C. R. Mecanique 330 (2002) 35–38

Écoulement cisaillé non visqueux autour d'un cylindre proche d'une paroi

Emmanuel Dériat [a,b]

[a] SNCF, Direction de la recherche et de la technologie, 45, rue de Londres, 76008 Paris, France

[b] 21, cité Leclaire, 75020 Paris, France

Reçu le 24 septembre 2001 ; accepté le 3 décembre 2001

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé Cette Note présente la fonction de courant de l'écoulement bidimensionnel et de fluide parfait autour d'un cylindre circulaire placé à proximité d'une paroi, résultant de la perturbation d'un profil de vitesse cisaillé variant linéairement avec la distance à la paroi. L'obtention d'une telle solution s'appuie sur la méthode dite du *système des singularités images* et d'une adaptation du théorème du cercle de Milne-Thomson. Pour citer cet article : E. Dériat, C. R. Mecanique 330 (2002) 35–38. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / cisaillement / effet de sol / cylindre / écoulement potentiel

Inviscid shear flow around a cylinder close to a wall

Abstract This Note gives the stream function of a 2D inviscid flow around a circular cylinder close to a wall, induced by the perturbation of an upstream linear shear flow. The derivation of such an explicit solution relies on the *image singularity system* method and a slight extension of Milne-Thomson's circle theorem. To cite this article: E. Dériat, C. R. Mecanique 330 (2002) 35–38. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / shear flow / cylinder / ground effect / potential flow

Abridged English version

1. Ground effect and strong shear upstream flow are specific to ground vehicle aerodynamics, compared with flying vehicle aerodynamics. These two particularities have been already, but separately, tackled, by Taylor [1], who was interested in a flow which is not irrotational, and by Milne-Thomson [2], who gave the formula ruling the complex potential of a uniform flow perturbed by a circular cylinder close to a wall. Nonetheless, both effects have not been taken into account together yet, via an exact approach. What is the justification of our fluid mechanics framework and which are the main difficulties? The inviscid flow hypothesis is less questionable than it would be if the body were streamlined, although the difficulty linked to separation is not dealt with here. A linear dependency with respect to the wall distance of the upstream velocity could be viewed as an approximation for the logarithmic atmospheric boundary layer profile. Thanks to *Lagrange's theorem,* the vorticity being constant upstream, is constant everywhere, since there is no separation. Besides, it is easy to recover an irrotational flow via a change of variable. However, the presence of the wall a priori invalidates the use of the *circle theorem,* due to Milne-Thomson [3]. This

S1631-0721(02)01426-2/FLA

last fact leads to the *image singularity system*, a term which is used by Lee [4]. In this Note, we first describe the construction of a stream function, transforming the wall into an *admissible* wall, using a concept defined by Levin [5]; then, we verify that all the boundary conditions are satisfied.

2. The flow is 2D and incompressible: a stream function then exists, not unique since the domain is not simply connected. We then have, $\Delta\psi = 2\omega$, recognising the Laplace operator, the stream function and the vorticity. The condition at infinity is given in (1), where u and v stand for the longitudinal and normal to the wall velocity components. The wall is defined by, $y = 0$, and the circle by, $|z - \mathrm{i}b| = a$, where, $z = x + \mathrm{i}y$, denotes the complex variable; of course, a refers to the radius and, $b > a$, holds. The condition (1) reads as in (2), the overbar designating the complex conjugate. In order to construct the stream function, we introduce, $Z = z - \mathrm{i}b$, and we start from (2), using (5). Each of the first four terms generates a sequence, by the *circle theorem*. Other four sequences are generated by the four singularities induced by the symmetric flow of the one given by (1) within the symmetric circle. Finally, the stream function reads as in (3), $\Re$ and $\Im$, standing for the real part and the imaginary part. The sequence given in (4) is such that,

$$|b_{n+1} - b_n| \leqslant \frac{b}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n},$$

it goes to $h = \sqrt{b^2 - a^2}$, at infinity. We recognise the one found by Milne-Thomson [2] and by Dragos and Marcov [6]. The last term, proportional to Γ, denoting the circulation, has been simply written from Dragos and Marcov [6].

To conclude, we first have to show that the two series converge. Indeed, the modulus of the general terms of each series is bounded by $K|b_{n+1} - b_n|$, where K is a constant, which implies that the series are normally convergent. All the terms but the first one tend to zero at infinity, which infers that condition (2) is filled. If, $z = \overline{z} = x$, it is easy to prove that ψ is zero. At last, to prove that, $|z - \mathrm{i}b| = a$, is a streamline, we begin with (5). Keeping in mind that, $z - \mathrm{i}b = a^2/(\overline{z} + \mathrm{i}b)$, we get formulae (6), and their square, which leads to the cancellation of all the terms, two by two.

---

1. L'aérodynamique des véhicules roulants, comparée à celle des véhicules volants, présente cette particularité que ni l'influence du sol, ni l'importante variation verticale du vent, ne peuvent être banalement laissées de côté. Ces deux thèmes ne sont certes pas absents de la littérature produite en mécanique des fluides, Taylor [1] ne traite-t-il pas déjà d'un écoulement non irrotationnel, de fait cisaillé et liméaire, autour du seul cylindre, et Milne-Thomson [2] ne propose-t-il pas une formule explicite pour intégrer l'influence du sol sur l'écoulement uniforme autour du cylindre ? Pourtant, la combinaison des deux effets, du cisaillement et du sol, restait, à notre connaissance, inexplorée, par voie analytique tout du moins.

Quelle est d'abord la pertinence d'une telle approche et quelle en sont ensuite les difficultés propres ? L'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait tire une certaine légitimité du fait du caractère non profilé de l'obstacle, le cylindre circulaire, bien que la question de la séparation, qui a été ici exclue, soit l'étape sérieuse, nécessaire, suivante. L'allure cisaillée linéaire du profil de vitesse amont tient lieu, pour fixer les idées, d'approximation de l'évolution logarithmique caractéristique de la couche limite atmosphérique ; le cisaillement retenu rend compte d'un effet d'écoulement visqueux (à vrai dire turbulent), de même que *l'hypothèse de Joukowsky* de non contournement du bord de fuite d'un profil traduit, en fluide parfait, un effet d'écoulement visqueux. D'après le *théorème de Lagrange*, le rotationnel de la vitesse, étant constant à l'amont, reste constant dans tout le champ de l'écoulement, ce qui suggère qu'il est facile de se ramener au cas irrotationnel. En revanche, la présence d'une paroi, autre que celle du cylindre, invalide a priori l'application du *théorème du cercle* dû à Milne-Thomson [3]. Revenons sur ce point qui mène assez naturellement à la notion de *système de singularités images*, selon l'expression empruntée à Lee [4].

Le potentiel complexe, résultant de l'introduction d'un cylindre circulaire, de rayon a, au sein d'un écoulement dont le potentiel est donné par $f(z)$, s'écrit simplement, $F(z) \equiv f(z) + \bar{f}(a^2/z)$, où la barre supérieure désigne, classiquement, le complexe conjugué, mais ici cette notation signifie que l'on a d'abord pris le conjugué de $f(x)$, avec x réel, puis remplacé x par a^2/z. Les deux conditions, précise-t-il, sont, d'une part, qu'aucune singularité du potentiel initial ne soit située à l'intérieur du cercle que l'on introduit, et, d'autre part, qu'aucune autre paroi n'existe [3]. Levin [5] nuance cette dernière restriction en définissant les notions de paroi « généralement admissible » ou « conditionnellement admissible ». Dans notre cas, une droite du plan n'est pas *admissible*. De surcroît, le cisaillement, caractérisant le flot amont, induit une singularité dans tout le plan : la fonction qui à un nombre complexe associe son conjugué n'est en effet nulle part holomorphe.

Tout d'abord, nous décrivons la construction de la fonction de courant recherchée, qui rend, bien sûr, *admissible* une paroi rectiligne. Ensuite, nous vérifions que la formule proposée convient.

2. L'écoulement est bidimensionnel et incompressible : l'existence d'une fonction de courant est donc assurée, certes définie de manière non unique puisque le domaine d'étude n'est pas simplement connexe, du fait de la présence du cercle. Ce ne sera qu'à l'occasion de l'explicitation finale de la fonction de courant, que nous préciserons le terme dû à la circulation, celui-ci ayant déjà été proposé par Dragos et Marcov [6]. Le fluide est parfait et non pesant, le rotationnel de la vitesse, non perturbée, est constant. La séparation étant exclue, nous avons, en tout point de l'écoulement : $\Delta\psi = 2\omega$, reconnaissant successivement l'opérateur laplacien, la fonction de courant, et la vorticité. Utilisant le plan de la variable complexe, notée, $z = x + \mathrm{i}y$, l'équation de Poisson qui précède s'intègre en : $\psi = \omega z\overline{z}/2 + f(z) + \bar{f}(\overline{z})$. Le premier de ces trois termes reste constant sur tout cercle centré à l'origine. Notre condition à l'infini est, par hypothèse :

$$\forall y \geqslant 0, \quad |x| \to \infty : u = \omega y, \quad v = 0, \tag{1}$$

où u et v, figurent les composantes, longitudinale et verticale, de la vitesse. Cette condition ne peut donc être remplie par le seul premier terme, $\omega z\overline{z}/2$. Cela signifie que les deux autres termes pour ψ doivent entrer en jeu pour assurer la condition à l'infini, et donc qu'une singularité de type $\overline{z}$ apparaît au sein même de la fonction de courant non perturbée. En conséquence, nous laisserons de côté l'équation de Poisson et la solution générale proposée pour construire plutôt une solution à partir de la condition à l'infini. La condition (1) est remplacée par :

$$\forall y \geqslant 0, \quad |x| \to \infty : \psi = -\frac{\omega\left(z - \overline{z}\right)^2}{8}. \tag{2}$$

Précisons aussi que la paroi correspond à y nul, et que le cercle, de rayon a, est centré en $\mathrm{i}b$, avec bien entendu, $b > a$.

Pour construire la fonction de courant, nous nous plaçons dans un repère dont l'origine est le centre du cercle, posant : $Z = z - \mathrm{i}b$. La condition (2) s'explicite à l'aide de termes en, Z^2, $\overline{Z}^2$, Z, $\overline{Z}$, et $Z\overline{Z}$, cela sera explicité en (5). Le terme mixte n'engendre rien ; les deux termes linéaires sont ceux qu'il reste lorsque l'écoulement incident est uniforme, et les deux termes au carré sont spécifiques du cisaillement. Chacun des quatre termes, générateur, donne naissance, à une suite de singularités : par une première application du *théorème du cercle* à chacun des quatre termes, quatre singularités, deux doublets et deux quadripôles sont engendrés en $z = \mathrm{i}b$. Concernant les deux termes où la conjugaison apparaît, par exemple, le terme, $\omega\mathrm{i}b\overline{Z}/2$, il est d'abord transcrit, $\overline{-\omega\mathrm{i}bZ/2}$, puis seulement le *théorème du cercle* est opéré sur $-\omega\mathrm{i}bZ/2$, et le résultat est finalement conjugué ; en outre, pour imposer la symétrie par rapport à l'axe réel, quatre autres singularités sont considérées, extérieures au cercle : ce sont les deux doublets et les deux quadripôles engendrés dans le demi-plan inférieur, par le courant symétrique de (1), sur le cercle de rayon a centré en $-\mathrm{i}b$. La seconde étape consiste à prendre les images des quatre premières singularités (engendrées dans le demi-plan supérieur) dans le cercle inférieur, et réciproquement.

3. La fonction de courant obtenue, s'écrit :

$$\psi = -\frac{\omega}{8}\left\{\left(z - \overline{z}\right)^2 + 2a^4\left[\Re\left(-\frac{1}{(z - \mathrm{i}b)^2} + \frac{1}{(z + \mathrm{i}b)^2}\right) + \right.\right.$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(b+b_n)^2}\Re\left(\frac{(z-\mathrm{i}b_n)^2}{(z-\mathrm{i}b_{n+1})^2}-\frac{(z+\mathrm{i}b_n)^2}{(z+\mathrm{i}b_{n+1})^2}\right)\Bigg]+$$
$$-8ba^2\left[\Im\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}b}+\frac{1}{z+\mathrm{i}b}\right)+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{b+b_n}\Re\left(\frac{z-\mathrm{i}b_n}{z-\mathrm{i}b_{n+1}}-\frac{z+\mathrm{i}b_n}{z+\mathrm{i}b_{n+1}}\right)\right]\Bigg\}+$$
$$-\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Log}\left|\frac{z-\mathrm{i}h}{z+\mathrm{i}h}\right|, \tag{3}$$

où, $\Re$ et $\Im$, représentent la partie réelle et la partie imaginaire, et :

$$b_{n+1}=b-\frac{a^2}{b+b_n},\quad b_1=b. \tag{4}$$

Cette suite est telle que :

$$|b_{n+1}-b_n|\leqslant\frac{b}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n},$$

elle tend vers $h=\sqrt{b^2-a^2}$; c'est celle que l'on trouve pour l'écoulement uniforme, donnée par Milne-Thomson [2] et Dragos et Marcov [6]. Le dernier terme, proportionnel à Γ, qui désigne la circulation, n'apparaît pas dans Milne-Thomson [2], il constitue l'apport de Dragos et Marcov [6].

Nous nous proposons de vérifier d'abord que les séries convergent, que la condition (2) est satisfaite, et enfin que l'axe réel et le cercle sont lignes de courant.

Le terme général de chacune des deux séries est majoré, en module, par, $K|b_{n+1}-b_n|$, où K est une constante, se plaçant en dehors du cercle bien sûr, il s'agit donc de séries normalement convergentes ; les termes entre crochets tendant vers zéro à l'infini, ainsi que le logarithme, la condition (2) est donc satisfaite. Lorsque, $z=\overline{z}=x$, les termes sur lesquels opère la fonction $\Re$ sont la différence de deux complexes conjugués, et le terme sur lequel agit $\Im$ en est la somme. Enfin, pour vérifier que, $|z-\mathrm{i}b|=a$, est ligne de courant, nous reprenons d'abord le changement de variable, $z=Z+\mathrm{i}b$, uniquement dans le premier terme de ψ, ce qui conduit à :

$$\left(z-\overline{z}\right)^2=\left(z-\mathrm{i}b\right)^2+\overline{(z-\mathrm{i}b)}^2+4\mathrm{i}b(z-\mathrm{i}b)-4\mathrm{i}b\overline{(z-\mathrm{i}b)}-2(z-\mathrm{i}b)\overline{(z-\mathrm{i}b)}-4b^2 \tag{5}$$

Puis, nous constatons, utilisant, $z-\mathrm{i}b=a^2/(\overline{z}+\mathrm{i}b)$, que :

$$\text{si } n\geqslant 1,\quad \frac{z-\mathrm{i}b_{n+1}}{z-\mathrm{i}b_{n+2}}=\frac{b+b_{n+1}}{b+b_n}\overline{\left(\frac{z+i\,b_n}{z+i\,b_{n+1}}\right)};\qquad \frac{z-\mathrm{i}b}{z-\mathrm{i}b_2}=-\frac{2\mathrm{i}b}{\overline{z+\mathrm{i}b}}. \tag{6}$$

Forts du développement (5), des formules (6) ainsi que de leur carré, nous pouvons montrer que les termes se compensent deux à deux.

Références bibliographiques

[1] Taylor G.I., Proc. Roy. Soc., Série A 93 (1916) 99.
[2] Milne-Thomson L.M., Theoretical Hydrodynamics, 5th edn., Macmillan, 1968, p. 185.
[3] Milne-Thomson L.M., Proc. Cambrige Philos. Soc. 36 (1940) 246.
[4] Lee D.K., J. Fluids Engrg. 122 (2000) 715.
[5] Levin E., Quart. Appl. Math. 12 (1954) 315.
[6] Dragos L., Marcov N., Roum. Sci. Tech., Ser. Mech. Appl. 38 (1) (1993) 253.