

# Méthode particulaire anisotrope

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Elie Rivoalen

Laboratoire de mécanique, Université du Havre, 25, rue Philippe Lebon, BP 540, 76058 Le Havre cedex, France

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté le 21 novembre 2001

Note présentée par Roland Glowinski.

---

## Résumé

On utilise une méthode particulaire pour décrire l'évolution du champ tourbillonnaire d'un écoulement plan de fluide parfait incompressible. Les particules utilisées sont définies par leur position et leur circulation, mais aussi par les moments de la répartition de la vortacité interne à la particule. Une équation de transport pour ces moments est formée à partir de l'équation de transport du tourbillon. Les résultats de la méthode sont comparés à ceux de la méthode particulaire classique et à ceux de la méthode des tourbillons elliptiques de Teng pour le cas de l'évolution de deux tourbillons initialement cylindriques. Pour citer cet article : A. Beaudoin et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 51–56. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des fluides / méthode particulaire / écoulement tourbillonnaire**

## Anisotropic particle method

## Abstract

A particle method has been used to simulate the vorticity transport in a two-dimensional flow of an incompressible inviscid fluid. In this method, not only the location and the circulation of the particle are used but also the moments of the internal vorticity. The transport equation for these moments has been derived from the vorticity transport equation. The method has been compared to the usual particle method as well as to Teng's elliptic vortex model. The test case is that of the evolution of two circular patches of vorticity already used by Teng. To cite this article: A. Beaudoin et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 51–56. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fluid mechanics / particle method / vortex flow**

---

## *Abridged English version*

Two-dimensional flows of an incompressible inviscid fluid are governed by the Euler equations which can be written in the vorticity velocity formulation (equations (1) and (2)). The velocity field is obtained from the vorticity field by means of the Biot–Savart law (equation (3)). The vorticity field is discretised by means of vortex carrying particles  $\mathcal{P}_i$  with surface  $\sigma_i$ . Using the particles definition into the Biot–Savart law yields the expression (equation (4)) for the velocity field. The first step of our method consists in deriving an approximation for the velocity  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$  induced by the particle  $\mathcal{P}_i$  accounting for the vorticity  $\omega_i$  in particle  $\mathcal{P}_i$  with surface  $\sigma_i$ . The expression of the velocity  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$  induced by particle  $\mathcal{P}_i$  can be approximated by using a Taylor expansion for the Biot–Savart kernel  $\mathbf{K}$  (equation (6)). Retaining the first two terms only in the Taylor expansion and using the definition of the moment  $M_{nm}^i$  (equation (7)) yield the following

---

*Adresses e-mail* : anthony.beaudoin@univ-lehavre.fr (A. Beaudoin); serge.huberson@univ-lehavre.fr (S. Huberson); elie.rivoalen@univ-lehavre.fr (E. Rivoalen).

approximations (equations (8) and (9)) for the two components of the velocity  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ . The next step consists in the formulation of a transport equation for the moment  $M_{nm}^i$ . The evolution of these moments  $M_{nm}^i$  is governed by equation (equation (10)). Using Leibniz formula to express the material derivative of the integral after some manipulations yields the expression (equation (12)). The vorticity transport equation which appears in the first term of the previous equation is zero. Using the second order Taylor expansion for the velocity  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$  and the definition of the moment  $M_{nm}^i$ , we find the expression (equation (13)) which is the final form of the governing equation for the moment  $M_{nm}^i$ . The resulting method has been compared to Teng's elliptic vortex method and to a reference solution obtained with the particle method in the usual form. The test problem consists in the computation of the evolution of two initially circular vortex patches and has been proposed by Teng. For the present method and the elliptic vortex method, two particles only have been used whereas the reference particle solution has been obtained with 1000 particles for each vortex patches. The moments of the particles have been accounted for up to second order and the resulting transport equations are equations (equation (14)) to (equation (18)). It must be pointed out that only (equation (14)) and (equation (15)) are used in the usual particle method. In our test problem, the self influence of particle  $\mathcal{P}_i$  reduced to a solid rotation for which the expression of the angular velocity can be found for example in [4]. On Fig. 1, the section of the two particles have been plot for the present method and the elliptic vortex method. The reference solution coincides almost perfectly with the present method and has not been reproduced on the figure. On Fig. 2, the evolution of the moments  $M_{20}$ ,  $M_{02}$  and  $M_{11}$  is given. Once against the present method provides results closer to the reference solution than the elliptic vortex method. The method can be straightforwardly extended to higher order although this may imply some complications and the extension to viscous flows is under development.

## 1. Introduction

La première tentative d'utilisation de particules anisotropes dans la méthode particulaire a été réalisée par Chorin en 1978 [1]. Pour simuler des écoulements de couche limite, Chorin propose de remplacer les particules dans les zones proches des parois par des segments porteurs de tourbillons, parallèles à la paroi et appelés feuillets tourbillonnaires. L'idée d'utiliser des particules non sphériques dans la couche limite a ensuite été formulée explicitement dans le travail de Merriman [2] où des résultats théoriques sur l'erreur d'approximation sont donnés. Une mise en application plus complète dans le cadre théorique des méthodes dites « vortex blobs » est présentée un plus tard par Teng [3]. Dans ses travaux, Teng propose une méthode dans laquelle les particules sont des ellipses de section variable. Le mouvement approximatif d'une ellipse est donné par la somme d'une translation rigide suivant la trajectoire du centre de cette ellipse et d'une distorsion dans la forme elliptique avec conservation de sa surface. L'utilisation des particules elliptiques déformables permet de voir la méthode des feuillets tourbillonnaires de Chorin comme la version la plus simple obtenue en se mettant dans le cas limite où les ellipses sont dégénérées en segments porteurs de tourbillon. Cette note a pour objet d'approfondir cette idée en présentant un formalisme de la méthode particulaire anisotrope basé sur la notion de moments.

## 2. Description de la méthode

L'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible est régi par les équations d'Euler qui s'écrivent en formulation vitesse-tourbillon ( $\mathbf{u}$ ,  $\omega$ ) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  est relié au champ de tourbillon  $\omega$  par la relation de Biot–Savart :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' \quad \text{avec } \mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r^2} (-y, x) \quad (3)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y)$  est le vecteur position et  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  le noyau de Green de l'équation intégrale (equation (3)). La méthode particulière est appliquée en décomposant le domaine fluide  $\mathbb{R}^2$  en particules tourbillonnaires  $\mathcal{P}_i$  de support  $\sigma_i$ , ainsi :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad \text{avec } \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}_i$  est la vitesse induite par la particule  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathbf{r}_i$  définit une position moyenne de la particule  $\mathcal{P}_i$  qui peut être le centre de gravité de la particule. Pour une particule isolée, la vitesse de  $\mathbf{r}_i$  est alors nulle [4] et on a :

$$\int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dx' dy' = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i) = 0 \quad (5)$$

La première étape de la méthode consiste à trouver une forme approchée de  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$  qui tiend compte à la fois de la répartition de tourbillon dans la particule et de son support. Le noyau de Green  $\mathbf{K}$  (equation (3)) est d'abord développé autour de la position moyenne  $\mathbf{r}_i$  de la particule  $\mathcal{P}_i$  et son expression est ensuite injectée dans  $\mathbf{u}_i$  (equation (3)). Le développement de Taylor de  $\mathbf{K}$  à l'ordre 3 est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T \\ &+ \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{2} \cdot (((\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)^T \cdot \nabla)^T \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T) + \mathcal{O}(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i|^3) \end{aligned} \quad (6)$$

dans l'expression approchée de  $\mathbf{u}_i$  le noyau  $\mathbf{K}$  et ses dérivées peuvent être extraits de l'intégrale et les seules termes à intégrer dans  $\mathcal{P}_i$  sont notés  $M_{nm}^i$  :

$$M_{nm}^i = \int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m dx' dy' \quad (7)$$

on trouve finalement l'approximation des deux composantes ( $u_i, v_i$ ) de la vitesse  $\mathbf{u}_i$  à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= -\frac{y - y_i}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \left( M_{00}^i + \frac{M_{20}^i - M_{02}^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4} (3(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2) \right) \\ &+ \frac{x - x_i}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^6} ((x - x_i)^2 - 3(y - y_i)^2) M_{11}^i \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{r}) &= \frac{x - x_i}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \left( M_{00}^i - \frac{M_{20}^i - M_{02}^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4} (3(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2) \right) \\ &- \frac{y - y_i}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^6} ((x - x_i)^2 - 3(y - y_i)^2) M_{11}^i \end{aligned} \quad (9)$$

dans cette expression de la vitesse, les moments ( $M_{00}^i, M_{11}^i, M_{20}^i, M_{02}^i$ ) pourraient être calculés explicitement si on connaissait le support  $\sigma_i$  de la particule  $\mathcal{P}_i$  et la répartition de tourbillon  $\omega_i$  dans la particule  $\mathcal{P}_i$ .

La deuxième étape de la méthode consiste à trouver l'équation d'évolution du moment  $M_{nm}^i$  (equation (7)) associé à la particule  $\mathcal{P}_i$ . La variation dans le temps du moment  $M_{nm}^i$  est donnée par :

$$\frac{dM_{nm}^i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \omega(\mathbf{r}') dx' dy' \quad (10)$$

en développant la dérivée particulière de cette intégrale on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{nm}^i}{dt} &= \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial t} ((x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \omega(\mathbf{r}')) dx' dy' \\ &+ \int_{\sigma_i} \nabla \cdot ((x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \mathbf{u}(\mathbf{r}') \omega(\mathbf{r}')) dx' dy' \end{aligned} \quad (11)$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{nm}^i}{dt} &= \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \left( \frac{\partial \omega(\mathbf{r}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}') \omega(\mathbf{r}')) \right) dx' dy' \\ &+ n \int_{\sigma_i} (u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}_i)) (x' - x_i)^{n-1} (y' - y_i)^m \omega(\mathbf{r}') dx' dy' \\ &+ m \int_{\sigma_i} (v(\mathbf{r}') - v(\mathbf{r}_i)) (x' - x_i)^n (y' - y_i)^{m-1} \omega(\mathbf{r}') dx' dy' \end{aligned} \quad (12)$$

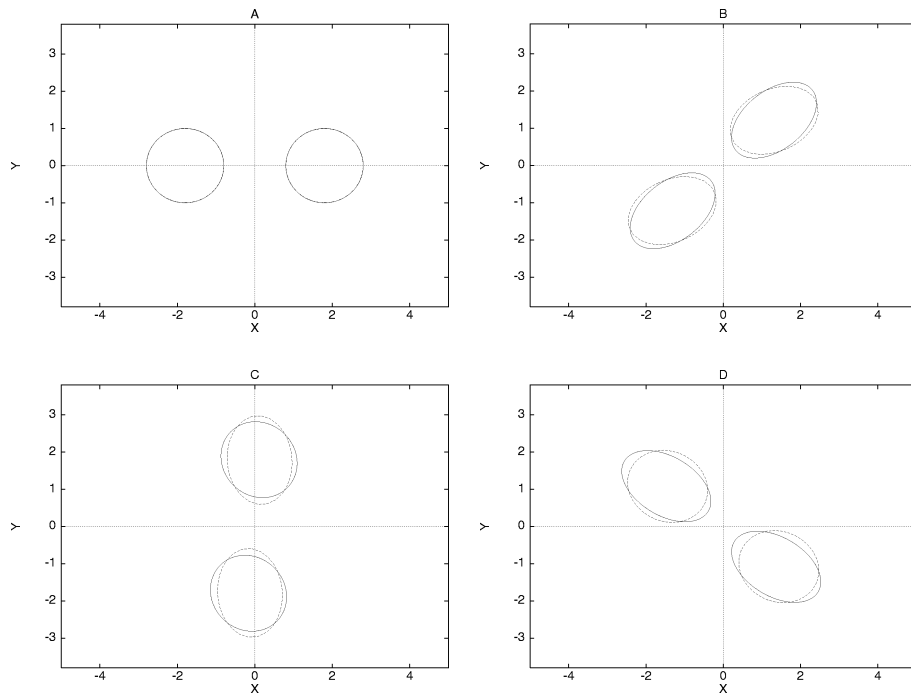
on reconnait dans le premier terme du second membre de l'équation précédente, l'équation de transport du tourbillon (equation (1)). Si les deux composantes de  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ ,  $(u(\mathbf{r}'), v(\mathbf{r}'))$ , sont approchées par le développement de Taylor suivant :  $\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}_i)^T + \mathcal{O}(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i|^2)$ , on trouve finalement, en utilisant la définition de  $M_{nm}^i$  (equation (7)), l'équation de transport du moment :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{nm}^i}{dt} &= n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{nm}^i + n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{n-1, m+1}^i \\ &+ m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{nm}^i + m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{n+1, m-1}^i \end{aligned} \quad (13)$$

dans la méthode particulière la structure interne est approchée par une fonction sphérique et seul le moment  $M_{00}^i$  qui correspond à la circulation  $\Gamma_i (= \int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') dx' dy')$ , est pris en compte. Ici le système d'équations différentielles qui régit la cinématique et la dynamique d'une particule  $\mathcal{P}_i$  est enrichi par l'introduction de nouvelles équations faisant intervenir les moments  $M_{nm}^i$ . On peut remarquer que l'ordre des moments retenus peut être aussi élevé qu'on veut à condition d'en tenir compte dans l'expression de la vitesse. On se limite ici à l'ordre 2 par comparaison aux travaux antérieurs.

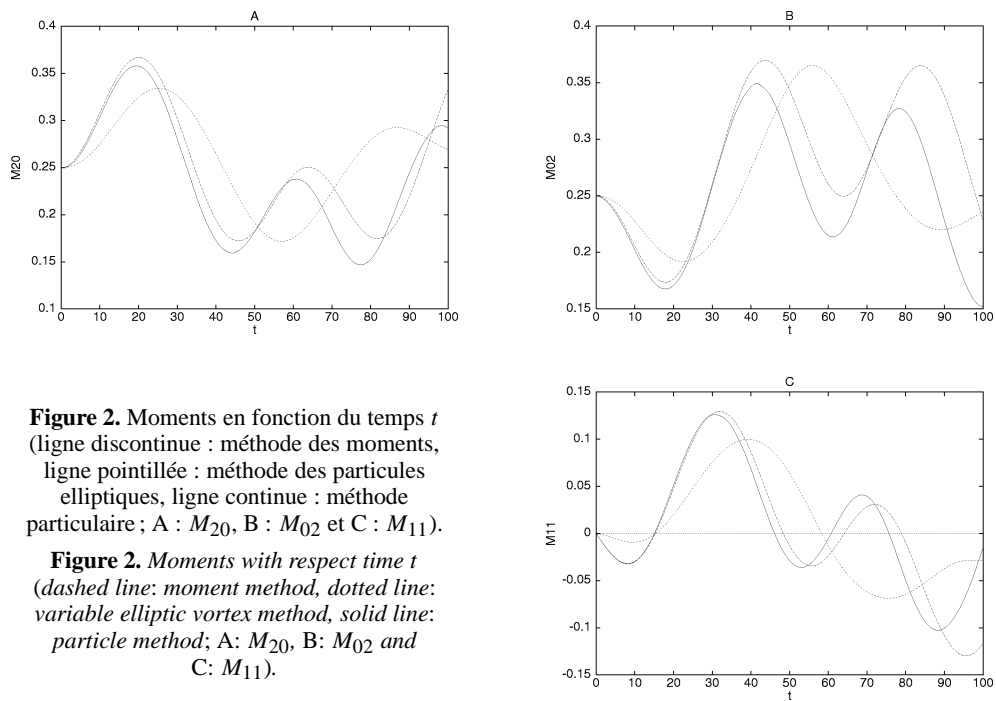
### 3. Application numérique

Le modèle est appliqué à l'étude numérique de la dynamique de 2 tourbillons de Rankine corotatifs. Le fluide est parfait et la répartition de tourbillon  $\omega_i$  dans chaque particule  $\mathcal{P}_i$  est uniforme. A l'instant initial, les 2 particules de circulation et de rayon unité sont axisymétriques ( $M_{00}^i = 1$ ,  $M_{20}^i = M_{02}^i = 1/4$  et  $M_{11}^i = 0$  à l'instant  $t = 0$ ). Les tourbillons sont séparés d'une distance  $d = 3,8$ . Cette configuration reprend celle traitée par Teng [3]. L'évolution des 2 particules ( $i = 1$  et  $i = 2$ ) est donnée par le système d'équations suivant qui tiend compte de la dynamique interne de la particule pour une répartition uniforme



**Figure 1.** Mouvement de deux particules (ligne continue : méthode des moments ; ligne discontinue : méthode des particules elliptiques ; figures A :  $t = 0$ , B :  $t = 30$ , C :  $t = 60$ , D :  $t = 100$ ).

**Figure 1.** Motion of two particles (solid line: moment method; dashed line: variable elliptic vortex method; figures A :  $t = 0$ , B :  $t = 30$ , C :  $t = 60$ , D :  $t = 100$ ).



**Figure 2.** Moments en fonction du temps  $t$  (ligne discontinue : méthode des moments, ligne pointillée : méthode des particules elliptiques, ligne continue : méthode particulaire ; A :  $M_{20}$ , B :  $M_{02}$  et C :  $M_{11}$ ).

**Figure 2.** Moments with respect time  $t$  (dashed line: moment method, dotted line: variable elliptic vortex method, solid line: particle method; A :  $M_{20}$ , B :  $M_{02}$  and C :  $M_{11}$ ).

de tourbillon :

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \quad (14)$$

$$\frac{dM_{00}^i}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\Gamma_i}{dt} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dM_{11}^i}{dt} = \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{20}^i + (M_{20}^i - M_{02}^i) \frac{\omega_i}{4} \quad (16)$$

$$\frac{dM_{20}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{20}^i + \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{11}^i \right) - M_{11}^i \frac{\omega_i}{2} \quad (17)$$

$$\frac{dM_{02}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{11}^i \right) + M_{11}^i \frac{\omega_i}{2} \quad (18)$$

Dans cet exemple, le nombre de variables associées à chaque particule  $\mathcal{P}_i$  est donc de 6 :  $(x_i, y_i, M_{00}^i, M_{11}^i, M_{20}^i, M_{02}^i)$ . Pour la discrétisation en temps des équations précédentes, on utilise un schéma de Runge–Kutta d’ordre 4 avec un pas de temps de 0,1. Une solution de référence est également obtenue en utilisant une méthode particulière [5] qui discrétise finement chaque section de tourbillon (dans ce cas environ 1000 particules discrétisent chaque tourbillon). On a représenté sur la Fig. 1 le contour géométrique des particules obtenu par la méthode des tourbillons elliptique de Teng [3] et la méthode des moments. Les résultats de la méthode de référence qui coïncident presque parfaitement avec ceux de la méthode des moments n’ont pas été reportés ici. Cette figure indique qu’après 1000 pas de temps les deux méthodes redonnent les résultats connus de la littérature [6]. La Fig. 2 donne l’évolution des moments  $M_{20}$ ,  $M_{02}$  et  $M_{11}$  associés aux trois méthodes. Dans ce cas la méthode des moments donne des résultats plus proches de la solution de référence que la méthode des tourbillons elliptiques.

#### 4. Conclusion

Un nouveau modèle numérique basé sur le calcul de moments et l’écriture d’équations d’évolution de ces moments a été proposé pour décrire l’évolution de particules anisotropes. En étudiant la dynamique de deux particules, il a été comparé à la méthode des particules elliptiques de Teng et à une solution particulière de référence. La comparaison a montré que cette méthode donnait des résultats plus proches de la solution de référence que la méthode des particules elliptiques. Des moments d’ordre supérieurs pourront être introduits dans la méthode pour enrichir la description de la particule. L’application de la méthode au cas des fluides visqueux est en cours.

#### Références bibliographiques

- [1] Chorin A.J., Vortex sheet approximation of boundary layers, J. Comput. Phys. 27 (1978) 428–442.
- [2] Merriman B., Particle Approximation, Lectures in Appl. Math., Vol. 28, 1991, pp. 418–545.
- [3] Teng Z.-H., Variable-elliptic-vortex method for incompressible flow simulation, J. Comput. Math. 4 (1986) 255–262.
- [4] Lamb S.H., Hydrodynamics, Dover, 1945.
- [5] Léonard A., Vortex methods for flow simulation, J. Comput. Phys. 37 (1980) 289–335.
- [6] Waugh D.W., The efficiency of symmetric vortex merger, Phys. Fluids A 4 (8) (1991) 1745–1758.