

# Contribution de la logique floue à la représentation des dimensions des pièces d'un ensemble mécanique

Cédric Lelu, Marc Dahan

Laboratoire de mécanique appliquée R. Chaléat, 24, Chemin de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté après révision le 17 décembre 2001

Note présentée par Jacques Aarsal.

---

## Résumé

Le processus de cotation d'un ensemble mécanique est une étape longue et complexe. Les dimensions des pièces sont généralement représentées à l'aide de vecteurs à deux dimensions ou de torseurs. Nous présentons dans cet article une nouvelle représentation qui utilise les outils de la logique floue. Nous détaillons les méthodes de calcul des cotes floues et les appliquons à la détermination des positions extrêmes d'un système bielle manivelle en faisant intervenir les incertitudes sur les dimensions de chaque élément. *Pour citer cet article : C. Lelu, M. Dahan, C. R. Mécanique 330 (2002) 133–140.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des solides numérique / cotation fonctionnelle / logique floue / incertitude / dimensionnement / conception**

## Fuzzy logic contribution to the representation of mechanical assembly pieces

## Abstract

The cotation process of a mechanical assembly is a long and complex step of the design. The piece dimensions are often modeled with 2D vectors or torsors. A new representation based on fuzzy logic is presented in this article. The calculus methods of fuzzy dimensions are examined and an application to the extreme positions of a rod-crank system with uncertain dimensions is also presented. *To cite this article: C. Lelu, M. Dahan, C. R. Mécanique 330 (2002) 133–140.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**computational solid mechanics / functional cotation / fuzzy logic / uncertainties / dimensioning / design**

---

## *Abridged English version*

To obtain a mechanical product composed of many pieces, the design department and the production office have to make several choices about the dimensions, the planning process, the machines which manufacture the pieces. These consecutive stages involve important economical consequences. A new extension of the classical method based on fuzzy logic is proposed in this paper in order to help the final choice. Firstly, we define the fuzzy dimensions by three fuzzy sets associated with the three expressions: 'the dimension is too little whatever the other dimensions of the other pieces are', 'the dimension is correct whatever the other dimensions of the other pieces are' and 'the dimension is too big whatever the other

---

Adresses e-mail : cedric.lelu@univ-fcomte.fr (C. Lelu); marc.dahan@univ-fcomte.fr (M. Dahan).

dimensions of the other pieces are (see Fig. 1). The ten parameters of the full representation can be deduced from the classical form of the dimensions chains (see formulae (2)–(5)). The short form (see Fig. 1b) is defined with a 4-dimensional vector ( $C_{\min}$ ,  $C_{\max}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ). We shall use it for the continuation of this paper.

Then, we compute the fuzzy dimensions of a particular assembly (see Fig. 2) to explain the equations and to calculate the 4 values for each of the two fuzzy dimensions. We obtain a system of 6 equations and 8 unknown values (see formula (6)). We use the value of the medium dimensions given by the definition drawing for the two tolerances. The result, explained in formula (7), is an uncertainty distribution, which grouped the pessimistic and the optimistic visions. Using Zadeh's extension principle [5], we determine the equivalent fuzzy functions and operators for some arithmetic functions and operators. The uncertainty distribution of the fuzzy dimensions is subjective, so we approximate the result of the extension principle application on functions and operators by trapezoidal intervals. We apply it to an increasing function (see formula (9)) and the addition of two fuzzy intervals (see formula (11)).

We study the position of the sliding block, terminal element of the rod crank assembly. The mathematical model (13) takes into account the following defaults: the length errors ( $\Delta l_2$ ,  $\Delta l_3$ ) of the crank and of the rod, the error of eccentricity ( $\Delta_{\text{exc}}$ ) and the flatness defect ( $\varepsilon$ ) between the rod and the sliding block. We first compute the fuzzy dimensions of the rod and the crank (15) from the functional constraints. We deduce that an assembly including a 49.87 dimension has a possibility measure equal to 0.7 consistent with respect of the constraints. The possibility distribution of the extreme position of the rod-crank assembly computing with the extension principle and the approximation listed previously is given by Eq. (16). The result informs the designer of the real positions of the systems according to the different defaults.

Fuzzy logic is not today a used mathematical tool for mechanical parts design, but imprecision modelisation with fuzzy logic permits us to make the different calculations easier. The uncertainty distribution obtained is a trapezoidal interval. It supplies information about the positions which could be reached by the mechanism. The representation of the dimensions by three fuzzy sets makes possible the expression of other constraints such as economical constraints. We are realising a software program based on fuzzy inference rules in order to resolve the inverse problem: to compute the different tolerances, respecting functional and economical constraints.

---

## 1. Introduction

Le processus de calcul des cotes des différentes pièces d'un ensemble mécanique prend en compte les moyens de production et les contraintes de fonctionnement du mécanisme. Il s'agit donc d'un processus qui intègre aussi bien les compétences du bureau d'étude que celles du bureau des méthodes. Le bureau d'études apprécie les différentes contraintes de fonctionnement comme les intervalles minimums entre deux surfaces en mouvement ou les qualités de serrage souhaitées. Le bureau des méthodes choisit les machines de production, les outils, mais aussi l'ordre d'usinage des différentes surfaces.

Dans cet article, nous proposons de suivre les phases de calcul des valeurs limites d'un assemblage mécanique en étudiant, dans chaque cas, les avantages et inconvénients de la méthode absolue ou statistique. Puis, en nous appuyant sur les hypothèses de la logique floue et de la théorie des possibilités, nous proposons une nouvelle modélisation des cotes et présentons sa mise en oeuvre.

## 2. Modélisation des cotes

### 2.1. Détermination des cotes de fonctionnement

Avant de valider et de transmettre les plans d'un assemblage mécanique à la production, le concepteur détermine les dimensions extrêmes des cotes de chaque pièce. La combinaison de ces dimensions doit vérifier certaines contraintes telles que les dimensions minimales entre deux surfaces en mouvement relatif

ou les contraintes de montage comme le serrage d'un roulement sur un arbre [1]. A cette fin, le concepteur détermine les défauts de fabrication qui n'auront pas de conséquences néfastes sur le fonctionnement du mécanisme. La géométrie idéale est donnée par le plan dessiné préalablement et dont les dimensions servent de base pour une première évaluation de la cohérence du mécanisme.

Puis, il décide pour chaque fonction cinématique les conditions de fonctionnement minimales à appliquer. Le résultat est un intervalle de tolérance composé des valeurs minimales et maximales ou de torseurs des petits déplacements. Ceux-ci généralisent pour les translations et les rotations ce qui existait en une dimension pour la translation. L'hypothèse la plus pessimiste est ensuite généralement utilisée, c'est-à-dire que les dimensions des pièces sont maximales si l'augmentation de la dimension de la pièce provoque une diminution du jeu minimal (et inversement).

## 2.2. La logique floue

Pour modéliser un système complexe, nous pouvons être amenés à traiter des données vagues (exprimées par exemple par les termes : *environ 50*), des données imprécises (*entre 3 et 5*) ou erronées (*à 5 % près*), définies en langage parlé (*petit, grand ...*), soumises à des exceptions (*dans 90 % des cas*) ou incertaines (*peu probable*) [2]. En 1965, le Professeur Zadeh de l'Université Berkeley en Californie définit les sous-ensembles flous à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe [3].

Un des objectifs de la logique floue est de créer des transitions douces entre les états successifs, et donc de permettre à un élément d'appartenir plus ou moins fortement à une classe donnée. Si on considère l'ensemble des éléments, qu'on appelle *l'Univers* et qu'on note  $X$ , on définit  $\mu_A(x)$  le degré d'appartenance de la valeur  $x$  à une variable linguistique représentée par le sous-ensemble flou  $A$ . C'est une fonction de  $X$  vers  $[0, 1]$ . Le sous-ensemble flou  $A$  est donc constitué par des couples  $(x, \mu_A(x)) \in X \times [0, 1]$ . Cette notion est une prolongation de l'appartenance classique à un ensemble, dans le sens où un élément qui appartient totalement à une classe possède un degré d'appartenance à cet ensemble égal à un, et que ce degré vaut 0 lorsque l'élément ne fait pas partie de l'ensemble.

## 2.3. Cotes floues

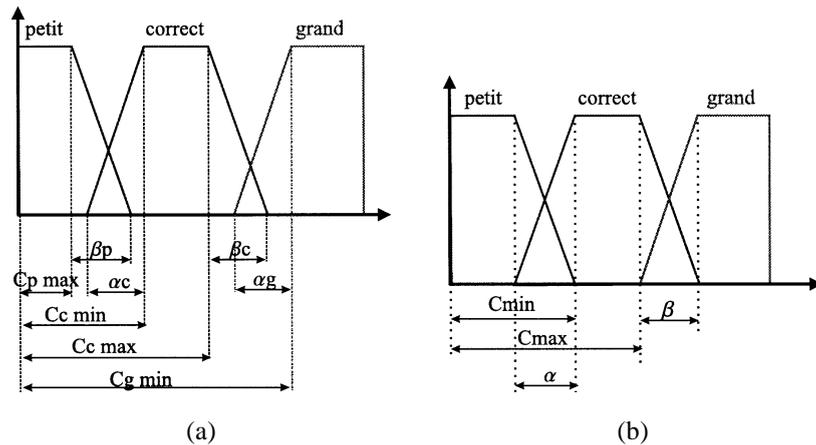
Les dimensions entre surfaces d'une pièce mécanique sont données à l'aide d'un intervalle de tolérance, nécessaire pour permettre les jeux de fonctionnement et rendre l'usinage possible : toute pièce, dont une dimension ne respecte pas ces conditions, est mise au rebut. Pour tenir compte des limites moins nettes entre pièces acceptables et pièces refusées, nous utilisons une formalisation floue des intervalles de tolérance, c'est-à-dire que nous représentons les intervalles sous la forme de nombres flous de types  $L-R$ , normés, et notés  $(C \text{ min}, C \text{ max}, \alpha, \beta)_{LR}$ . Chaque courbe « Droite » et « Gauche » est représentée par les fonctions affines  $L$  et  $R$  définies selon :

$$\begin{cases} L\left(\frac{C \text{ min} - u}{\alpha}\right) & \text{si } C \text{ min} - \alpha \leq u \leq C \text{ min} \\ 1 & \text{si } C \text{ min} \leq u \leq C \text{ max} \\ R\left(\frac{u - C \text{ max}}{\beta}\right) & \text{si } C \text{ max} \leq u \leq C \text{ max} + \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Les fonctions  $L$  et  $R$  sont généralement choisies affines :  $\forall x, L(x) = R(x) = 1 - x$ .

A chaque cote, sont associés ainsi trois sous-ensembles flous : « *petit* », « *correct* » et « *grand* » (Fig. 1). Nous identifions ces trois sous-ensembles en nous servant respectivement des trois propositions suivantes :

- (1) « *la pièce est trop petite, quelles que soient les dimensions des autres pièces respectant les contraintes de fonctionnement pour être assemblée* », représentée par le vecteur  $(-\infty, C_p \text{ max}, 0, \beta_p)$ ,
- (2) « *la pièce est correcte, quelles que soient les dimensions des autres pièces respectant les contraintes de fonctionnement* », représentée par le vecteur  $(C_c \text{ min}, C_c \text{ max}, \alpha_c, \beta_c)$ ,



**Figure 1.** Cotes floues. (a) Représentation complète. (b) Représentation réduite.  
**Figure 1.** Fuzzy tolerances. (a) Full representation. (b) Short representation.

(3) «la pièce est trop grande, quelles que soient les dimensions des autres pièces respectant les contraintes de fonctionnement pour être assemblée», représentée par le vecteur  $(Cg \text{ min}, \infty, \alpha g, 0)$ .

Le sous-ensemble flou «petit» ne possède pas de borne inférieure car toute dimension inférieure à  $Cp \text{ max}$  appartiendra aussi avec un degré d'appartenance maximal (égal à 1) au sous-ensemble flou «petit».

### 3. Cotes de fonctionnement

#### 3.1. Calcul des cotes floues

Pour chacun des trois sous-ensembles flous, nous donnons les conditions vérifiées par les valeurs caractéristiques (Fig. 1) pour arriver à leur détermination [4]. Pour chaque définition, on suppose que les autres cotes qui interviennent dans la chaîne respectent l'ensemble de leurs contraintes propres.

##### 3.1.1. Le calcul du sous-ensemble «correct»

Le sous-ensemble «correct» est caractérisé par quatre valeurs numériques :

(1) l'intervalle  $[Cc \text{ min}, Cc \text{ max}]$  correspond à l'ensemble des dimensions qui respectent les contraintes

$$\text{et} \begin{cases} \text{ou} & \begin{cases} Cc \text{ min} + \sum Ci \text{ min} \geq Cf \text{ min} \\ -Cc \text{ min} + \sum Ci \text{ max} \leq Cf \text{ max} \end{cases} \\ \text{ou} & \begin{cases} Cc \text{ max} + \sum Ci \text{ max} \leq Cf \text{ max} \\ -Cc \text{ max} + \sum Ci \text{ min} \geq Cf \text{ min} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

(2)  $(Cc \text{ min} - \alpha c)$  (respectivement  $Cc \text{ max} + \beta c$ ) correspond aux valeurs en dessous (respectivement au-dessus) de laquelle la dimension étudiée ne permet pas d'avoir une cote correcte :

$$\text{et } \begin{cases} \text{ou} \\ \text{ou} \end{cases} \begin{cases} (C_c \min - \alpha c) + \sum C_i \max \geq C_f \min \\ -(C_c \min - \alpha c) + \sum C_i \min \leq C_f \max \\ (C_c \max + \beta c) + \sum C_i \min \leq C_f \max \\ -(C_c \max + \beta c) + \sum C_i \max \geq C_f \min \end{cases} \quad (3)$$

### 3.1.2. Le calcul du sous-ensemble « grand »

- (1)  $(C_g \min - \alpha g)$  est la dimension maximale pour laquelle il existe une configuration de pièce qui soit trop grande pour au moins une contrainte.

$$\begin{cases} \text{ou} \\ \text{ou} \end{cases} \begin{cases} (C_g \min - \alpha g) + \sum C_i \max \geq C_f \max \\ -(C_g \min - \alpha g) + \sum C_i \min \leq C_f \min \end{cases} \quad (4)$$

- (2)  $C_g \min$  est la cote minimale pour laquelle la pièce sera trop grande pour la contrainte :

$$\begin{cases} \text{ou} \\ \text{ou} \end{cases} \begin{cases} C_g \min + \sum C_i \min \geq C_f \max \\ -C_g \min + \sum C_i \max \leq C_f \min \end{cases} \quad (5)$$

Les deux paramètres  $C_p \max$  et  $\beta p$  du sous-ensemble « petit » sont définis de manière analogue.

### 3.2. Utilisation de la forme réduite

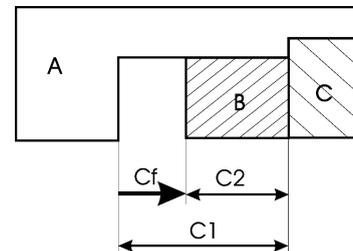
A partir de la forme complète, nous écrivons les regroupements de cotes, provenant du passage aux limites des équations aux inéquations. Nous obtenons donc quatre coordonnées nécessaires à la définition des trois sous-ensembles flous. La forme réduite des cotes floues s'écrit :  $(C \min, C \max, \alpha, \beta)$  (Fig. 1b).

Nous considérons l'assemblage simple représenté Fig. 2. Il intègre un jeu de fonctionnement  $C_f$  entre les pièces A et B, et représente par exemple une contrainte de montage. Son expression correspond à un jeu minimal et maximal :  $C_f = [0, 1; 0, 5]$ . Les relations nécessaires à la détermination des différentes valeurs utiles à la nouvelle modélisation des cotes floues peuvent s'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} C_f \min = C_1 \min - C_2 \max \\ C_f \min = (C_1 \min - \alpha_1) - C_2 \min \\ C_f \min = C_1 \max - (C_2 \max + \beta_2) \end{cases} \quad \begin{cases} C_f \max = C_1 \max - C_2 \min \\ C_f \max = (C_1 \max + \beta_1) - C_2 \max \\ C_f \max = C_1 \min - (C_2 \min - \alpha_2) \end{cases} \quad (6)$$

La première équation de chaque système correspond à l'écriture d'une chaîne de cote par la logique classique. Lorsque le système est sous-contraint, ce qui est le cas présenté ci-dessus, le concepteur ajoute des contraintes supplémentaires, par exemple un intervalle de tolérance pour chaque cote identique. Il utilise

**Figure 2.** Exemple d'assemblage  
**Figure 2.** Example of an assembly.



aussi les informations données par le dessin de définition. Pour résoudre le système (6), nous avons décidé d'utiliser les valeurs moyennes  $\overline{C}_1 = 2$  et  $\overline{C}_2 = 1,7$ .

On en déduit les valeurs  $C_1$  min,  $C_1$  max,  $C_2$  min et  $C_2$  max qu'on introduit dans les quatre équations restantes pour déterminer les largeurs  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  des zones d'incertitudes. On obtient ainsi les cotes floues suivantes :

$$C_1 = (1,9; 2,1; 0,2; 0,2), \quad C_2 = (1,6; 1,8; 0,2; 0,2) \quad (7)$$

qui permettent de représenter la distribution des incertitudes pour chaque pièce en fonction des dimensions effectivement réalisées suivant le schéma de la Fig. 1b.

#### 4. Étude cinématique

##### 4.1. Théorie des possibilités

La théorie des possibilités est fondée sur la logique floue. Son but est de synthétiser un corps de connaissances imprécises mais cohérentes [5]. Elle applique les notions de degré d'appartenance définis par la logique floue aux événements : ce coefficient est alors appelé « possibilité de l'événement » et est noté  $\pi$ . La distribution de possibilité représente l'ensemble des degrés de possibilité. Elle est notée  $\Pi$ . Ainsi, les résultats obtenus dans l'équation (7) sont lus comme l'ensemble des degrés d'appartenance d'une dimension au sous-ensemble flou « correct » pour la logique floue, mais aussi comme la distribution de la possibilité de l'événement « la cote respecte la contrainte fonctionnelle ».

Toutefois, si la mesure de possibilité fournit une information sur l'occurrence d'un événement, elle ne suffit pas pour décrire l'incertitude existante sur cet événement. On définit alors une mesure de nécessité  $N$ , telle que : si  $A$  est certain, alors  $N(A) = 1$  [6]. La mesure de nécessité peut aussi être définie à partir de l'événement inverse :  $N(A) = 1 - \Pi(\neg A)$ . Ainsi, contrairement à la théorie des probabilités, on a besoin de deux nombres pour caractériser un événement.

##### 4.2. Principe d'extension

Le principe d'extension défini par Zadeh en 1975, repris par Dubois [5], permet d'exprimer l'équivalent des fonctions classiques pour la logique floue. Ainsi, le degré d'appartenance de l'image  $B$  par une fonction  $f$  d'un nombre flou  $A$  est donné par l'équation :

$$\pi_B(u) = \sup\{\pi_A(x) \mid x \in X, u = f(x)\} \quad (8)$$

Appliqué aux fonctions croissantes de nombres flous, on obtient :

$$\mu_f = \left( f(C \text{ min}); f(C \text{ max}); \begin{matrix} f(C \text{ min}) - f(C \text{ min} - \alpha); f(C \text{ max} + \beta) - \\ - f(C \text{ max}) \end{matrix} \right)_{LR} \quad (9)$$

Le principe d'extension appliqué aux opérations arithmétiques s'écrit [5] :

$$\mu_{X \oplus Y}(u) = \sup_{u=x \oplus y} [\min(\mu_X(x), \mu_Y(y))] \quad (10)$$

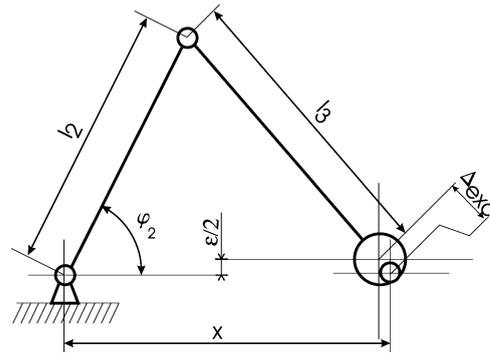
où  $\oplus$  représente l'opération arithmétique considérée.

On détermine la somme de deux nombres flous :

$$\mu_{X+Y} = (C_1 \text{ min} + C_2 \text{ min}; C_1 \text{ max} + C_2 \text{ max}; \alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2)_{LR} \quad (11)$$

On définit ainsi l'équivalent de chaque fonction et opération pour le calcul des nombres flous.

**Figure 3.** Le système bielle–manivelle.  
**Figure 3.** A rod–crank system.



#### 4.3. Exemple de calcul cinématique

L'exemple présenté concerne le système bielle-manivelle représenté en Fig. 3. Nous examinons le modèle mathématique qui prend en considération les erreurs de longueurs de la manivelle  $\Delta l_2$ , de la bielle  $\Delta l_3$  et l'erreur provoquée par la présence d'une excentricité dans le couple joignant la bielle et le coulisseau qui n'est pas représenté sur la Fig. 3. Deux paramètres sont nécessaires : la valeur de l'excentricité  $\Delta_{exc}$  et sa planéité  $\varepsilon$ .

Dans cet exemple, la position du mécanisme bielle-manivelle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X = l_2 \cos(\varphi_2) + \sqrt{l_3^2 - (l_2 \sin(\varphi_2))^2} \quad (12)$$

et la position réelle, compte tenu des défauts de fabrication, devient :

$$X^* = (l_2 + \Delta l_2) \cos(\varphi_2) + \sqrt{(l_3 + \Delta l_3 + \Delta_{exc})^2 - \left( (l_2 + \Delta l_2) \sin(\varphi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2} \quad (13)$$

Nous obtenons ainsi une erreur de position qui dépend de l'angle de rotation de la manivelle :

$$\begin{aligned} \Delta X = & \Delta l_2 \cos(\varphi_2) - \sqrt{l_3^2 - (l_2 \sin(\varphi_2))^2} \\ & + \sqrt{(l_3 + \Delta l_3 + \Delta_{exc})^2 - \left( (l_2 + \Delta l_2) \sin(\varphi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Appliquant les calculs de dimensionnement flous, nous déterminons les quatre éléments des dimensions floues de la bielle et de la manivelle :

$$\begin{cases} l_2 = (49,9; 50,1; 0,1; 0,1)_{LR} \\ l_3 = (199,1; 200,1; 0,1; 0,1)_{LR} \end{cases} \quad (15)$$

Dans ce cas, un assemblage comportant une « pièce 2 » fabriquée à la longueur 49,87 aura une possibilité de 0,7 de respecter les contraintes de fonctionnement. Le calcul des cotes floues fournit une estimation rapide de la possibilité d'avoir un assemblage qui respecte les différentes contraintes de fonctionnement. Le calcul de la distribution de possibilité de la position du système donne le résultat suivant, pour lequel aucune simplification de la fonction de position n'a été nécessaire :

$$\begin{aligned} \pi(A) = & \max_{\varphi} \left[ l_2 \cos(\varphi) + \sqrt{(l_3 + \Delta_{exc})^2 - (l_2 \sin(\varphi) - \varepsilon)^2} \right] \\ = & (149,79; 250,2; 10,21; 0,10)_{LR} \end{aligned} \quad (16)$$

Il nous informe sur les valeurs qui peuvent effectivement être prises par le système, compte tenu des différents intervalles de tolérance.

### **Conclusion**

La logique floue est un outil mathématique encore peu utilisé dans les domaines de la conception. Pourtant, son domaine d'activité est très large. La représentation des imprécisions des différentes modélisations des méthodes de fabrication facilitent les calculs de cinématique et permettent une appréhension plus juste des imprécisions.

En permettant une modélisation des cotes et des contraintes par des sous-ensembles flous, la logique floue donne aussi la possibilité d'exprimer d'autres concepts plus abstraits tels que la complexité de la fabrication ou des critères économiques. Un régulateur par logique floue pourrait alors être utilisé pour optimiser les différentes valeurs en fonction des contraintes de fonctionnement, de fabrication et de productivité.

**Remerciements.** Les remerciements.

### **Références bibliographiques**

- [1] B. Anselmetti, Méthode de tolérancement pour la fonction et la fabrication, ILCE, Février 1995.
- [2] AFNOR, Tablissement d'un processus d'usinage, Tome 2, Méthodes de fabrication et normalisation, Nathan, Paris, 1979.
- [3] L. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 1965.
- [4] C. Lelu, M. Dahan, Representation of tolerances using fuzzy logic, in: VIIth CIRP Int. Seminar on Computer Aided Tolerancing, Cachan, 24–25 April, 2001.
- [5] D. Dubois, H. Prade, Théorie des Possibilités, Masson, Paris, 1985.
- [6] Observatoire Français des Techniques Avancées, Logique Floue, Vol. 14, Masson, Paris, 1994.