen.

Les coefficients  $a_i$  sont directement reliés aux coefficients  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , relatifs au modèle linéaire de fermeture des termes de corrélation pression-déformation  $\Pi_{ij}$  [5] :

$$a_1 = \frac{4/3 - C_2}{2}, \quad a_2 = \frac{2 - C_4}{2}, \quad a_3 = \frac{2 - C_3}{2}, \quad a_4 = \frac{gk}{\varepsilon} \quad (2)$$

$$g = \left[ \left( \frac{1}{2}C_1^0 + 1 \right) \left( \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}C_1^1 - 1 \right]^{-1} = \left[ \gamma_0 \left( \frac{P}{\varepsilon} \right) + \gamma_1 \right]^{-1} \quad (3)$$

avec  $C_1^0 = 3,4$ ;  $C_1^1 = 1,8$ ;  $C_2 = 0,36$ ;  $C_3 = 1,25$ ;  $C_4 = 0,4$ .

Les quantités  $P$  et  $\varepsilon$  sont respectivement les taux de production et de dissipation isotrope de l'énergie cinétique de turbulence. En supposant que le rapport  $\tau_{ij}/k$  évolue très lentement, on peut écrire (cf. Rodi [7]) :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0 \quad \text{et} \quad D_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{k} D \quad (4)$$

Ces hypothèses seront vérifiées et justifiées dans la suite de ce travail (voir paragraphe 4).

Par conséquent, l'équation (1) devient :

$$-\frac{b_{ij}}{a_4} - a_3 \left( b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + a_2 (b_{ik} W_{kj} - W_{ik} b_{kj}) = a_1 S_{ij} \quad (5)$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, on montre que le modèle algébrique explicite (EASM) des contraintes de Reynolds est donné par [4] :

$$\tau = \frac{2}{3} k I + 2k \alpha_1 \left[ S + a_2 a_4 (S W - W S) - 2a_2 a_4 \left( S^2 - \frac{1}{3} \{S^2\} I \right) \right] \quad (6)$$

où le symbole  $\{ \}$  représente la trace et  $\alpha_1$  est la racine du polynôme du troisième ordre suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 \alpha_1^3 - \frac{\gamma_0 \gamma_1}{\eta^2 (k/\varepsilon)} \alpha_1^2 + \frac{1}{4\eta^4 (k/\varepsilon)^2} \left[ \gamma_1^2 - 2 \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \gamma_0 a_1 \eta^2 - 2\eta^2 \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \left( \frac{a_3^2}{3} + \frac{\{W^2\}}{\{S^2\}} a_2^2 \right) \right] \alpha_1 \\ + \frac{\gamma_1 a_1 \eta^2}{4\eta^6 (k/\varepsilon)} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

où l'invariant  $\eta^2$  est défini par :  $\eta^2 = \{S^2\}$ .

En suivant l'analyse asymptotique de Jongen et Gatski [6], il apparaît que la solution de cette équation correspond à la racine dont la partie réelle est la plus petite.

Il est à noter que ce modèle algébrique explicite qui fait intervenir des bases tensorielles fonctions de  $S$  et  $W$  n'est pas objectif, car le taux de rotation moyen  $W$  ne l'est pas. Afin de le rendre objectif, le taux de rotation absolu  $\overline{W}$ , défini par :  $\overline{W} = W - \Omega$  doit être utilisé (voir [1]),  $\Omega$  étant le taux de rotation des directions principales du tenseur taux de déformation  $S$ . Dans notre cas, l'écoulement étudié ne présente pas un très fort taux de rotation, puisque la vitesse moyenne de l'écoulement secondaire (normal à la direction principale) est de l'ordre de 1 % de la vitesse moyenne de l'écoulement principal. Dans cette contribution, on suppose alors que  $\overline{W} \simeq W$ .

### 3. Simulation numérique directe (DNS)

La validité du modèle EASM retenu dans cette étude a été testée par comparaison avec les résultats de simulations numériques directes obtenus par Gavrilakis [2] dans le cas d'un écoulement turbulent tridimensionnel et périodique dans une conduite de section carrée, configuration qui a fait l'objet de nombreuses études, tant expérimentales que numériques. Dans le cadre de ces simulations, les équations de Navier–Stokes sont discrétisées spatialement à l'aide d'un schéma mixte basé sur des différences finies pour

les variables de l'écoulement selon les directions  $(y, z)$  et sur des développements en série de Fourier selon la direction principale  $x$  de l'écoulement moyen. La discrétisation temporelle s'appuie sur une méthode d'Adams–Basforth du second ordre. Ce choix permet de calculer toutes les échelles de temps convectives et visqueuses des simulations et d'assurer que les erreurs dues aux pas de temps sont négligeables.

Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne  $\overline{U}_m$  de l'écoulement et sur la hauteur de la conduite  $2h$ ,  $Re = \overline{U}_m 2h/\nu$ , est égal à 4800,  $\nu$  étant la viscosité cinématique. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement ( $u_\tau$ ),  $Re^+ = u_\tau 2h/\nu$ , vaut 320. Le rapport entre les vitesses  $\overline{U}_0$  (vitesse maximale au centre) et la vitesse moyenne  $\overline{U}_m$  est  $\overline{U}_0/\overline{U}_m = 1,33$ . Un maillage non uniforme très fin au voisinage des parois, respectant l'échelle de Kolmogorov ( $1,5\nu/u_\tau$ ), est utilisé. Celui-ci comporte 127 nœuds dans les directions axiale  $z$  et horizontale  $y$ . Pour plus de détails concernant la simulation directe le lecteur pourra voir [2].

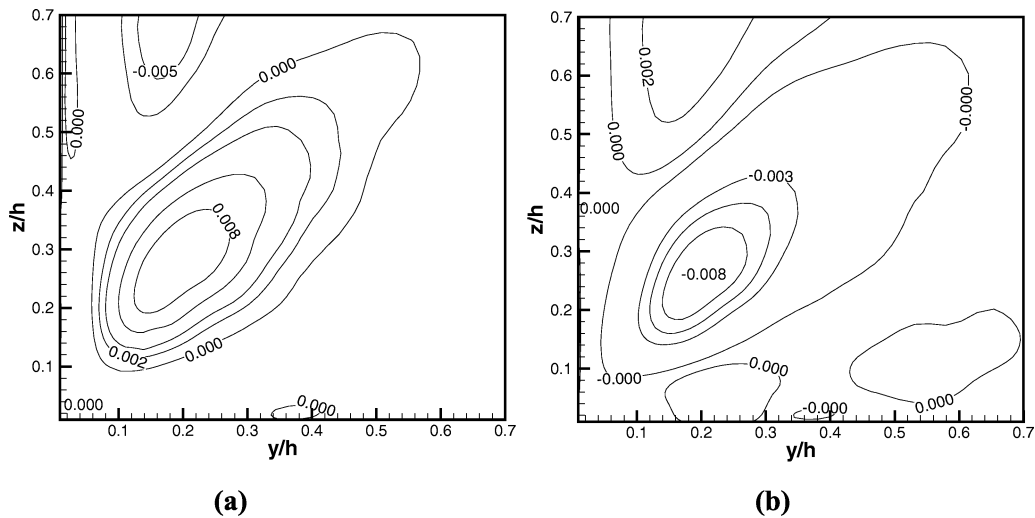
#### 4. Résultats et comparaisons

Afin de vérifier l'hypothèse d'équilibre  $Db_{ij}/Dt = 0$ , utilisée dans l'élaboration de plusieurs modèles de turbulence, on présente sur la Fig. 2 les cartes avec les contours de  $Db_{11}/Dt$  et  $Db_{22}/Dt$ . On constate que ces valeurs sont négligeables par rapport aux autres termes du modèle validant ainsi cette hypothèse. L'évaluation des différents termes de la relation (1) permet de mettre en évidence un écart important entre les valeurs maximales des composantes de  $Db_{11}/Dt$  et de  $b_{11}/a_4$  ( $Db_{11}/Dt = 0,008$ ;  $b_{11}/a_4 = 25$ ). Par exemple, la comparaison entre  $Db_{22}/Dt$  et  $a_1 S_{22}$  montre que ce dernier est quatre fois plus grand que  $Db_{22}/Dt$ .

**Tableau 1.** Valeurs des constantes  $a$  et  $b$  de la fonction d'amortissement ( $f_\mu$ ).

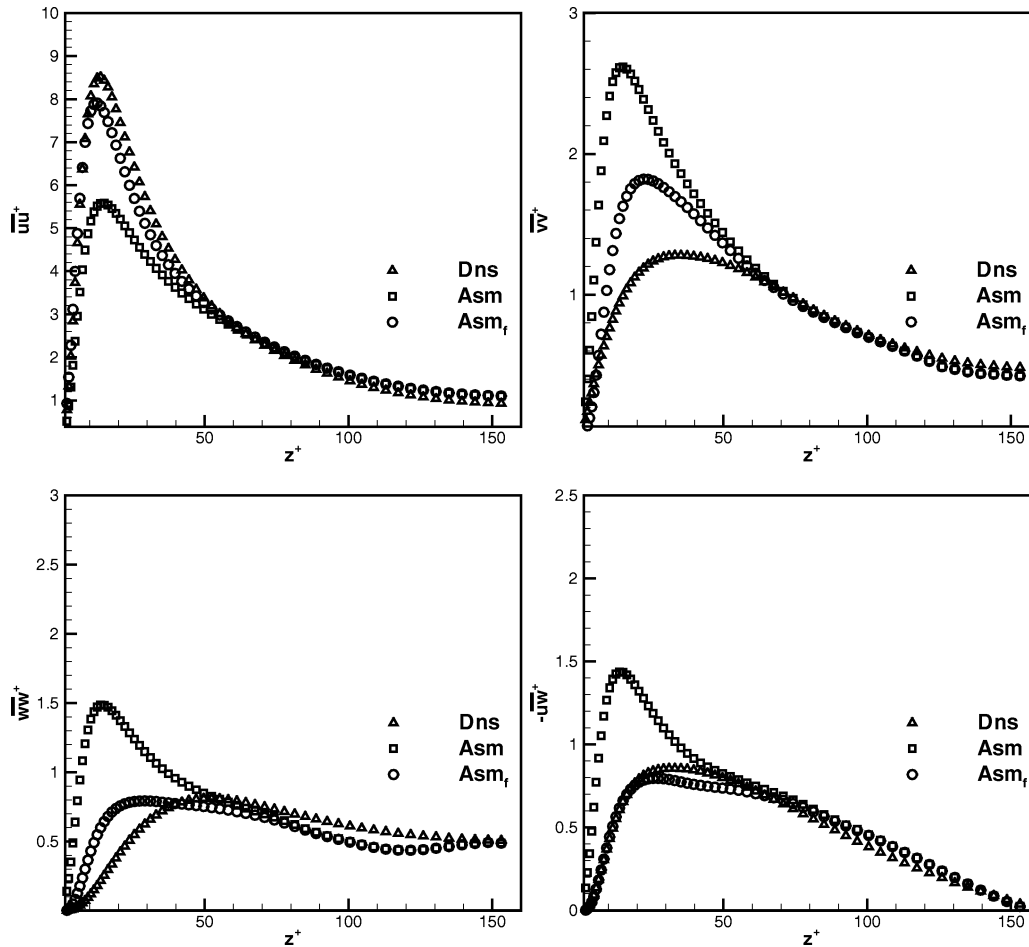
**Table 1.** Values of constants  $a$  and  $b$  used in the wall function ( $f_\mu$ ).

	$\overline{u^2}/u_\tau^2$	$\overline{v^2}/u_\tau^2$	$\overline{w^2}/u_\tau^2$	$-\overline{uw}/u_\tau^2$
$a$	-2,16	-4,00	-0,95	1,10
$b$	0,06	0,006	0,045	0,047



**Figure 2.** Cartes de  $Db_{11}/Dt$  (a) et  $Db_{22}/Dt$  (b).

**Figure 2.** Contours  $Db_{11}/Dt$  (a) et  $Db_{22}/Dt$  (b).



**Figure 3.** Comparaison des profils des contraintes de Reynolds obtenus avec le modèle ASM et la DNS. Asm : modèle ASM sans fonction correctrice ; Asm<sub>f</sub> : modèle ASM avec fonction correctrice.

**Figure 3.** Comparison between Reynolds stress profiles obtained with the ASM model and DNS. Asm: model without wall function; Asm<sub>f</sub>: model with wall function.

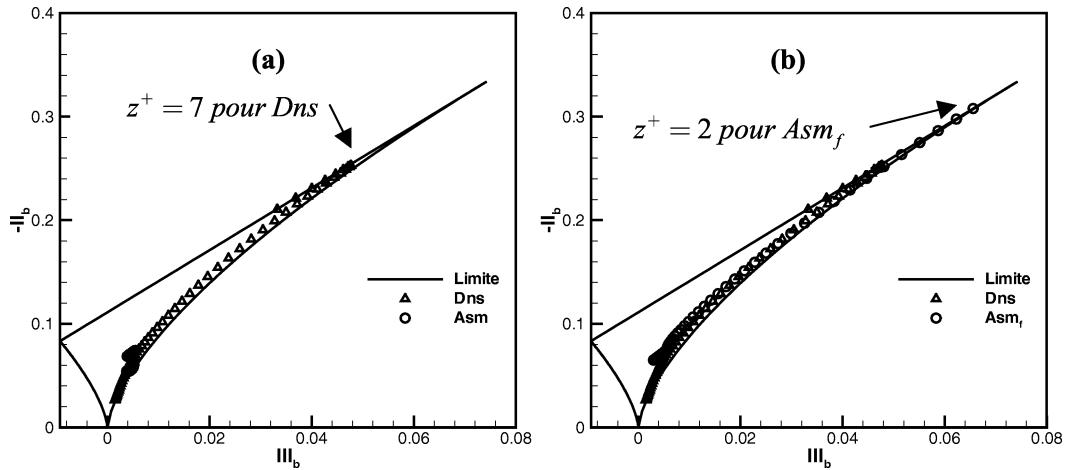
Les courbes de la Fig. 3 présentent l'évolution des tensions normales  $\overline{u_i^2}/u_\tau^2$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et de cisaillement turbulent  $-\overline{u'w'}/u_\tau^2$  en fonction de la distance en unités de paroi  $z^+$  le long de  $y/h = 0,9$ .

La comparaison des résultats obtenus montre que ceux-ci sont en bon accord avec les simulations pour  $z^+ \geq 60$ , tandis que des différences subsistent près de la paroi. Sur cette figure, on constate aussi que, d'une part le modèle sous-estime le maximum de la tension  $\overline{u^2}/u_\tau^2$  par rapport aux simulations directes et que d'autre part, il sur-estime le maximum des autres contraintes de Reynolds. Afin de mieux prédire ces grandeurs, nous avons introduit les fonctions correctrices suivantes qui prennent en compte des effets de paroi :

$$f_\mu = 1 - a \exp(-bz^+)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes données dans le Tableau 1.

La démarche ainsi adoptée (voir Fig. 3) montre que ces fonctions permettent de reproduire les tensions de Reynolds de façon satisfaisante. Pour mettre en évidence l'anisotropie de l'écoulement, on trace l'évolution du second invariant  $\text{II}_b$  en fonction du troisième invariant  $\text{III}_b$  du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ . Ces invariants



**Figure 4.** Carte des second et troisième invariants, comparaison avec les simulations numériques directes de Gavrilakis [2]; (a) modèle ASM sans fonction correctrice; (b) modèle ASM avec fonction correctrice.

**Figure 4.** Maps of second and third invariants along the wall bisector, comparison with DNS from Gavrilakis [2]. (a) model without wall function; (b) model with wall function.

sont définis respectivement par :  $II_b = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji}$  et  $III_b = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki}$ . Les courbes correspondantes sont tracées sur la Fig. 4. On constate que les résultats ainsi obtenus avec le modèle qui utilise la fonction de paroi sont en très bon accord avec la simulation directe. Le modèle sans correction donne la valeur maximale pour  $III_b = 0,006$  (voir Fig. 4a). Pour le modèle avec correction, les résultats sont nettement améliorés. En effet, on observe qu'au delà de  $III_b = 0,006$ , les évolutions de l'anisotropie sont en bon accord avec la simulation directe (Fig. 4b). Elles s'écartent légèrement de la limite qui caractérise une turbulence axisymétrique et les différences observées sont, dans l'ensemble, peu importantes. Il ressort de nos calculs que l'introduction des fonctions d'amortissement semble suffisante pour la prédiction d'un tel écoulement.

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'aptitude d'un modèle de turbulence [1] non-linéaire à contraintes algébriques à prédire un écoulement turbulent tridimensionnel de fluide incompressible dans une conduite carrée, configuration qui présente une anisotropie entre les composantes du tenseur de Reynolds. D'autre part cette configuration présente un écoulement secondaire. A partir des résultats d'une simulation numérique directe [2] pour cet écoulement, et l'utilisation des tests *a priori* du modèle ASM, on montre que l'hypothèse d'équilibre utilisée ( $D\mathbf{b}/Dt = 0$ ) dans la construction des modèles algébriques est bien valable. On propose également une fonction correctrice pour prédire les effets visqueux importants dus à la présence de la paroi et du coin pour cette configuration géométrique. A la lumière des résultats obtenus, on peut conclure que le modèle ASM considéré ici avec la fonction correctrice est bien adapté à la simulation d'écoulements turbulents en conduite. De futurs travaux seront réalisés concernant des tests *a posteriori* avec les équations de Navier–Stokes sur la forme moyenne.

## Références bibliographiques

- [1] Rumsey C.L., Gatski T.B., Morrison J.H., Turbulence model predictions of strongly curved flow in a U-duct, AIAA J. 38 (2000) 1394–1402.
- [2] Gavrilakis S., Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct, J. Fluid Mech. 244 (1992) 101–129.

- [3] Mompean G., Gavrilakis S., Machiels L., Deville D., On predicting the turbulence-induced secondary flows using non-linear  $k - \varepsilon$  models, *Phys. Fluids* 8 (7) (1996) 1856–1868.
- [4] Gatski T.B., Rumsey C.L., in: Launder B.E., Sandham N.D. (Eds.), *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, Cambridge University Press, 2001, pp. 9–46.
- [5] Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B., Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach, *J. Fluid Mech.* 227 (1991) 245–272.
- [6] Jongen T., Gatski T.B., General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows, *Int. J. Engrg. Sci.* 36 (1998) 739–763.
- [7] Rodi W., A new algebraic relation for calculating the reynolds stresses, *ZAMM* 56 (1976) T219–T221.