

Poroélasticité d'un milieu mésolfissuré : analyse micromécanique

Vincent Pensée^a, Luc Dormieux^b, Djimédo Kondo^a, Vincent Deudé^b

^a Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441, Université de Lille-I, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

^b CERMMO, École nationale des Ponts et Chaussées, 77455 Marne-la-Vallée, France

Reçu le 15 octobre 2001 ; accepté après révision le 17 janvier 2002

Note présentée par Huy Duong Bui.

Résumé

Ce papier est consacré à une étude micromécanique d'un milieu mésolfissuré dans lequel les mésolfissures sont saturées par un fluide sous pression. La démarche proposée permet de construire, sous l'hypothèse de non-interaction entre mésolfissures, les différents potentiels thermodynamiques pouvant être adoptés pour la description du comportement de ce type de milieu. *Pour citer cet article : V. Pensée et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 147–152.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

milieux poreux / micromécanique / poroélasticité / endommagement / mésolfissuration

Poroelasticity of a mesocracked media: a micromechanical approach

Abstract

This paper is devoted to a micromechanical study of elastic media containing fluid saturated mesocracks. Under the non-interacting mesocracks assumption, we present different thermodynamics potentials, which can be adopted for the description of the mechanical behaviour of this class of materials. *To cite this article: V. Pensée et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 147–152.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

porous media / micromechanics / poroelasticity / damage / mesocracking

Abridged English version

The mechanical behaviour of quasi-brittle materials like rocks or concrete is mainly due to the nucleation and growth of mesocracks. At the macroscopic scale, the consequences of this mesocracking are stress-induced anisotropy and degradation of mechanical properties. Analysis of such behaviour can be appropriately done using continuum damage mechanics. Such a modelling approach requires first the choice of the free energy.

In a recent study [1], consisting in a three-dimensional generalization of the work performed by Andrieux et al. [2], the expression of the macroscopic free energy, including the mesocrack opening/closure transition (unilateral effects), has been established.

Adresses e-mail : vincent.pensee@eudil.fr (V. Pensée); dormieux@cermmo.enpc.fr (L. Dormieux); djimedo.kondo@univ-lille1.fr (D. Kondo); deude@cermmo.enpc.fr (V. Deudé).

The present work is devoted to an extension of [1] in the case where mesocracks are saturated by a fluid under pressure p , the set of mesocracks constituting therefore a network of connected porosity.

Consider a representative volume element (r.v.e.) Ω of brittle materials composed of a solid matrix and multiple non-interacting penny-shaped mesocracks. This solid matrix is assumed to be isotropic and linear elastic with stiffness tensor \mathbb{C}^s . The homogenization problem consists of solving M problems (M is the number of mesocracks family). In each problem (P), the solid matrix contains a family of mesocracks, ω , whose unit normal is noted \underline{n} . (P) is decomposed in three sub-problems as indicated in Fig. 1. Therefore, the macroscopic strain \mathbf{E} is the sum of \mathbf{E}^m , $\mathbf{E}^p = -\frac{p}{3k^s}\delta$ and $\mathbf{E}^d = \mathcal{N} \int_{\omega^+} (\underline{n} \otimes^s [\underline{u}])$ where $[\underline{u}]$ is the displacement jump vector on the mesocracks faces and \mathcal{N} is the density (number by unit volume) of mesocracks. $[\underline{u}]$ can be described by two parameters: $\beta = \mathcal{N} \int_{\omega^+} [u_n](\underline{x})$ and $\underline{\gamma} = \mathcal{N} \int_{\omega^+} \{[\underline{u}] - [u_n]\underline{n}\}(\underline{x})$. β characterizes the opening state of mesocracks and, by definition, the porosity of mesocracks. $\underline{\gamma}$ represents the sliding vector on the mesocracks faces. So, \mathbf{E}^d is defined by (1).

Due to the fact that the matrix is elastic, and using the decomposition of the displacement field, the macroscopic free energy Ψ of the solid phase is defined by (2). After integration and using the results of [1], Ψ is expressed as (4) where $d = \mathcal{N}a^3$ is the crack density parameter.

If mesocracks are opened or closed (without friction) and the density parameter d is fixed, the material behaves elastically and the intrinsic dissipation cancels. We deduce (6) and (7) which links β and $\underline{\gamma}$ respectively to $\boldsymbol{\Sigma}$ and p and to \mathbf{E} and p . (7) is obtained under the hypothesis of a dilute mesocrack density. Putting (7) in (4), we obtain the expression (8) of the macroscopic free energy $\Psi(\mathbf{E}, p)$.

Since $\dot{\Psi} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + p\dot{\beta}$, Ψ , with \mathbf{E} and p as arguments, is not a thermodynamic potential. Following Deudé et al. [7], we introduce $\Psi^*(\mathbf{E}, p) = \Psi(\mathbf{E}, p) - p\beta$. Ψ^* given by (9), which represents the macroscopic potential energy, is a thermodynamic potential. The states laws, associated to Ψ^* , are given by (10). These expressions have the same form as Biot's equations [4]. So the Biot's tensor \mathbf{B} and the Biot's modulus M are identified for the mesocracked media.

Remarks 1 and 2 complete the preceding result by giving the expressions of the thermodynamic potential for two different choices of states variables, namely (\mathbf{E}, β) and $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$.

1. Introduction

Le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles tels que les roches et les bétons, doit sa spécificité à la présence et la propagation de mésolfissures. Celles-ci sont à l'origine de différents phénomènes observés à l'échelle macroscopique tels que l'anisotropie induite et la dégradation des propriétés mécaniques qui peuvent être analysés dans le contexte de la mécanique de l'endommagement.

Dans une étude récente [1], généralisant au cas tridimensionnel les travaux d'Andrieux et al. [2], il a été présenté une démarche micromécanique permettant de construire le potentiel thermodynamique macroscopique des milieux mésolfissurés en incluant les effets de refermeture des mésolfissures.

Dans de nombreux cas pratiques, notamment en géomécanique, les mésolfissures peuvent être saturées par un fluide sous pression, l'ensemble des mésolfissures constituant alors un réseau de porosité connectée. Dans cette étude, on n'abordera pas le cas de fissures partiellement saturées (cf. [3]). La poroélasticité classique a été initialement introduite par Biot [4,5]. Budiansky et O'Connell [6] l'ont abordée dans le cadre des milieux fissurés isotropes. Nous proposons une extension de [1] incluant la présence d'un fluide et les effets d'anisotropie induite par la mésolfissuration. Nous présenterons les différents potentiels thermodynamiques et les lois d'états qui leur sont associées. Le but de cette démarche est de quantifier, en vue de la modélisation des processus d'endommagement fragile, la contribution de la mésolfissuration à la modification des propriétés poroélastiques.

2. Micromécanique des milieux contenant des mésosfissures saturées

On désigne par Ω le volume élémentaire représentatif (v.e.r.) d'un milieu constitué d'une matrice solide isotrope, élastique linéaire, de tenseur d'élasticité \mathbb{C}^s (modules : E^s, ν^s), comportant de nombreuses mésosfissures supposées planes. La i ème mésosfissure est notée ω^i ; le vecteur unitaire \underline{n}^i normal à ω^i détermine l'orientation de ω^i et ses faces ω^{i+} et ω^{i-} . Les fissures sont supposées de petite taille par rapport à la taille caractéristique du v.e.r. et sont saturées par un fluide à la pression p . On ne s'intéresse, ici, qu'au cas des évolutions isothermes.

Le v.e.r. ainsi défini peut être vu comme celui d'un matériau multiphasé (les phases « mésosfissures » étant ici distinguées par leur orientation). Comme dans le cadre des méthodes d'homogénéisation des milieux aléatoires, il s'agit de résoudre M problèmes, M étant le nombre de phases. Dans chacun d'entre eux, une mésosfissure, représentant une famille quelconque, notée ω , de normale \underline{n} , est plongée dans un milieu de référence infini ayant, ici les propriétés du matériau sain. Les conditions aux limites sont de type contraintes macroscopiques homogènes au contour Σ ou déformations macroscopiques homogènes au contour \mathbf{E} . Dans le premier cas, on a : $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \sigma(\underline{x}) \cdot \underline{\nu}(\underline{x}) = \Sigma \cdot \underline{\nu}(\underline{x})$ où $\underline{\nu}$ est le vecteur normal au contour du v.e.r. Dans le second cas, il vient : $\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{u}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x}$. De plus, nous exprimons que les mésosfissures sont soumises à une pression de fluide p : $\forall \underline{x} \in \omega^+, \sigma(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = -p\underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^p$.

Chacun des M problèmes, noté de manière générique (P), est décomposé en trois sous-problèmes élémentaires comme indiqué sur la Fig. 1. Les problèmes (P1) et (P3) sont des problèmes d'élasticité dont les solutions sont homogènes dans Ω . Le champ \underline{u}^m est le champ de déplacement qui se produirait dans le matériau sain (non fissuré) en appliquant au v.e.r. la contrainte effective de Terzaghi $\Sigma' = \Sigma + p\delta$. Le sous-problème (P2) permet de distinguer, dans la réponse mécanique du v.e.r., les effets des discontinuités de déplacement $[\underline{u}]$ (dues à l'application de Σ et p) sur la mésosfissure.

Les champs de déformation microscopiques ϵ^m et ϵ^p étant homogènes dans Ω , on a : $\mathbf{E}^m = \langle \epsilon^m \rangle = \epsilon^m(\underline{x})$ et $\mathbf{E}^p = \langle \epsilon^p \rangle = \epsilon^p(\underline{x}) = -\frac{p}{3k^s}\delta$ où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne prise sur Ω et où k^s est le module de compression du matériau sain. La déformation macroscopique \mathbf{E} peut se décomposer de la même façon que le champ de déplacement, soit : $\mathbf{E} = \mathbf{E}^m + \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^d$ avec $\mathbf{E}^d = \mathcal{N} \int_{\omega^+} (\underline{n} \otimes \underline{[u]})$ où \mathcal{N} est la densité volumique de mésosfissures. Comme dans le cas sec (en l'absence de pression) [1], \mathbf{E}^d peut être décrite à l'aide de deux paramètres $\beta = \mathcal{N} \int_{\omega^+} [u_n](\underline{x})$ et $\underline{\gamma} = \mathcal{N} \int_{\omega^+} \{[\underline{u}] - [u_n]\underline{n}\}(\underline{x})$. Le paramètre β caractérise l'état d'ouverture des mésosfissures mais aussi, de par sa définition, la porosité de fissure. Le paramètre vectoriel $\underline{\gamma}$ représente le glissement des lèvres des mésosfissures dans leur plan. Il vient l'expression de \mathbf{E}^d :

$$\mathbf{E}^d = \beta(\underline{n} \otimes \underline{n}) + \underline{\gamma} \otimes \underline{n} \quad (1)$$

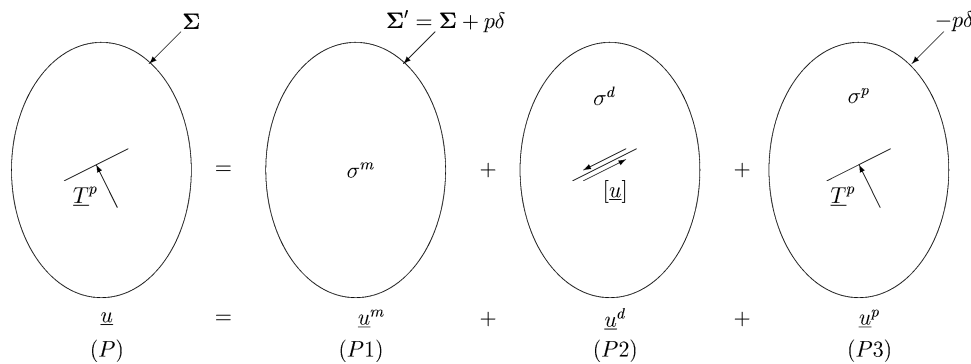


Figure 1. Décomposition du champ de déplacement.

Figure 1. Decomposition of displacement field.

3. Résolution du problème

3.1. Construction de l'énergie libre macroscopique

Construisons alors l'énergie libre macroscopique de la phase solide contenue dans le v.e.r. considéré. On adopte à priori deux paramètres de chargement (\mathbf{E} et p). Les quantités β et $\underline{\gamma}$ sont des fonctions de \mathbf{E} et p qu'il s'agira de déterminer. Le comportement du matériau constitutif de la matrice étant élastique, son énergie libre spécifique s'écrit $\psi(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon : \mathbb{C}^s : \epsilon$. L'énergie libre macroscopique Ψ est la moyenne sur le domaine $\Omega^m (= \Omega - \omega)$ de l'énergie libre spécifique ψ . En utilisant la décomposition du champ de déplacement, il vient $\Psi = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m + \underline{\mathbf{u}}^d + \underline{\mathbf{u}}^p) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m + \underline{\mathbf{u}}^d + \underline{\mathbf{u}}^p)$ soit :

$$\Psi = \frac{1}{2|\Omega|} \left\{ \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m) + \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) + \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^p) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^p) \right\} + \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^p) + \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) + \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^p) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) \right\} \quad (2)$$

Les champs de déformation $\epsilon(\underline{\mathbf{u}}^m)$ et $\epsilon(\underline{\mathbf{u}}^p)$ étant homogènes et le champ de contraintes $\sigma^d = \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d)$ étant autoéquilibré, les deux derniers termes sont nuls. Le deuxième terme de (2) a quant à lui déjà été calculé dans le cas sec pour des mésolfissures circulaires, de rayon a , sous l'hypothèse de non interaction [1] :

$$\Psi^d = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega^m} \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) : \mathbb{C}^s : \epsilon(\underline{\mathbf{u}}^d) = \frac{K_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} \right\} \quad \text{avec } K_0 = \frac{3E^s}{16(1 - \nu^{s2})} \quad (3)$$

où $d = \mathcal{N}a^3$ est le paramètre densité de mésolfissuration au sens de Budiansky et O'Connell [6]. L'énergie libre macroscopique s'écrit donc, en utilisant la décomposition de \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^m : \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^m + \Psi^d + \frac{1}{2} \mathbf{E}^p : \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^m : \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^p \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^p) : \mathbb{C}^s : (\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^p) + \Psi^d \\ \text{Soit } \Psi &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) : \mathbb{C}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d) + \frac{K_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

3.2. Potentiels thermodynamiques

On considère des mésolfissures ouvertes ou fermées non frottantes et le paramètre de densité de mésolfissuration fixé; le matériau se comporte alors de manière élastique. La nullité de la dissipation intrinsèque s'écrit : $\mathcal{D} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + p \dot{\beta} - \dot{\Psi} = 0$. En remarquant que $\dot{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$, il vient :

$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{\Sigma} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) + p - \frac{K_0}{d} \beta \right\} \dot{\beta} + \left\{ \underline{\mathbf{T}} - \frac{K_0}{d} \left(1 - \frac{\nu^s}{2}\right) \underline{\gamma} \right\} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \quad (5)$$

où $\underline{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot (\delta - \underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}})$. $\dot{\beta}$ et $\dot{\underline{\gamma}}$ étant quelconques, la nullité de \mathcal{D} impose :

$$\beta = \frac{d}{K_0} \left\{ \boldsymbol{\Sigma} : (\underline{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{n}}) + p \right\}; \quad \underline{\gamma} = \frac{d}{K_0(1 - \nu^s/2)} \underline{\mathbf{T}} \quad (6)$$

Les équations précédentes permettent de relier les deux paramètres β et $\underline{\gamma}$ aux sollicitations macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$ et p . En utilisant la relation $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d)$, on peut également exprimer β et $\underline{\gamma}$ en fonction de

la déformation macroscopique \mathbf{E} et de la pression de fluide p . On obtient des relations simples en linéarisant ces expressions par rapport à d , ce qui revient à faire l'hypothèse de faible densité de mésolfissuration. Il vient, en posant $\mathbf{N} = \mathbb{C}^s : (\underline{n} \otimes \underline{n})$:

$$\beta \cong \frac{d}{K_0} \{ \mathbf{E} : \mathbf{N} + p \} ; \quad \underline{\gamma} \cong \frac{2\mu^s d}{K_0(1-\nu^s/2)} \mathbf{E} \cdot \underline{n} \cdot (\delta - \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (7)$$

En remplaçant β et $\underline{\gamma}$ dans l'expression (4), Ψ s'écrit, sous l'hypothèse de faible densité qui permet de négliger le terme quadratique $\mathbf{E}^d : \mathbb{C}^s : \mathbf{E}^d$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^s : \mathbf{E} - \frac{d}{2K_0} \left\{ (\mathbf{E} : \mathbf{N})^2 + \frac{4\mu^{s2}}{(1-\nu^s/2)} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) : \mathbf{\Delta} - \mathbf{E} : (\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta}) : \mathbf{E}] \right\} + \frac{d}{2K_0} p^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E} + \frac{d}{2K_0} p^2 \end{aligned} \quad (8)$$

où $\mathbf{\Delta} = (\underline{n} \otimes \underline{n})$ et \mathbb{C}^{hom} est le tenseur d'élasticité homogénéisé du milieu mésolfissuré sec.

$\dot{\Psi}$ étant égal à $\mathbf{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + p\dot{\beta}$, l'argumentation de Ψ en \mathbf{E} et p ne confère pas à Ψ le statut de potentiel thermodynamique. A l'instar de Deudé et al. [7], nous introduisons $\Psi^*(\mathbf{E}, p) = \Psi(\mathbf{E}, p) - p\beta$ qui vérifie $\dot{\Psi}^* = \mathbf{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} + \beta\dot{p}$. Ainsi, Ψ^* , représentant l'énergie potentielle macroscopique, est le potentiel thermodynamique du milieu mésolfissuré saturé pour le choix du couple de variables (\mathbf{E}, p) . Soit en utilisant (7) :

$$\Psi^*(\mathbf{E}, p) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E} - \frac{d}{K_0} p \mathbf{E} : \mathbf{N} - \frac{d}{2K_0} p^2 \quad (9)$$

Nous en déduisons les lois d'état, donnant respectivement l'expression de la contrainte macroscopique et celle de la porosité macroscopique en fonction de \mathbf{E} et p :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E} - \frac{d}{K_0} p \mathbf{N} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{E} - \mathbf{B} p \\ \beta &= -\frac{\partial \Psi^*}{\partial p} = \frac{d}{K_0} \{ \mathbf{N} : \mathbf{E} + p \} = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p}{M} \end{aligned} \quad (10)$$

Ces expressions ont une structure similaire à celles proposées par Biot, en identifiant, pour le milieu mésolfissuré, le tenseur des coefficients de Biot $\mathbf{B} = (d/K_0)\mathbf{N}$ et le module de Biot M (tel que $1/M = d/K_0$). Les résultats obtenus ici pour un milieu mésolfissuré sont conformes à ceux récemment établis par Lemarchand [8] en utilisant une approche de type Eshelby. En raison du caractère à priori orienté de la mésolfissuration, le tenseur \mathbf{B} n'est pas isotrope ; la pression de fluide peut donc induire des contraintes macroscopiques de cisaillement.

Remarque 1. – On aurait pu conserver les variables \mathbf{E} et β comme argument de Ψ qui possède alors, pour ce choix de variables, le statut de potentiel thermodynamique. En effet, en remplaçant $\underline{\gamma}$ par son expression (7) dans (4), on obtient l'expression de Ψ et les deux lois d'état :

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^s : \mathbf{E} - \frac{d}{K_0} \frac{2\mu^{s2}}{(1-\nu^s/2)} \{ (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) : \mathbf{\Delta} - \mathbf{E} : \mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta} : \mathbf{E} \} - \beta \mathbf{E} : \mathbf{N} + \frac{K_0}{2d} \beta^2 \quad (11)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^s : \mathbf{E} - \frac{d}{K_0} \frac{2\mu^{s2}}{(1-\nu^s/2)} \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{E} - 2\mathbf{\Delta} \otimes \mathbf{\Delta} : \mathbf{E} \} - \beta \mathbf{N} \quad (12)$$

$$p = -\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \mathbf{E} : \mathbf{N} - \frac{K_0}{d} \beta$$

Remarque 2. – L’enthalpie libre macroscopique Ψ^{**} , obtenue par transformée de Legendre–Fenchel de l’énergie libre macroscopique (4) s’écrit $\Psi^{**} = \Sigma : \mathbf{E} + p\beta - \Psi$. Du fait que $\Sigma = \mathbb{C}^s : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^d)$, il vient :

$$\Psi^{**} = \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S}^s : \Sigma + \Sigma : \mathbf{E}^d - \frac{K_0}{2d} \left\{ \beta^2 + \left(1 - \frac{\nu^s}{2} \right) \underline{\gamma} : \underline{\gamma} \right\} + p\beta \quad (13)$$

où $\mathbb{S}^s (= \mathbb{C}^{s-1})$ est le tenseur de souplesse du matériau sain. En suivant une démarche similaire à celle ayant permis d’aboutir à (8), on peut construire le potentiel macroscopique (enthalpie libre) $\Psi^{**}(\Sigma, p)$ en partant de (13); il vient :

$$\begin{aligned} \Psi^{**} &= \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S}^s : \Sigma + \frac{d}{2K_0(1 - \nu^s/2)} \left\{ (\Sigma \cdot \Sigma) : \Delta - \frac{\nu^s}{2} \Sigma : (\Delta \otimes \Delta) : \Sigma \right\} \\ &\quad + \frac{d}{K_0} p \Sigma : \Delta + \frac{d}{2K_0} p^2 \\ &= \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S}^{\text{hom}} : \Sigma + \frac{d}{K_0} p \Sigma : \Delta + \frac{d}{2K_0} p^2 \end{aligned} \quad (14)$$

où \mathbb{S}^{hom} est le tenseur de souplesse homogénéisé du matériau sec. Ψ^{**} apparaît comme le potentiel thermodynamique pour le choix du couple de variables (Σ, p) . Les deux lois d’état donnant respectivement la déformation macroscopique \mathbf{E} et la porosité de fissure β s’écrivent :

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Psi^{**}}{\partial \Sigma} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \Sigma - \frac{d}{K_0} p \Delta ; \quad \beta = \frac{\partial \Psi^{**}}{\partial p} = \frac{d}{K_0} \{ \Sigma : \Delta + p \} \quad (15)$$

Références bibliographiques

- [1] V. Pensée, D. Kondo, Une analyse micromécanique 3-D de l’endommagement par mésolfissuration, C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib 329 (2001) 271–276.
- [2] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.J. Marigo, Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons, J. Méca. Théor. Appl. 5 (1986) 471–513.
- [3] A. Feraille-Fresnet, H.D. Bui, A. Ehrlacher, On the role of fluids in the crack of elastic materials, in: A. Benallal (Ed.), Continuous Damage and Fracture, Elsevier, 2000.
- [4] M.A. Biot, General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys. 12 (1941) 155–164.
- [5] M.A. Biot, Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid, J. Appl. Phys. 26 (1955) 182–185.
- [6] B. Budiansky, J.R. O’Connell, Elastic moduli of a cracked solid, Int. J. Solids Structures 12 (1976) 81–97.
- [7] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, S. Maghous, Micromechanical approach to nonlinear poroelasticity – application to cracked rocks, J. Eng. Mech., in press.
- [8] E. Lemarchand, Contribution de la micromécanique à l’étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les milieux poreux : application aux phénomènes de gonflement des géomatériaux, Ph.D. thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.