

New models of thermal resistance at the interface of solids connected by random disk contacts

Najib Laraqi, Abderahmane Bairi

LEEE, EA 387, Université Paris X, IUT Ville d'Avray, Département GTE, 1, Chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France

Received 9 October 2001; revised and accepted 3 December 2001

Note presented by Georges Duvaut.

Abstract

Some new analytical models are proposed to calculate the thermal contact resistance between solids without heat transfer through the interstitial fluid. The interface is modeled by multiple disk contacts with different radii and random positions. Square and cylindrical semi-infinite solids are studied. Two sorts of models are developed. The first one considers the laterally insulated solids and uses finite integral transforms. The corresponding analytical solutions are exact but need a long computational time to treat an important number of contacts. The second one considers the same solids and uses the linear superposition method after applying an infinite integral transform. The analytical solutions are approximate but accurate and need little computational time. To cite this article: N. Laraqi, A. Bairi, C. R. Mecanique 330 (2002) 39–43. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

heat transfer / thermal contact resistance / thermal constriction / random contacts / interface / heat conduction / heat sources / analytical calculation

Nouveaux modèles de résistance thermique à l'interface de solides connectés par des contacts circulaires aléatoires

Résumé

Des modèles analytiques sont proposés pour calculer la résistance thermique de contact entre solides en l'absence de transfert interstitiel. L'interface est modélisée par de multiples contacts circulaires avec des rayons différents et des positions aléatoires. Des solides semi-infinis de forme carrée et cylindrique sont étudiés. Deux sortes de modèles sont développés. Le premier considère les solides latéralement isolés et utilise des transformées intégrales finies. Les solutions analytiques correspondantes sont exactes mais nécessitent des temps de calcul longs pour traiter un nombre important de contacts. Le second considère les mêmes solides et utilise la méthode de superposition linéaire après avoir appliqué une transformée intégrale infinie. Les solutions analytiques sont approchées mais précises, et nécessitent peu de temps de calcul. Pour citer cet article : N. Laraqi, A. Bairi, C. R. Mecanique 330 (2002) 39–43. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

transferts thermiques

E-mail addresses: najib.laraqi@cva.u-paris10.fr (N. Laraqi); dahmane.bairi@cva.u-paris10.fr (A. Bairi).

Version française abrégée

La résistance thermique de contact a largement été étudiée ces dernières décennies [1–4]. Les modèles développés dans la littérature sont généralement basés sur des micro-géométries idéalisées (aspérités identiques et distribuées de façon régulière). Dans la pratique les contacts ont des dimensions différentes et sont distribués de façon aléatoire. Dans cet article des modèles analytiques sont développés pour tenir compte de ces aspects du problème. Les contacts sont modélisés par des sources de chaleur multiples de forme circulaire de rayons différents et disposés de façon aléatoire sur l'aire de contact. Les premiers modèles considèrent des solides semi-infinis, de géométrie de contact carrée ou circulaire, latéralement isolés (Fig. 1). Dans le cas de la surface carrée, la solution est obtenue par l'utilisation de la transformée de Fourier cosinus finie et son inverse. Pour la géométrie circulaire, on utilise la transformée de Hankel finie et son inverse. La température moyenne $\bar{T}_c^{(i)}$ de l'aire d'un contact (i) est donnée par l'équation (1) pour la géométrie carrée et l'équation (2) pour la géométrie circulaire. En écrivant, pour chaque configuration, l'égalité des $\bar{T}_c^{(i)}$, on aboutit à un système matriciel linéaire qui permet de calculer la densité de flux q_i entrant par chacun des contacts et les résistances thermiques de constriction individuelles $R_{cs}^{(i)}$. On déduit ensuite la résistance thermique de constriction R_{cs} par l'association en parallèle des $R_{cs}^{(i)}$. Ces solutions sont exactes, mais, compte tenu de la présence de doubles séries dont la convergence est lente, les temps de calculs sont relativement longs lorsque l'on considère un nombre important de contacts. Les autres modèles s'appliquent aux mêmes configurations géométriques de contact, mais utilisent le principe de superposition. On détermine d'abord les températures pour une source circulaire sur une surface infinie et on superpose la solution aux autres contacts. La $\bar{T}_c^{(i)}$ est donnée par l'équation (4). Dans cette expression les développements ont été stoppés au terme $(a_i/b_{ij})^5$, où a_i est le rayon d'un contact (i) et b_{ij} la distance entre les centres des contacts (i) et (j). Pour obtenir la $R_{cs}^{(i)}$ d'un contact (i) on soustrait à la température $\bar{T}_c^{(i)}$ la température $T_{c,i}$ due à la macro-constriction (Fig. 2). Cette température est estimée par la résolution du problème d'une source de chaleur unique ayant pour valeur la moyenne des densités de flux de l'ensemble des sources q_i et dont les dimensions sont $L \times L$ pour la géométrie carrée et le rayon b pour la géométrie circulaire. Il s'agit là d'une hypothèse car la distribution des contacts étant aléatoires, la densité de flux ne possède pas, rigoureusement, une distribution uniforme sur l'aire apparente. Nous avons vérifié cette hypothèse en comparant les résultats à ceux du modèle précédent (lequel est exact) et avons noté des différences très faibles (de l'ordre du pourcent). De la même manière que précédemment, on écrit l'égalité des températures dues à la micro-constriction, ici $\bar{T}_c^{(i)} - T_{c,i}$, et on déduit d'abord les q_i , par la résolution d'un système matriciel linéaire, puis les $R_{cs}^{(i)}$. La R_{cs} est également calculée par l'association en parallèle des $R_{cs}^{(i)}$. Ce modèle est approché mais relativement précis. Il nécessite des temps de calculs nettement plus courts que le précédent, ce qui permet de traiter un nombre de contacts plus important (de l'ordre de quelques centaines).

1. Introduction

Thermal contact resistance has been widely studied in these last decades [1–4]. The models developed in the literature are generally based on idealized contacts (identical asperities, regularly distributed over the contact plane). In practice, the sizes of real contact areas are different and the contacts are randomly distributed. An experimental study [1], using the electrical analogy, has been realized to examine the effect of eccentricity of one contact on the thermal constriction resistance R_{cs} evolution. An analytical solution adapted to this experiment [5] has been developed. The results are in good agreement and have shown that R_{cs} increases with the increase in eccentricity, and this effect is all the more important as the relative contact size ε value is high ($\varepsilon = \sqrt{A_r/A_a}$, A_r and A_a are the real and apparent contact areas, respectively). This analytical solution has been generalized to multiple contacts with different sizes and randomly distributed over the contact plane [6]. The obtained results have shown that R_{cs} of random contacts is systematically

greater than those of identical and regular contacts. A recent study [7] confirms this tendency for identical disks randomly distributed. In this paper some analytical solutions are proposed to calculate R_{cs} for semi-infinite solids. The micro-contacts are modeled by numerous uniform circular heat sources with different radii and random positions. The developed models allow to calculate R_{cs} for Hertzian or large surface contact. The first developed model considers laterally insulated semi-infinite solids and uses finite integral transforms. The corresponding analytical solutions are exact but need a long computational time to treat an important number of contacts. The second one considers the same solids and uses the linear superposition method after having applied an infinite integral transform. The analytical solutions are approximate but accurate and need little computational time.

2. Model for a laterally insulated semi-infinite square prism

We consider a laterally insulated semi-infinite square prism (Fig. 1a), with the side L , the thermal conductivity k and zero reference temperature. The surface $z = 0$ is subjected to numerous heat sources N circular shape (radius a_i and space coordinates x_i, y_i) and generating a uniform flux q_i . The rest of this surface is insulated. The steady-state temperature $T(x, y, z)$ of this problem can be calculated applying the double finite cosine Fourier integral transform and its inverse to the heat conduction governing equations. By this means, the obtained average surface temperature $\bar{T}_c^{(i)}$ of disk contact (i) is:

$$\bar{T}_c^{(i)} = \frac{4L}{k\pi^2 a_i} \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{K_m K_n \cos(m\pi x_i/L) \cos(n\pi y_i/L)}{[m^2 + n^2]^{3/2}} J_1 \left[(m^2 + n^2)^{1/2} \frac{\pi a_i}{L} \right] \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N q_j a_j \cos\left(\frac{m\pi x_j}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_j}{L}\right) J_1 \left[(m^2 + n^2)^{1/2} \frac{\pi a_j}{L} \right] \right] \quad (1)$$

where $K_{m,or,n} = 1$ for $m, or, n = 0$ and $K_{m,or,n} = 2$ for $m, or, n \neq 0$. J is the Bessel function. The thermal constriction resistance $R_{cs}^{(i)}$ of disk contact (i) is defined by $R_{cs}^{(i)} = (\bar{T}_c^{(i)} - \bar{T}_s)/q_i \pi a_i^2$, where \bar{T}_s is the average temperature of the apparent contact area. In this problem, \bar{T}_s is equal to zero. The expression of R_{cs} is deduced in connecting all $R_{cs}^{(i)}$ in parallel as $R_{cs} = [\sum_{i=1}^N (1/R_{cs}^{(i)})]^{-1}$. The q_i values are calculated by putting $(\bar{T}_c^{(i)} - \bar{T}_s) = \Delta T_c = Cste$, for all contacts. This involves the solving of a linear matrix system.

3. Model for a laterally insulated semi-infinite cylinder

The same problem is studied here except that the geometry of solid is cylindrical (Fig. 1b). The radius of cylinder is b and the polar coordinates are r and θ . The polar coordinates of the center of contact (i) are e_i

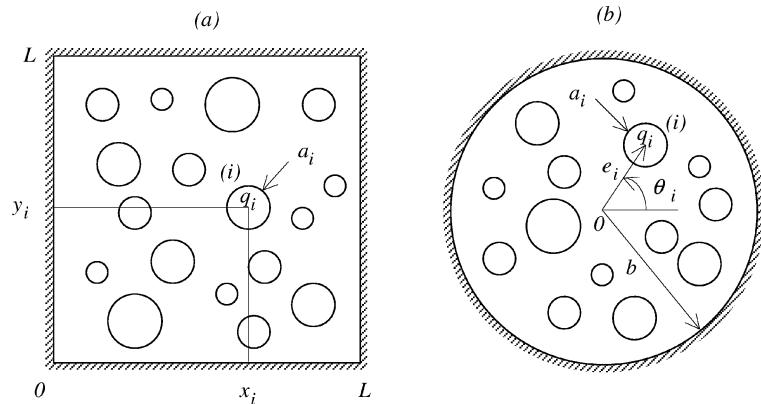


Figure 1. Random distribution of contacts on finite square prism and cylinder.

and θ_i . The steady-state temperature $T(r, \theta, z)$ of this problem can be calculated applying the finite cosine Fourier transform (for θ -direction) and the finite Hankel transform (for r -direction) to the heat conduction governing equations. The obtained average surface temperature $\bar{T}_c^{(i)}$ of disk contact (i) is written as:

$$\bar{T}_c^{(i)} = \frac{4b}{\pi k a_i} \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{K_m J_1(\beta_n a_i) J_m(\beta_n e_i) \cos(m\theta_i)}{(\beta_n b) [(\beta_n b)^2 - m^2] J_m^2(\beta_n b)} \sum_{j=1}^N \frac{q_j J_1(\beta_n a_j) J_m(\beta_n e_j) \cos(m\theta_j)}{a_j} \quad (2)$$

where β_n are the roots of $J'_m(\beta_n b) = 0$. The values of $R_{cs}^{(i)}$ and R_{cs} are calculated using the same method that in the previous section.

4. Approached models for a square or circular region of contact

We consider a semi-infinite medium (Fig. 2) with an infinite surface where the disk contacts are located in a square (a) or a circular (b) region. The heat transfer due to all sources is three-dimensional. The heat conduction equation being linear, we first determine the response for a unique source (two-dimensional axisymmetric problem, $T(r, z)$) and then we use the superposition method to take account of other contacts. The steady-state surface temperature $T_j(r, 0)$ due to the unique source (j) can be calculated using the infinite Hankel transform and its inverse. At the radius $r > a_j$, it is following:

$$T_j(r > a_j, 0) = \frac{q_j a_j}{2k} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \left(\frac{a_j}{r}\right)^2\right) \quad (3)$$

where $F(\alpha, \gamma; \delta; Z)$ is an hypergeometric function which expansion provides the expression of $T_j(r, 0)$. The effect of the source (j) on the disk contact (i) at the distance $r = e_{ij}$ (Fig. 3), where $e_{ij} = \sqrt{\rho^2 + b_{ij}^2 - 2\rho b_{ij} \cos\theta}$, can be calculated using the Legendre polynomials [8]. Superposing temperatures due to contacts (j) to the one of the contact (i), the average temperature of disk contact (i) can be written as:

$$\bar{T}_c^{(i)} = \frac{8q_i a_i}{3k\pi} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{q_j a_j}{k} \left(\frac{a_j}{b_{ij}}\right) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left(\frac{a_j^2 + a_i^2}{b_{ij}^2}\right) + \frac{9}{128} \left(\frac{a_j^4 + 3a_i^2 a_j^2 + a_i^4}{b_{ij}^4}\right) \right\} + 0 \left(\frac{a_{i,or,j}}{b_{ij}}\right)^7 \quad (4)$$

In this equation the expanding of series is stopped at $(a_{i,or,j}/b_{ij})^5$ which is widely sufficient because in practice $a_{i,or,j} \ll b_{ij}$. The first term of equation (4) corresponds to the effect of the contact (i) only and the second one presents the interaction between all the contacts (j) with the contact (i). The individual

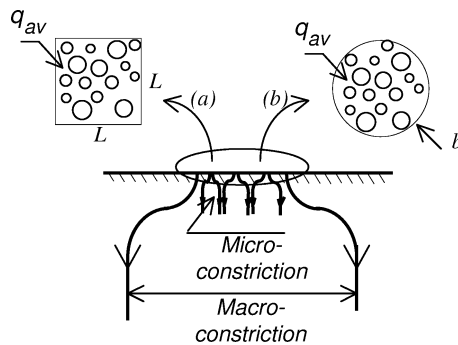


Figure 2. Random distribution of contacts clustered in square and circular region on a half-space.

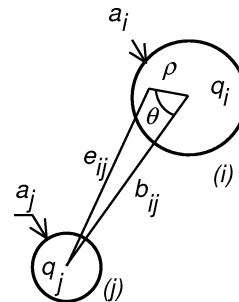


Figure 3. Principal of superposition.

thermal constriction resistance, $R_{cs}^{(i)}$, due to the contact (i) is defined by $R_{cs}^{(i)} = (\overline{T}_c^{(i)} - T_{c,i})/q_i\pi a_i^2$, where $T_{c,i}$ is the temperature at the center of contact (i) due to a macro-constriction phenomenon (Fig. 2). This temperature can be estimated considering the same contact region $L \times L$ subjected to the average heat flux $q_{av} = \sum_{i=1}^N (q_i\pi a_i^2)/A_a$. In a practical point of view, taking into account the contact disorder, the macro-constriction is not veritably due to an uniform heat flux. We have analyzed this assumption comparing the results of the present model to those of the first one (laterally insulated solids). The difference between the two models is small (about the per cent). The expression of $T_{c,i}$ due to a square heat source is classical [9]. In the case of circular apparent contact area which b radius, the temperature $T_{c,i}$ can be calculated using the infinite Hankel transform and its inverse. We obtain:

$$T_{c,i} = T(r = e_i, 0) = \frac{q_{av}b}{k} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \left(\frac{e_i}{b}\right)^2\right) \quad (5)$$

The q_i values are determined by writing the equality $(\overline{T}_c^{(i)} - T_{c,i}) = \Delta T_c = Cste$ ($\forall i$) and solving the involved linear matrix system. The R_{cs} value is calculated with the same method previously used.

5. Conclusions

Analytical solutions are proposed to calculate the R_{cs} due to multiple disk contacts with random positions and sizes. This configuration is more realistic than the case of regular contacts, widely studied in the literature. These solutions are accurate and allow to treat thermal contact problems which were few studied until now. By this means, we can analyze the effect of number of contacts, the relative contact size and the dispersion of disk contacts radii on the evolution of R_{cs} .

References

- [1] Bardon J.P., Contribution à l'étude des résistances thermiques de contact, Thèse de doctorat es-sciences, Université de Poitiers, 1965.
- [2] Bardon J.P., Introduction à l'étude des résistances thermiques de contact, *Revue Générale de Thermique* France 125 (1972) 429–447.
- [3] Degiovanni A., Moyne C., Résistance thermique de contact en régime permanent. Influence de la géométrie du contact, *Revue Générale de Thermique* France 334 (1989) 557–563.
- [4] Tio K.K., Sadhal S.S., Thermal constriction resistance: effects of boundary conditions and contact geometries, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 35 (6) (1992) 1533–1544.
- [5] Laraqi N., Bardon J.P., Influence de l'excentration des aspérités sur la résistance thermique de constriction statique ou glissante, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb* 326 (1998) 547–552.
- [6] Laraqi N., Calcul analytique tridimensionnel de la résistance thermique de constriction statique à partir d'une distribution aléatoire des contacts et de leur dimension, *Compte Rendu de la Journée du GETTI, Paris, 15 Janvier, 1998*.
- [7] Das A.K., Sadhal S.S., Thermal constriction resistance between two solids for random distribution of contacts, *Heat Mass Transfer* 35 (1999) 101–111.
- [8] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press, New York, 1965, pp. 715, 1048.
- [9] Manka O., Naso V., Solution to steady-state three-dimensional conduction for a rectangular surface heat source on a semi-infinite body, *Internat. Comm. Heat Mass Transfer* 21 (6) (1994) 799–808.