

Résolution des équations de dispersion–diffusion en présence de forts gradients

Caroline Sart^a, Abdellatif Ouahsine^a, Mohamed Louaked^b, Pierre-Antoine Bois^a

^a LML, URA CNRS 1441, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

^b Dept. de mathématiques, Université de Caen, Bât. Sciences, BP 5186, 14032 Caen cedex, France

Reçu le 26 mars 2001 ; accepté après révision le 10 décembre 2001

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé

Pour la résolution des termes de convection dans la simulation des écoulements côtiers, on propose un schéma à variation totale décroissante agrémenté d'une méthode de compression artificielle pour réduire la diffusion numérique et améliorer le profil des traceurs dans les régions de forts gradients. Cette méthode s'applique avec succès dans les régions de discontinuité, mais nécessite une limitation de son application en dehors de ces régions. Une application est faite à l'estimation d'une bande de dessalure dans la Manche Orientale. *Pour citer cet article*: C. Sart et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 159–165. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / diffusion artificielle / TVD / discontinuités / Manche orientale

Resolution of advection–diffusion equation in presence of sharp gradient

Abstract

In order to resolve the convection terms in the simulation of coastal flows, we propose a numerical method based on the Total Variation Diminishing scheme completed with the Artificial Compression Method to reduce the artificial diffusion and to sharpen the tracer profile in strong gradient regions. This method was applied successfully at discontinuous regions, but out of these regions a limitation of its application is necessary. An application is made to estimate the width of the fresh water band in the Eastern English Channel. *To cite this article*: C. Sart et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 159–165. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / artificial diffusion / TVD / discontinuities / Eastern Channel

Abridged English version

Along the French coast, from the bay of the Seine to the Dover Straits, there are many rivers discharging fresh waters. These inputs are maintained in a coastal flow which is separated from off-shore waters by a front [8]. This front gives rise to frontal regions characterized by a sharp gradient. In previous papers [6], it has been shown that this region is governed by an intense residual transport coastal current of 7.20 km in width directed to the North sea. In this area, horizontal convection dominates the flow. The numerical

Adresse e-mail : ouahsine@univ-lille1.fr (A. Ouahsine).

simulation of this region requires appropriate choices and trade-offs in the treatment of the advective terms in the transport equations.

In this paper we use the Total Variation Diminishing (TVD) concept to improve the advection of the variables in regions with sharp flow gradients. We investigate several flux-limiter TVD schemes which maintain the mass conservation and are less diffusive than the simpler schemes. Superbee and Minmod flux-limiters are specifically considered (Fig. 1).

The performance of several TVD schemes applied to the simulation of the oceanic tracers were evaluated in previous work by Ouahsine et al. [9]. Unfortunately these methods further smear the salinity near the fronts.

To take into account the presence of a discontinuity we introduce a modification of the TVD schemes based on the Artificial Compression Method (ACM). This is used as a post-processing modification of the standard finite differences scheme and it prevents the smearing of discontinuities.

The high resolution scheme for the one dimensional flow indicates that the method, based on the TVD concept combined with the ACM technique, provides a robust tool in the neighborhood of the discontinuity (Fig. 2). Nevertheless, special care must be taken in using this technique when an effective discontinuity is not met. Thus in order to avoid the compression of the solution where is not necessary, we introduce a discontinuity detector.

The improvement provided by TVD schemes is shown in a realistic case. The width of the fresh water band along the French coast was estimated with a 2D hydrodynamic model (Fig. 3).

The outline of this paper is as follows. In Section 2, we briefly describe the flux-limiter technique and comparisons between schemes of first order (Upwind), two order (Lax–Wendroff) and two flux-limiter schemes are given for the purely advective equation. In Section 3 we present a review of the ACM technique, and in Section 4 we give a limitation to apply the ACM only when a discontinuity is met. Section 5 is devoted to the 2D hydrodynamic model. Finally, the conclusion of our investigations is given in Section 6.

1. Introduction

Lors du traitement numérique des équations de transport, on rencontre des problèmes de résolution des termes de convection notamment dans les régions de forts gradients ou même de discontinuités. En utilisant des schémas classiques d'ordre supérieur à 2, des oscillations numériques prennent naissance. On peut les éviter en utilisant des schémas d'ordre 1, mais une diffusion de la solution aura lieu. Ainsi, dans ce travail, on propose dans un premier lieu des schémas numériques adaptés, capables de limiter la diffusion artificielle et d'empêcher la dispersion numérique (schémas TVD [1]). Dans un second lieu, ces schémas sont améliorés en ajoutant la Méthode de Compression Artificielle [2], utilisée ici en post-traitement. La compression ne sera appliquée qu'aux régions de discontinuité, ceci après avoir identifié préalablement ces régions. Cette dernière procédure permet d'appliquer judicieusement l'ACM sans altérer la solution calculée.

2. Schémas limiteurs de flux à Variation Totale Décroissante

Pour modéliser l'équation d'advection d'une grandeur scalaire dans un espace unidimensionnel, on considère la loi de conservation hyperbolique [3] suivante :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad \partial_x f(u) = a(u)\partial_x u \quad (1)$$

où $u(x, 0) = u_0(x)$ est supposée être à support compact.

L'équation (1) peut admettre une solution discontinue, on la discrétise alors suivant un schéma écrit sous forme conservative en introduisant un flux numérique $\hat{f}_{j+1/2}^n$ consistant avec la loi (1). Ce schéma à $2k + 1$

points s'écrit :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda [\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n] \quad (2)$$

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \hat{f}_{j+1/2}^n(u_{j-k+1}^n, u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n), \quad \hat{f}_{j+1/2}^n(u, \dots, u) = f(u)$$

où $\lambda = \Delta t / \Delta x$ désigne le rapport des pas de discrétisation. Lax et Wendroff ont prouvé que si la solution de (2) converge presque partout vers une solution limite, celle-ci est une solution faible de (1).

Dans ce qui suit on construit des schémas dits limiteurs de flux [4] sur la base du schéma de Lax–Wendroff. Ce schéma d'ordre 2 peut être écrit comme la somme du schéma upwind d'ordre 1 et d'un terme d'« antidiffusion ». Ce dernier corrige la diffusion excessive du schéma upwind, mais des oscillations numériques apparaissent au voisinage de forts gradients de la solution (Fig. 1). Il convient donc de corriger la partie antidiffusive du flux numérique en introduisant un limiteur φ tel que : $\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}_{j+1/2}^{\text{up}} + \hat{f}_{j+1/2}^{\text{anti}} \times \varphi_{j+1/2}$ où $\varphi \geq 0$ pour conserver le signe du flux antidiffusif et $\varphi(1) = 1$ nécessaire pour que le schéma soit de second ordre :

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2} [f_{j+1} + f_j - |a_{j+1/2}| \Delta_{j+1/2} u] + \frac{1}{2} (1 - v_{j+1/2}) (\varphi_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^+ - \varphi_{j+1/2}^- a_{j+1/2}^-) \Delta_{j+1/2} u \quad (3)$$

où $\Delta_{j+1/2} u = u_{j+1} - u_j$; $v_{j+1/2} = \lambda |a_{j+1/2}|$, avec $a_{j+1/2} = \Delta_{j+1/2} f / \Delta_{j+1/2} u$ et $a_{j+1/2} = a(u_j)$ si $u_j = u_{j+1}$; et $a_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2} (a_{j+1/2} \pm |a_{j+1/2}|)$, ainsi le limiteur dépend des rapports de pentes « upwind » :

$$\varphi_{j+1/2}^\pm (r_{j+1/2}^\mp) \quad \text{où} \quad r_{j+1/2}^\pm = \Delta_{j+1/2} \pm u / \Delta_{j+1/2} u$$

Ce schéma doit vérifier la condition CFL : $v_{j+1/2} \leq 1$ et, pour assurer l'absence d'oscillations numériques, on lui impose d'être à Variation Totale Décroissante (TVD).

On définit la Variation Totale de la solution numérique au pas de temps t_n par : $TV(u^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$. Un schéma est dit TVD si $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$. Cette propriété assure que de nouveaux extrema ne seront

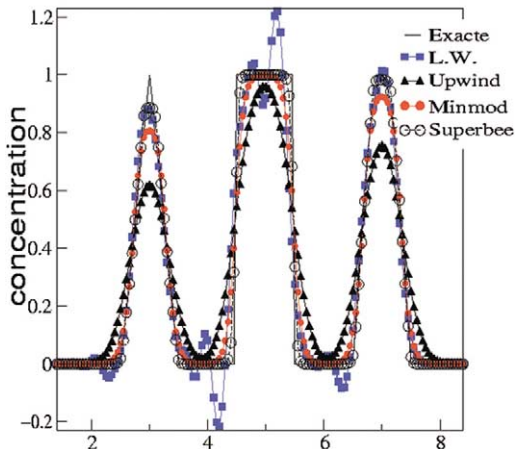


Figure 1. Comparaison entre schémas classiques et TVD.

Figure 1. Comparison between classical and TVD schemes.

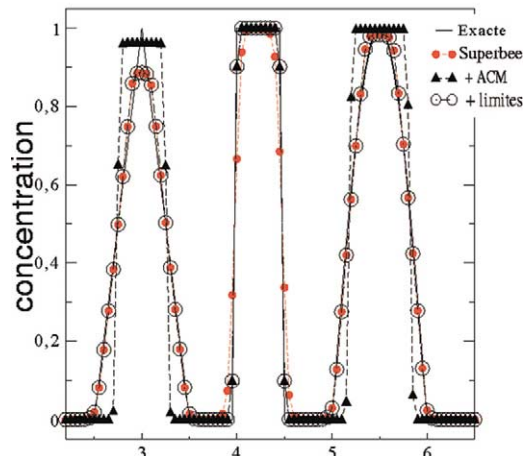


Figure 2. Amélioration des schémas TVD avec l'ACM.

Figure 2. Improvement of TVD schemes with the ACM.

pas créés, et que les extrema existants ne seront pas amplifiés. Des conditions suffisantes pour que le schéma (2) vérifie la propriété TVD sont données sur le schéma écrit sous forme incrémentale [1] :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} u^n - C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} u^n \quad (4)$$

$$C_{j+1/2}^\pm \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{j+1/2}^+ + C_{j+1/2}^- \leq 1 \quad (5)$$

où les C^\pm sont des fonctions des u^n . On déduit alors de (3) et (4) que [5] :

$$C_{j\pm 1/2}^\pm = \lambda \left\{ \left[1 - \frac{1}{2}(1 - v_{j\pm 1/2}) \varphi_{j\pm 1/2}^\mp \right] |a_{j\pm 1/2}^\mp| + \frac{1}{2}(1 - v_{j\mp 1/2}) \frac{\varphi_{j\mp 1/2}^\mp}{r_{j\mp 1/2}^\pm} |a_{j\mp 1/2}^\mp| \right\}$$

Dans le cas $f = a \cdot u$, de (5) on obtient des conditions suffisantes sur le limiteur pour que le schéma soit TVD : $0 \leq \{\varphi(r)/r, \varphi(r)\} \leq 2$.

2.1. Applications numériques

Les simulations numériques sont effectuées suivant un test à vitesse « a » constante ($f = a \cdot u$) avec $\Delta x = 0,05$, $\Delta t = 0,02$ et un nombre de courant $Cr = 0,4$. Au voisinage des fortes variations, la diffusion ou les oscillations entraînées par le schéma upwind ou de Lax–Wendroff sont corrigées par l’utilisation du schéma TVD présenté pour deux types de limiteurs :

$$\text{Superbee} : \varphi_S(r) = \max[0, \min(1, 2r), \min(2, r)], \quad \text{Minmod} : \varphi_m(r) = \max[0, \min(1, r)]$$

On constate (Fig. 1) que le limiteur φ_m reste assez diffusif, et que le limiteur φ_S capte mieux les changements de variations. Cependant, même ce limiteur très compressif admet un étalement de la solution au niveau des discontinuités. Cet étalement peut être corrigé par l’application de la méthode de compression artificielle.

3. Méthode de Compression Artificielle (ACM)

L’ACM utilisée ici en post-traitement est basée sur les propriétés de la solution de (1) à la traversée d’une discontinuité. Cette solution doit satisfaire la condition de Rankine–Hugoniot :

$$f(u_R) - f(u_L) = S(u_R - u_L) \quad (6)$$

où S est la vitesse de propagation de la discontinuité, et u_R (resp. u_L) est la valeur à droite (resp. à gauche) de la discontinuité. Cette condition donne un ensemble de solutions faibles parmi lesquelles existe une solution physique qui vérifie la condition d’entropie :

$$\frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \geq S \geq \frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \quad \text{pour tout } u \text{ compris entre } u_L \text{ et } u_R \quad (7)$$

Tirant profit de cette inégalité, le problème à résoudre revient à traiter l’équation [2] :

$$\partial_t u + \partial_x(f + g) = 0 \quad (8)$$

dont la solution vérifie la loi de conservation originale (1) et ses conditions (6) et (7) lorsque :

- (i) $g(u, t) = 0$ pour u n’appartenant pas à la discontinuité ;
- (ii) $g(u, t) \cdot \text{signe}[u_R - u_L] > 0$ pour u compris entre $u_L(t)$ et $u_R(t)$.

Si u_j désigne la solution de (1) obtenue par un schéma TVD, alors l'opérateur de compression artificielle u_Δ est :

$$u_\Delta = u_j - \hat{\lambda}/2(\theta_{j+1/2}G_{j+1/2} - \theta_{j-1/2}G_{j-1/2}) \quad (9)$$

où $\hat{\lambda} \leq 1$ assure la stabilité de l'opérateur u_Δ . $G_{j+1/2} = g_j + g_{j+1} - |g_{j+1} - g_j| \cdot \text{signe}\{\Delta_{j+1/2}u\}$ avec $g_j = \text{signe}\{\Delta_{j+1/2}u\} \cdot \max\{0, \min[|\Delta_{j+1/2}u|, \text{signe}\{\Delta_{j+1/2}u\} \cdot \Delta_{j-1/2}u]\}$ permet de respecter la condition (ii) et de préserver la monotonie. $\theta_{j+1/2} = \max(\hat{\theta}_j, \hat{\theta}_{j+1})$ est un sélecteur automatique qui permet de n'ajouter qu'une erreur en $O((\Delta x)^2)$ dans les régions où u et sa dérivée sont bornées, avec :

$$\hat{\theta}_j = \begin{cases} \frac{|\Delta_{j+1/2}u| - |\Delta_{j-1/2}u|}{|\Delta_{j+1/2}u| + |\Delta_{j-1/2}u|} & \text{si } |\Delta_{j+1/2}u| + |\Delta_{j-1/2}u| > \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre que l'on choisira convenablement.

On note que l'on peut choisir de ne pas appliquer l'ACM à chaque itération (et de l'appliquer plusieurs fois). Lors du traitement d'une équation de transport, ceci peut permettre d'éviter de re-compresser une discontinuité étalée sous l'action de la diffusion réelle.

4. Adaptation de l'ACM au cas des discontinuités de contact

L'application de l'ACM permet de limiter l'action de la dissipation du schéma initial au voisinage immédiat des discontinuités. Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient de ne pas distinguer une discontinuité étalée d'un simple fort changement de gradient, et donc une compression exagérée peut être observée dans des régions de variations régulières (voir Fig. 2). Il convient alors d'ajouter à l'opérateur de compression u_Δ un « détecteur de discontinuité » qui pourra identifier les zones où l'ACM doit réellement s'appliquer. Celui-ci vérifie : $S_{j+1/2} = 1$ si on est dans une zone de discontinuité effective, sinon $S_{j+1/2} = 0$ et l'ACM ne s'appliquera pas. L'opérateur de compression artificielle (9) devient :

$$u_\Delta = u_j^n - \hat{\lambda}/2(S_{j+1/2}\theta_{j+1/2}G_{j+1/2} - S_{j-1/2}\theta_{j-1/2}G_{j-1/2}) \quad (11)$$

Le but est d'éviter de compresser des zones non identifiées en tant que zones de discontinuité, mais qui présentent un changement de pente brutal. Cette procédure est effectuée en considérant la forme géométrique d'une discontinuité numériquement étalée, tout en s'appuyant sur des conditions de régularité des variations de la solution. Il s'agit d'appliquer l'ACM en $j \pm 1/2$ si les rapports des pentes autour de u_j dépassent certaines limites, qui correspondent aux limites pour qu'un schéma classique de second ordre soit TVD. On propose alors :

$$S_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Delta_{j+1/2}u| > 2|\Delta_{j+3/2}u| \text{ et } |\Delta_{j-1/2}u| > 2|\Delta_{j-3/2}u| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $S_{j+1/2} = \max\{S_j, S_{j+1}\}$ pour conserver la forme conservative du schéma. On note que cette limitation laisse libre le rapport $\Delta_{j+1/2}u/\Delta_{j-1/2}u$.

Sur la Fig. 2 sont présentés les résultats du cas $f = a \cdot u$ où l'on a considéré le schéma TVD avec le limiteur Superbee, auquel on a ajouté l'ACM. Les simulations, effectuées avec $\hat{\lambda} = 0,8$, $\lambda a = 0,4$ et $\epsilon = \min_j\{\Delta_{j+1/2}u\}/100$, montrent que l'ACM permet de représenter les discontinuités mais comprime aussi des zones de variation régulière. L'ajout du sélecteur permet d'éviter cette compression indésirable tout en améliorant la résolution au niveau des discontinuités.

5. Application à la Manche Orientale

Pour illustrer les améliorations obtenues avec les schéma TVD, on utilise un modèle hydrodynamique 2D [6]. Ce modèle permet d'étudier la dynamique des courants de marée dans la zone littorale du

Pas-de-Calais. Dans la Manche Orientale, la marée semi-diurne est intense et les courants atteignent en certains endroits une vitesse supérieure à dix noeuds en période de vive-eau. Ceci impose aux masses d’eaux des déplacements horizontaux de plusieurs dizaines de kilomètres. Le transport est alors dominé par la convection horizontale, et la prédiction de l’évolution des concentrations passe par une bonne approximation des termes convectifs dans l’équation de transport (voir [6]). Ce modèle résout les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles, intégrées suivant une verticale, astreintes aux hypothèses d’incompressibilité, de Bousinesq et d’équilibre hydrostatique. Les équations de continuité, de quantité de mouvement et de concentration, sont données par :

$$\partial \eta_t + \nabla \cdot (H\mathbf{v}) = 0 \tag{12}$$

$$\partial (H\mathbf{v})_t + \nabla (H\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + f\mathbf{k} \wedge (H\mathbf{v}) = -gH\nabla\xi + \nabla \cdot (A_h\nabla(H\mathbf{v})) - \frac{\tau_b}{\rho_0} \tag{13}$$

$$\partial (HC)_t + \nabla (HC) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (A_h\nabla(HC)) \tag{14}$$

où $\mathbf{v} = \frac{1}{H} \int_{-z_b}^{\eta} (u, v) dz$ est le vecteur vitesse horizontale intégrée suivant une verticale, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $H = \eta + h$ est la profondeur totale avec η est la dénivellation de la surface libre et h est la profondeur, g est l’accélération de la pesanteur; ρ est la densité de l’eau; C est la concentration du sel, $f = 2\Omega \sin \Theta$ est le paramètre local de Coriolis où Ω est la rotation de la terre et Θ est la latitude; A_h est le coefficient de viscosité turbulente horizontale, supposée constante; τ_b désigne le vecteur contraintes au fond déterminé

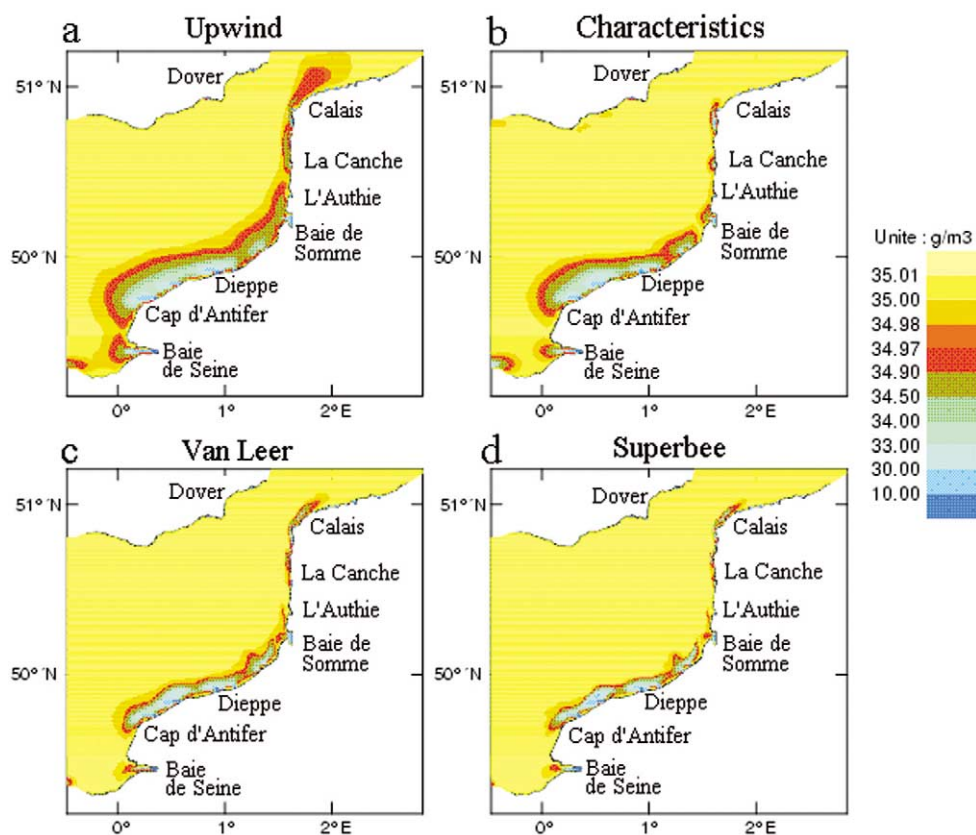


Figure 3. Simulation de la bande de dessalure suivant différents schémas numériques.

Figure 3. Simulation of the width of the fresh water band following different schemes.

par la formule de Chézy : $(\tau_b^x, \tau_b^y) = (\rho g / C_h^2) \|\mathbf{v}\| \mathbf{v}$; $C_h \simeq 77,50 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ étant le coefficient de Chézy. Cette valeur est obtenue en calibrant les résultats du modèle avec ceux de mesures issues de SHOM. Aux équations (12)–(14), sont associées des conditions aux limites et initiales (voir [6]).

L'évolution et la diffusion de la concentration en sel est prise en compte en considérant les débits moyens mensuels des principales sources d'eaux douces, présentées le long du littoral français. Parmi ces sources, on cite la baie de Seine ($600 \text{ m}^3/\text{s}$), la baie de Somme ($40 \text{ m}^3/\text{s}$), la Canche ($15 \text{ m}^3/\text{s}$) etc. Sur les Figs. 3a–3d est présentée l'évolution du panache de la salinité suivant 4 schémas numériques. Elles montrent que le schéma upwind (Fig. 3a), habituellement utilisé dans les écoulements côtiers, est très diffusif et surestime l'étalement de ce panache. Cet étalement est réduit en utilisant la méthode des caractéristiques (Fig. 3b), mais reste surestimé par rapport aux mesures in situ [7]. Une amélioration de l'estimation de la bande de dessalure est obtenue en utilisant des schémas limiteurs de pentes de type : Van Leer et Superbee (Figs. 3c et 3d). Le dernier limiteur donne de meilleurs résultats et permet de retrouver une structure frontale séparant eaux côtières et eaux du large, conformément aux observations [7].

6. Conclusion

Cette étude concerne la diffusion des concentrations passives dans les milieux océaniques et côtiers, en présence de forts gradients. Il a été montré que les schémas TVD avec limiteur de pente permettent de limiter la diffusion des solutions, et d'éviter l'apparition d'oscillations numériques sauf au niveau des discontinuités où un étalement de la solution est constaté. En ajoutant la compression artificielle (ACM) en post-traitement, une amélioration est observée dans ces régions, mais la solution risque d'être altérée en dehors de ces régions. Nous avons donc amélioré cette procédure de compression en ajoutant une fonction « détecteur de discontinuité ».

Remerciements. Les auteurs remercient le Professeur S. Candel pour ses annotations et remarques constructives.

Références bibliographiques

- [1] A. Harten, High-resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49 (1983) 357–393.
- [2] A. Harten, The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities, I. Single conservation laws, *Pure Appl. Math.* 30 (1977) 611–638.
- [3] E. Godlewski, P.-A. Raviart, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, SMAI, Math. Appl., Vol. 3/4, Ellipses-Edition Marketing, Paris, 1991.
- [4] P.K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (5) (1984) 995–1011.
- [5] Y.H. Jeng, U.J. Payne, An adaptive TVD limiter, *J. Comput. Phys.* 118 (1995) 229–241.
- [6] K.D. Nguyen, A. Ouahsine, 2D numerical study on tidal circulation in the Strait of Dover, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering* 123 (1997) 8–15.
- [7] L.A. Nash, S.R. Boxal, Water fluxes through the Strait of Dover, in: *Fluxmanche, First Annual Progress Report*, June 1990–May 1991, 1992, pp. 38–55.
- [8] J.M. Brylinski, Y. Lagadeuc, L'interface eaux côtières/eaux de large dans le Pas-de-Calais : Une zone frontale, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* 311 (1990) 535–540.
- [9] A. Ouahsine, H. Smaoui, Flux-limiter schemes for oceanic tracers. Applications to the English Channel tidal model, *J. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 179 (1999) 307–325.