

# L'identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis

Michel Grédiac<sup>a</sup>, Evelyne Toussaint<sup>a</sup>, Fabrice Pierron<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire d'études et de recherches en mécanique des structures, Université Blaise Pascal Clermont II, 24, avenue des Landais, BP 206, 63174 Aubière cedex, France

<sup>b</sup> Laboratoire de mécanique et procédés de fabrication, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, rue Saint-Dominique, BP 508, 51006 Châlons-en-Champagne cedex, France

Reçu le 13 novembre 2001 ; accepté après révision le 9 janvier 2002

Note présentée par Huy Duong Bui.

---

## Résumé

Cette Note présente une procédure d'identification de paramètres pilotant des lois de comportement de matériaux à partir de champs cinématiques hétérogènes. Cette procédure est directe et évite les calculs itératifs des techniques de recalage par éléments finis. *Pour citer cet article* : M. Grédiac et al., *C. R. Mécanique 330 (2002) 107–112*. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des solides numérique / anisotropie / composites / identification / problèmes inverses**

## Identification of the mechanical properties of materials with the virtual fields method, an alternative to finite element model updating

## Abstract

A method allowing the identification of parameters that govern constitutive equations of materials is proposed in this Note. These parameters are identified from heterogeneous strain fields. The method is direct so that iterative calculations based on finite element model updating are avoided. *To cite this article*: M. Grédiac et al., *C. R. Mécanique 330 (2002) 107–112*. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**computational solid mechanics / anisotropy / composites / identification / inverse problem**

---

## Abridged English version

The identification of parameters that govern the constitutive equations of advanced materials can be performed by processing heterogeneous strain fields using mixed experimental/numerical strategies. The aim is here to describe a direct identification procedure based on a relevant use of the principle of virtual work with so-called special virtual fields.

The principle of virtual work is first recalled in Eq. (1). Feeding the constitutive equations of an orthotropic elastic body leads to Eq. (2). The Virtual Fields Method (VFM) consists in writing this equation with particular virtual fields. If as many independent virtual fields as unknown parameters  $Q_{ij}$  are found, a

---

Adresses e-mail : grediac@lermes.univ-bpclermont.fr (M. Grédiac); toussaint@lermes.univ-bpclermont.fr (E. Toussaint); Fabrice.Pierron@chalons.ensam.fr (F. Pierron).

linear system is obtained and the unknown parameters are found by inversion. This method has been first proposed in [3]. It has been recently applied to various problems of elastic parameters identification ([6] for instance). The main drawback of this procedure is the choice of the virtual fields. This choice was intuitive until now. In order to render the approach systematic and therefore much more attractive, a procedure for automatically constructing the virtual fields is proposed.

A *special* virtual field  $\hat{\epsilon}^*$  is such that all the coefficients of the unknown parameters in Eq. (2) are zero apart from one which is unity (Eqs. (3)). Then any unknown parameter  $Q_{pq}$  is directly identified thanks to Eq. (4), in which it clearly appears that the unknown parameter is equal to the virtual work produced with the special virtual displacement field.

Such an inverse problem is usually solved by performing iterative calculations with the Finite Element Method (FEM) [1,2]. Hence both the principles of the FEM and the VFM are plotted in Fig. 2. Each of these two methods can be considered as the solution of two different problems (problems 1 and 2). Two important drawbacks are avoided with the virtual fields method:

- (i) iterative calculations are avoided;
- (ii) it is only necessary to know the resulting force  $F$  of the applied loading along  $\mathbf{t}$ , and not its distribution.

The construction of the special virtual fields can be performed as follows. A basis of functions like polynomials is chosen in Eq. (5) and the goal is to determine the coefficients  $A_{ij}$  and  $B_{ij}$  of these basis functions. Two conditions will serve as a guide. First, the virtual strain field derived from  $\hat{\mathbf{u}}^*$  must verify Eqs. (6) when  $Q_{11}$  is the unknown. The location of the ‘1’ is moved in these equations when the other stiffness components are the unknowns. Second,  $\hat{\mathbf{u}}^*$  is admissible, i.e. it is null at the supporting points and this leads to Eqs. (7). Both conditions lead to a linear system where the  $k$   $A_{ij}$ ’s and  $B_{ij}$ ’s are the unknowns, with  $k = (m + 1) \times (n + 1) + (p + 1) \times (q + 1) - 2$ .  $m, n, p, q$  are chosen in such a way that the number of equations is lower than  $k$ . Then  $6 \times 6$  matrices are extracted from this rectangular matrix and inverted when the determinant is greater than a fixed threshold value. The remaining  $A_{ij}$ ’s and  $B_{ij}$ ’s must be set to zero for stability reasons. The coefficients found after inversion define a special virtual field which provides the unknown parameter. Numerical simulations have shown that the special virtual fields are not unique for each unknown stiffness component and one must choose the best one. The criterion used here is based on the sensitivity of the identified component to noisy data: the values which are the less sensitive are considered as final identified values. The procedure has been applied to the loading case in Fig. 1(b). The strain field is provided by a finite element programme. It is considered as input data. The constitutive material is an orthotropic glass-epoxy. The identified values reported in Table 1, line 2 are very close to the reference values, even when noisy data are processed (line 3).

## 0. Introduction

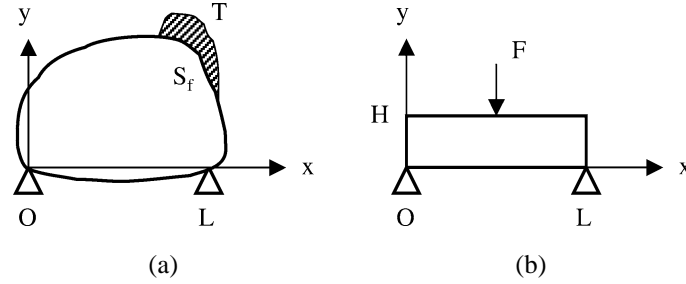
Les paramètres qui pilotent des lois de comportement de matériaux avancés peuvent être identifiés à partir d’un essai unique générant un champ de déformations hétérogène. Ce problème est résolu généralement par recalage de modèles avec la Méthode des Eléments Finis (MEF) [1,2]. L’objectif est ici de proposer une amélioration d’une méthode alternative dite Méthode des Champs Virtuels (MCV) [3] fondée sur l’introduction de champs auxiliaires également utilisés en thermique [4,1]. On décrit ici un principe de construction automatique de champs optimaux conduisant à une identification directe des paramètres.

### 1. Principe de la méthode

#### 1.1. Méthode des champs virtuels

La MCV est fondée sur le principe des travaux virtuels (PTV). En contraintes planes, avec un échantillon d’épaisseur  $e$  (voir Fig. 1(a)), le PTV s’écrit

$$e \int_S \sigma : \epsilon^* dS = \int_{S_f} \mathbf{T}(M) \cdot \mathbf{u}^*(M) dS \quad (1)$$



**Figure 1.** Configurations étudiées. (a) Solide plan de géométrie quelconque. (b) Poutre de très faible élanement.

**Figure 1.** Configurations under investigation.

avec  $\sigma$  champ de contraintes,  $S$  surface de l'échantillon d'épaisseur  $e$ ,  $u^*$  champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible,  $\epsilon^*$  champ de déformations associé,  $\mathbf{T}(M)$  vecteur contrainte au point courant  $M$  de la surface  $S_f$  où l'on impose un chargement de résultante  $F$  mesurée suivant la direction  $\mathbf{t}$ . On suppose que le champ de déformation est connu en surface d'échantillon et l'objectif est de retrouver les paramètres d'une loi de comportement fixée *a priori*. Pour des raisons de concision, on se limite ici à une loi de comportement orthotrope qui dépend de quatre rigidités indépendantes, mais la méthode proposée peut s'appliquer pour identifier des coefficients de fonctions connues *a priori* modélisant des lois de comportement non-linéaires ou des gradients de propriétés. Dans ce cas, l'équation (1) devient

$$\begin{aligned} Q_{11}e \int_S \epsilon_1 \epsilon_1^* dS + Q_{22}e \int_S \epsilon_2 \epsilon_2^* dS + Q_{12}e \int_S (\epsilon_1 \epsilon_2^* + \epsilon_2 \epsilon_1^*) dS + Q_{66}e \int_S \epsilon_6 \epsilon_6^* dS \\ = \int_{S_f} \mathbf{T}(M) \cdot \mathbf{u}^*(M) dS \end{aligned} \quad (2)$$

Pour identifier les  $Q_{ij}$ , une première possibilité consiste à écrire l'équation (1) avec 4 champs virtuels indépendants, ce qui conduit à un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues  $Q_{ij}$ . L'inversion du système, de matrice principale notée  $\mathbf{M}$ , donne les inconnues matérielles recherchées [3]. Jusqu'à présent, ce choix était conduit de façon empirique : il n'était donc pas optimal d'un point de vue numérique. Afin de donner un caractère plus général à la MCV, on propose ici une procédure qui aboutit à la construction automatique de champs virtuels qualifiés ici de *spéciaux*.

## 1.2. Méthode des champs virtuels avec champs spéciaux

On appelle champ virtuel spécial un champ noté  $\hat{u}^*$  qui, dans l'équation (2), rend nuls tous les coefficients des paramètres à identifier sauf un qui est rendu unitaire. Par exemple, si l'on cherche à identifier  $Q_{pq}$ , on utilise le PTV avec un champ virtuel spécial  $\hat{\epsilon}^*$  tel que

$$\begin{cases} \frac{e}{1 + \delta_{ij}} \int_S (\epsilon_j \hat{\epsilon}_i^* + \epsilon_i \hat{\epsilon}_j^*) dS = 0 & \forall i \neq p \text{ ou } j \neq q \\ \frac{e}{1 + \delta_{ij}} \int_S (\epsilon_j \hat{\epsilon}_i^* + \epsilon_i \hat{\epsilon}_j^*) dS = 1 & \text{si } i = p \text{ et } j = q \end{cases} \quad (3)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.  $Q_{pq}$  est donc égal au travail virtuel des efforts extérieurs :

$$Q_{pq} = \int_{S_f} \mathbf{T}(M) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(M) dS \quad (4)$$

Avec la formaliste décrit paragraphe 1.1, cela revient à trouver 4 champs  $\hat{\mathbf{u}}^*$  tels que la matrice  $\mathbf{M}$  soit la matrice unité :  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ .

1.3. Comparaison avec le recalage de modèles éléments finis

La plupart des techniques d'identification étant basées sur le recalage par éléments finis, on compare ces deux approches en représentant Fig. 2 les diverses étapes de la MEF et de la MCV. Chacune peut être considérée comme une méthode de résolution *directe* de deux problèmes différents appelés ici 1 et 2. Avec les méthodes de résolution du problème 2 par recalage, on construit une fonction-coût avec la somme des écarts quadratiques entre grandeurs cinématiques calculées et mesurées. Cet écart est minimisé par rapports aux rigidités entrées dans le logiciel EF. Deux problèmes importants sont évités avec la MCV :

- (i) les calculs itératifs disparaissent, ce qui réduit les temps de calcul et évite le problème du choix des valeurs initiales ;
- (ii) le problème de la modélisation correcte de la répartition des effort sur  $S_f$ , généralement inconnue en pratique, peut être évité ici en construisant un champ virtuel qui ne fasse travailler que la composante mesurée de la résultante  $\mathbf{F}$  de cette répartition [5] en imposant  $\hat{\mathbf{u}}^*(M) = \alpha \cdot \mathbf{t} \forall M \in S_f, \alpha \in \mathbb{R}$ .

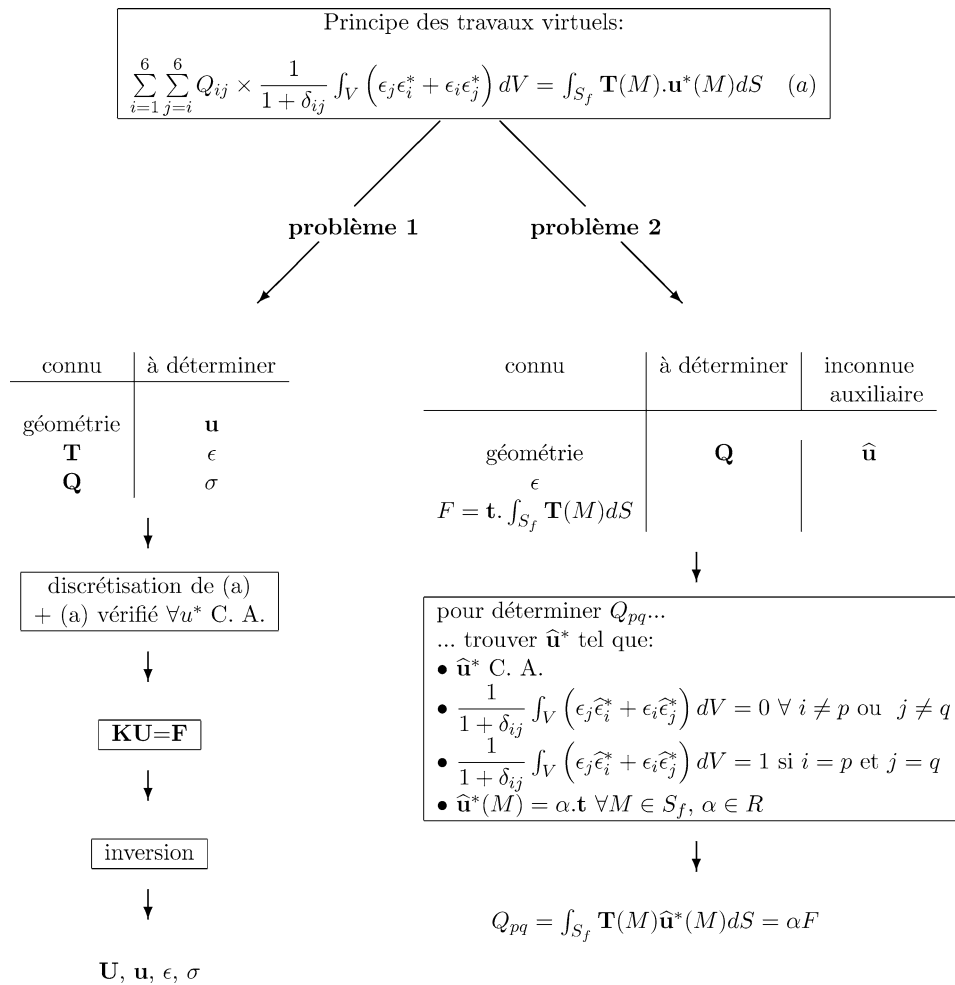


Figure 2. La MEF, solution du problème 1. La MCV, solution du problème 2.  
 Figure 2. The FEM, solution of problem 1. The VFM, solution of problem 2.

## 2. Construction des champs virtuels spéciaux

La construction des champs virtuels spéciaux peut s'effectuer de la façon suivante. On choisit d'abord une base de fonctions indépendantes, ici des polynômes, qui permet d'exprimer les champs virtuels

$$\hat{u}_x^* = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} \left(\frac{x}{L}\right)^i \left(\frac{y}{H}\right)^j, \quad \hat{u}_y^* = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q B_{ij} \left(\frac{x}{L}\right)^i \left(\frac{y}{H}\right)^j \quad (5)$$

où  $L$  et  $H$  sont des grandeurs caractéristiques de l'échantillon suivant  $x$  et  $y$ . Le problème revient alors à déterminer les  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  en respectant deux conditions. D'abord, l'un des coefficients des  $Q_{ij}$  doit être égal à 1 dans l'expression du PTV, les autres étant nuls. Par exemple, pour identifier  $Q_{11}$ , on écrit les 4 égalités suivantes

$$\begin{cases} e \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} \frac{i}{L} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1} \left(\frac{y}{H}\right)^j \epsilon_x \, dS = 1, & \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^q B_{ij} \frac{j}{H} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^i \left(\frac{y}{H}\right)^{j-1} \epsilon_y \, dS = 0 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} \frac{i}{L} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1} \left(\frac{y}{H}\right)^j \epsilon_y \, dS + \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^q B_{ij} \frac{j}{H} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^i \left(\frac{y}{H}\right)^{j-1} \epsilon_x \, dS = 0 \\ \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{j}{H} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^i \left(\frac{y}{H}\right)^{j-1} \epsilon_s \, dS + \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^q B_{ij} \frac{i}{L} \int_S \left(\frac{x}{L}\right)^{i-1} \left(\frac{y}{H}\right)^j \epsilon_s \, dS = 0 \end{cases} \quad (6)$$

On introduit ensuite l'admissibilité du champ, ici  $\hat{\mathbf{u}}^*(0, 0) = 0$  et  $\hat{\mathbf{u}}^*(L, 0) = 0$ , ce qui implique

$$A_{00} = B_{00} = 0, \quad \hat{u}_x^*(L, 0) = \sum_{i=0}^m A_{i0} = 0, \quad \hat{u}_y^*(L, 0) = \sum_{i=0}^p B_{i0} = 0 \quad (7)$$

Comme  $A_{00} = B_{00} = 0$ , on obtient un système linéaire de 6 équations à  $k = (m + 1) \times (n + 1) + (p + 1) \times (q + 1) - 2$  inconnues.  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  sont choisis de telle sorte que ce système soit sous-déterminé. L'idée est de scruter les mineurs  $6 \times 6$  extraits de la matrice rectangle principale du système et de résoudre le système linéaire  $6 \times 6$  correspondant dans les cas de valeurs absolues de mineurs supérieures à un seuil fixé *a priori*. Des simulations numériques ont montré que les  $k - 6$  inconnues restantes devaient être fixées à 0 pour des raisons de stabilité. Les  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  ainsi trouvés définissent un champ virtuel spécial qui permet l'identification directe du paramètre inconnu  $Q_{11}$ . La même procédure s'applique pour les autres  $Q_{ij}$ , seul le 1 changeant de position dans les équations (6).

Des simulations numériques ont été conduites avec diverses configurations générant des états de déformations hétérogènes, l'objectif étant à chaque fois de retrouver des paramètres entrés dans un modèle éléments finis à partir du traitement du champ de déformations fourni par le modèle éléments finis. Les deux principales conclusions sont les suivantes :

**Tableau 1.** Valeurs de rigidités de référence et identifiées.

**Table 1.** Reference and identified values.

		$Q_{11}$	$Q_{22}$	$Q_{12}$	$Q_{66}$
		(GPa)	(GPa)	(GPa)	(GPa)
Valeurs de référence		40,92	10,23	3,07	4,00
Valeurs identifiées		41,09	10,23	3,07	4,00
sans bruit					
Valeurs identifiées	Moyenne	41,10	10,23	3,06	4,00
avec données bruitées	Coef. de variation	0,29 %	0,45 %	0,86 %	0,08 %

- (i) pour chaque inconnue  $Q_{ij}$ , les champs virtuels spéciaux ne sont pas uniques. Chacun correspond à une estimation différente de l'inconnue à déterminer. Avec des données non bruitées, ces valeurs restent très proches des valeurs de référence. Si les données sont bruitées, ces valeurs se distribuent autour de la valeur de référence et la sélection de la « meilleure » estimation se pose ;
- (ii) cette sélection s'effectue sur le critère de la sensibilité la plus faible à un bruit de mesure sur les données. Une première méthode, très globale, consiste à garder le mineur présentant le meilleur conditionnement et à résoudre le système correspondant. Une deuxième méthode, plus fine, consiste à ajouter volontairement une erreur de type décalage sur les coordonnées des points de mesure et à ne garder que les valeurs identifiées présentant la sensibilité la plus faible à cette erreur.

Des simulations ont été conduites pour un verre/époxyde sur la géométrie de la Fig. 1(b) ( $L = 5H$ ) modélisée avec ANSYS et 2000 éléments. Seul un effort ponctuel  $F$  est imposé ici. On prend  $m = 3$ ,  $n = 3$ ,  $p = 3$ ,  $q = 2$ , ce qui aboutit à une matrice rectangle  $6 \times 26$  de laquelle  $26!/(6!20!) = 230230$  mineurs sont extraits. Le traitement des 1639 cas pour lesquels la valeur absolue du déterminant dépasse une valeur seuil égale à 10 % de la valeur absolue du déterminant maximum de tous les mineurs extraits aboutit aux valeurs identifiées reportées Tableau 1, ligne 2, qui sont très proches des valeurs de référence. La méthode, appliquée 30 fois à un champ de déformations bruité d'écart-type égal à 3 % du maximum de la valeur absolue de la déformation réelle, conduit aux valeurs moyennes et coefficients de variation (l'écart-type divisé par la moyenne) reportés Tableau 1, ligne 3. On constate la bonne stabilité des valeurs identifiées.

### 3. Conclusion

Les principes de la construction de champs virtuels spéciaux ont été énoncés. De tels champs, utilisés avec la MCV, permettent d'identifier directement des rigidités anisotropes de solides plans, ce qui constitue l'un des principaux avantages par rapport à la technique classique de recalage itératif par éléments finis.

### Références bibliographiques

- [1] H.D. Bui, Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, Eyrolles, 1993.
- [2] M.-H. Arafah, C. Knopf-Lenoir, F. Rouger, Conception optimale d'essais de flexion de plaques orthotropes et identification, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 321 (1995) 351–354.
- [3] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 309 (1989) 1–5.
- [4] S. Andrieux, A. Ben Abda, Identification de fissures planes par une donnée de bord unique : un procédé direct de localisation et d'identification, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 315 (1992) 1323–1328.
- [5] M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, Applying the virtual fields method with special virtual fields for the direct determination of materials from whole-field data, Rapport interne 12/2000, Université Blaise Pascal Clermont II, 2000.
- [6] M. Grédiac, F. Pierron, A T-shaped specimen for the direct characterization of orthotropic materials, Int. J. Numer. Methods Engrg. 41 (1998) 293–309.