C. R. Mecanique 330 (2002) 313–318

Transfert de champs plastiquement admissibles

Pierre Villon [a], Houman Borouchaki [b], Khemais Saanouni [b]

[a] Université de technologie de Compiègne, GSM, BP 20529, 60205 Compiègne cedex, France

[b] Université de technologie de Troyes, GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

Reçu le 21 novembre 2001 ; accepté après révision le 26 février 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé Cette Note présente une nouvelle méthode pour interpoler des champs mécaniques associés à un maillage du domaine de calcul vérifiant les équations d'équilibre et des critères mécaniques quadratiques en termes de ces champs. Elle est basée sur des techniques d'approximation diffuse. Celles-ci permettent de définir un champ mécanique de continuité globale d'ordre quelconque qui approche fidèlement les champs mécaniques discrets. Ce nouveau champ continu est localement solution d'un problème d'optimisation quadratique sous contraintes quadratiques dégénérées pour lequel on propose un algorithme de résolution. La méthode a été appliquée, en particulier, à un problème d'équilibre de solides élastoplastiques à écrouissage non linéaire. ***Pour citer cet article : P. Villon et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 313–318.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solides et structures / techniques d'approximation diffuse

Abstract This paper presents a new approach to interpolate the mechanical fields associated to a given mesh of the computational domain which satisfy the equilibrium equations together with the mechanical criteria which are quadratical in terms of these fields. The method is based on the diffuse approximation techniques. These allow us to construct a field of globally arbitrary order of continuity which approximates accurately the initial discrete mechanical fields. Indeed, the construction is based locally on the resolution of a quadratical optimisation problem under degenerate quadratical constraints for which we propose an analytical solution. The method is applied, in particular, to an equilibrium problem of elastoplastic solid with non linear hardening. ***To cite this article: P. Villon et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 313–318.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solids and structures / diffuse approximation techniques

Abridged English version

The analysis of the mechanical structures using Finite Element Method in the framework of large elastoplastic strain, needs frequently the remeshing of the deformed domain during the computation. The remeshing is due to the large geometrical distortion of finite elements or to the adaptation to the physical behavior of the solution. The remeshing criteria are, generally, based on some appropriate error estimates. After the remeshing of the computational domain, the different mechanical fields associated with the new mesh of the domain must be interpolated from those associated with the old mesh of the domain which

Adresses e-mail : Pierre.Villon@utc.fr (P. Villon); Houman.Borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki); Khemais.Saanouni@utt.fr (K. Saanouni).

S1631-0721(02)01457-2/FLA

allows us to rerun the computation starting from the new mesh. This return is made easier if the interpolated fields associated with the new mesh satisfy accurately the problem equations (equilibrium equation, plasticity criterion). The straitforward linear interpolation does not ensure, in general, this condition, in particular for problems with high material or geometrical non linearity.

In this paper, we emphasize the problem of interpolation of the mechanical fields after remeshing during the resolution of equilibrium problem of elastoplastic solid with non linear hardening. To simplify, we limit ourselves to the quasi-static and isotropic case defined by:

– $\operatorname{div}\sigma_{ij} = 0$ (equilibrium equations),

– $\|\sigma_{ij} - X_{ij}\| < R + \sigma_y$ (isotropic plasticity criterion),

where σ_{ij} is the stress tensor, X_{ij} is the deviatoric internal stress tensor associated to the kinematic hardening, R is the internal stress associated to the isotropic hardening and σ_y is the initial yield stress. The norm $\|\cdot\|$ is related to the equivalent stress:

$$\|\sigma_{ij} - X_{ij}\| = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij} - X_{ij})(S_{ij} - X_{ij})}$$

where $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\sigma_{ij}\,\delta_{ij}$ is the deviatoric part of σ_{ij}. It is obvious that the state variables σ_{ij}, X_{ij} and R are governed by appropriate evolution equations (constitutive equations) given as ordinary differential equation of first order together with a classical Mises yield criterion [3]. These equations are not given here as the field interpolation problem is solved after a convergence at a specified time step where the remeshing has been required by an appropriate error estimate.

The problem that we face is the following: “starting from the mechanical fields σ_{ij}^{old}, X_{ij}^{old} and R^{old} associated with a given mesh of a domain of R^2 satisfying the equilibrium equations and the plasticity criterion, define the new fields σ_{ij}^{new}, X_{ij}^{new} and R^{new} associated with a new mesh of the domain satisfying the same constraints”. To solve this problem, we limit ourselves to the particular case of plane stress where the stress fields σ and X can be written as:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix}$$

In this paper, using diffuse interpolation, we construct locally a continuous field of arbitrary order which interpolates accurately the stress fields which is the solution of a quadratic optimization problem under degenerate quadratical constraints. A specific algorithm to solve this optimization problem is then proposed. The computation is developped in two dimensions which can be extended without major difficulties to three dimensions.

1. Introduction

Le calcul des structures en grandes déformations élastoplastiques par la méthode des éléments finis nécessite de recourir à des remaillages fréquents du domaine de calcul au cours de la resolution. Ceux-ci sont rendus nécessaires par des fortes non-linéarités géométriques (grandes déformations, conditions aux limites variables) et matérielles (lois de comportement). Ces remaillages peuvent être appliqués soit pour remplacer des éléments trop distordus pour être numériquement performants, soit pour adapter la discrétisation géométrique à la représentation de la solution. En général la décision de remailler est gouvernée par des critères basés sur des estimateurs d'erreur [1].

Lors d'un remaillage, les différents champs mécaniques associés à l'ancien maillage doivent être transférés au nouveau maillage pour la reprise et la continuation des calculs. Cette reprise est facilitée si les champs associés au nouveau maillage (après transfert) vérifient approximativement toutes les équations du problème (équilibre, critère de plasticité). Le transfert de champs par simple interpolation ne garantit pas, en général, cette condition, en particulier pour les problèmes fortement non linéaires [2].

Dans cette Note, on s'intéresse au problème de transfert de champs mécaniques lors d'un remaillage au cours de la résolution d'un problème d'équilibre de solides élastoplastiques à écrouissage mixte non linéaire. Pour simplifier, on se limite à un cas statique isotrope défini par les équations :

– $\operatorname{div}\sigma_{ij} = 0$ (équation d'équilibre),

– $\|\sigma_{ij} - X_{ij}\| \leqslant R + \sigma_y$ (critère de plasticité, avec égalité dans les zones plastiques),

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes, X_{ij} est le tenseur deviateur des contraintes internes cinématiques, R est la contrainte interne isotrope et σ_y, la limite initiale d'élasticité. La norme $\|\cdot\|$ représente la contrainte équivalente

$$||\sigma_{ij} - X_{ij}|| = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij} - X_{ij})(S_{ij} - X_{ij})}$$

où $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\sigma_{ij}\,\delta_{ij}$ est le tenseur déviateur de σ_{ij}. Il va de soi que les variables σ_{ij}, X_{ij} et R sont gouvernées par des équations différentielles ordinaires du premier ordre (équations d'évolution) avec un critère d'écoulement classique de type Mises [3]. Ces équations ne sont pas données ici car le problème de transfert de champs que nous considérons est posé après convergence à chaque pas de temps où un remaillage est requis par un estimateur d'erreur approrié.

Le problème que l'on se pose est le suivant : « partant des champs σ_{ij}^{old}, X_{ij}^{old} et R^{old} associés à un maillage donné d'un domaine de R^2 qui vérifient les équations d'équilibre et le critère de plasticité, définir les nouveaux champs σ_{ij}^{new}, X_{ij}^{new} et R^{new} associés à un nouveau maillage du domaine et vérifiant les mêmes contraintes ». Pour résoudre ce problème, on se limite au cas particulier de la contrainte plane où les champs de contraintes σ et X s'écrivent comme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ X_{12} & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix}$$

Dans cette Note, en utilisant l'interpolation diffuse, on construit localement un champ mécanique de continuité d'ordre quelconque, interpolant les champs discrets initiaux. On montrera que cette construction repose sur la résolution d'un problème d'optimisation quadratique sous contraintes quadratiques. Nous proposons alors un algorithme spécifique pour résoudre ce type de problèmes. Les calculs sont développés en deux dimensions mais l'extension au trois dimensions ne semble pas poser de difficultés fondamentales.

2. Formulation du problème par approximation diffuse

Le critère de plasticité fait intervenir les tenseurs déviateurs S_{ij} et X_{ij}. Pour éviter des contraintes supplémentaires portant sur la trace de ces tenseurs, il convient de les exprimer en fonction de σ_{ij} et Y_{ij} qui est solution de :

$$Y_{ij} = X_{ij} + \frac{1}{3}\operatorname{tr} Y_{ij}\,\delta_{ij}$$

En introduisant le nouveau vecteur des champs $u = {}^t(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, Y_{11}, Y_{22}, Y_{12}, r)$, avec $r = R + \sigma_y$, le critère de plasticité peut s'écrire sous forme matricielle :

$${}^t u \mathcal{E} u = 0$$

où

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & -E & 0 \\ -E & E & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } E = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La technique d'approximation diffuse consiste à approcher localement (en chaque point du domaine et à chaque instant après remaillage) les champs inconnus par des fonctions polynomiales (en particulier des polynomes de degré 1) de telle manière que la fonction globale d'approximation soit de continuité d'ordre quelconque (pour notre application la continuité d'ordre 2 est suffisante). Avant d'introduire la formulation mathématique de l'approximation diffuse, on donne l'expression des champs inconnus ainsi que la formulation du critère de plasticité dans la cadre d'une approximation linéaire.

En approchant les champs de contraintes σ_{ij} par des polynomes linéaires et en prenant en compte l'équation d'équilibre, on obtient (en posant $z=(x,y)$)

$$\sigma = {}^t P(z)a$$

où a est un vecteur réel de dimension 7 et

$$ {}^t P(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 & -x \end{pmatrix} $$

De même en approchant les champs Y_{ij} et r par des polynomes linéaires, on obtient

$$Y = {}^t Q(z)b \quad \text{et} \quad r = {}^t p(z)c$$

où b (resp. c) est un vecteur réel de dimension 9 (resp. 3) et

$$ {}^t Q(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t p(z) = (1\ x\ y) $$

En posant ${}^t\theta = ({}^t a, {}^t b, {}^t c)$ et

$$ {}^t \mathcal{M}(z) = \begin{pmatrix} {}^t P(z) & 0 & 0 \\ 0 & {}^t Q(z) & 0 \\ 0 & 0 & {}^t p(z) \end{pmatrix} $$

l'approximation linéaire du vecteur des champs u consiste à définir u comme $u(z) = {}^t\mathcal{M}(z)\,\theta$ où θ est un vecteur réel de dimension 19. Si on considère un schéma centré, au voisinage d'un point quelconque $\tilde{z}$, u s'écrit comme $u(z) = {}^t\mathcal{M}(z-\tilde{z})\theta(\tilde{z})$. Comme $u(\tilde{z}) = {}^t\mathcal{M}(0)\theta(\tilde{z})$, le critère de plasticité ${}^t u\,\mathcal{E}\,u = 0$ peut s'écrire matriciellement en fonction de θ comme :

$$ {}^t\theta\,\mathcal{C}\,\theta = 0 \quad \text{avec}\, \mathcal{C} = \mathcal{M}(0)\mathcal{E}^t\mathcal{M}(0)$$

Revenons à la formulation mathématique de l'approximation diffuse. Soit $\widetilde{V} = \{\tilde{z}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ l'ensemble des n sommets de l'ancien maillage du domaine. Soient z un sommet quelconque du nouveau maillage du domaine et $I(z,k)$ l'ensemble des indices des k « plus proches sommets voisins » de z appartenant à $\widetilde{V}$. L'idée fondamentale consiste à trouver θ de telle manière que l'approximation du champ u par ${}^t\mathcal{M}(\tilde{z}_i - z)\theta(z)$ soit proche de $u^{\text{old}}(\tilde{z}_i)$ pour les sommets $\tilde{z}_i$ d'indice $i \in I(z,k)$. Ceci conduit à approcher les champs, dans un voisinage donné de z, par une quadrique. Cette solution n'est pas en général globalement continue. Cependant, en considérant des fonctions de pondération W, on montre (cf. [4–6]) que la solution θ des problèmes d'optimisation $\min J_z(\theta)$ où z varie dans le domaine avec $J_z(\theta)$ définie par :

$$ J_z(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I(z,k_z)} W(\tilde{z}_i, z) \left\| {}^t\mathcal{M}(\tilde{z}_i - z)\theta - u^{\text{old}}(\tilde{z}_i) \right\|_{L^2}^2 $$

a globalement une continuité d'ordre égal a celle des fonctions de pondérations $W(\tilde{z}_i, z)$. Ces dernières sont construites de telle manière qu'elles vaillent 1 en z et tendent vers zéro au fur et à mesure que l'on s'éloigne de z (leur valeurs en $\tilde{z}_i$, pour $i \in I(z,k_z)$, doivent être non nulles pour que le sommet $\tilde{z}_i$ de l'ancien maillage contribue à l'approximation des champs en z). Le nombre k_z de voisins doit être choisi de telle manière à assurer l'unisolvance du problème d'optimisation (comme θ est de dimension 19, en général il suffit de prendre $k_z = 20$).

La fonctionelle $J_z(\theta)$ peut s'écrire aussi comme la forme quadratique en θ :

$$ J_z(\theta) = \frac{1}{2}\,{}^t\theta\mathcal{A}(z)\theta - {}^t\mathcal{B}(z)\theta + K $$

où $K = \sum_{i\in I(z,k_z)} W(\tilde z_i, z)^t u^{\mathrm{old}}(\tilde z_i)\, u^{\mathrm{old}}(\tilde z_i)$,

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{i\in I(z,k_z)} W(\tilde z_i, z)\mathcal{M}(\tilde z_i - z)^t\mathcal{M}(\tilde z_i - z) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(z) = \sum_{i\in I(z,k_z)} W(\tilde z_i, z)^t u^{\mathrm{old}}(\tilde z_i)^t\mathcal{M}(\tilde z_i - z)$$

On note ainsi que la fonctionelle $J_z(\theta)$ est strictement convexe différentiable en θ et est soumise à la contrainte quadratique traduisant le critère de plasticité.

3. Résolution du problème d'optimisation

Rappelons que notre problème d'optimisation est formulé comme :

$$\min_\theta J_z(\theta) \quad \text{avec} \quad J_z(\theta) = \frac{1}{2}{}^t\theta\mathcal{A}(z)\theta - {}^t\mathcal{B}(z)\theta \quad \text{sous contrainte} \quad {}^t\theta\mathcal{C}\theta = 0$$

où l'inconnu θ est de dimension 19. Avant de résoudre ce problème, on procède à quelques simplifications. En fait, on va montrer que l'on peut réduire la dimension à 4.

Notons que la matrice $\mathcal{C}$ est symétrique de rang 4 et moyennant la matrice de passage $\mathcal{P}$, elle est semblable à la matrice $\mathcal{D}$ définie par :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En posant $\xi = {}^t\mathcal{P}\theta = \xi_1 + \xi_2$ où $\xi_1 = {}^t\mathcal{P}_1\theta \in \operatorname{Ker}\mathcal{C}$ et $\xi_2 = {}^t\mathcal{P}_2\theta \in (\operatorname{Ker}\mathcal{C})^\perp$, le problème d'optimisation se réduit à :

$$\min_\xi \left\{ \frac{1}{2}{}^t\xi_1\mathcal{A}_{11}\xi_1 + 2\,{}^t\xi_1\,\mathcal{A}_{12}\xi_2 + \frac{1}{2}{}^t\xi_2\mathcal{A}_{22}\xi_2 - {}^tb_1\xi_1 - {}^tb_2\xi_2 \right\}$$

sous contrainte ${}^t\xi_2 D\xi_2 = 0$ où

$$\mathcal{A}_{11} = \left({}^t\mathcal{P}_1\ 0\right)\mathcal{A}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{12} = \left({}^t\mathcal{P}_1\ 0\right)\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{P}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{22} = \left(0\ {}^t\mathcal{P}_2\right)\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{P}_2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \left({}^t\mathcal{P}_1\ 0\right)\mathcal{B} \quad \text{et} \quad b_2 = \left(0\ {}^t\mathcal{P}_2\right)\mathcal{B}$$

Le système d'optimalité associé à ce nouveau problème d'optimisation s'écrit alors comme :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{11}\xi_1 + \mathcal{A}_{12}\xi_2 = b_1 \\ \mathcal{A}_{12}\xi_1 + (\mathcal{A}_{22} + \lambda D)\xi_2 = b_2 \\ {}^t\xi_2 D\xi_2 = 0 \end{cases}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte. En éliminant $\xi_1 = \mathcal{A}_{11}^{-1}b_1 - \mathcal{A}_{11}^{-1}\mathcal{A}_{12}\xi_2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{A}} + \lambda\, D)\xi_2 = \tilde b \\ {}^t\xi_2 D\xi_2 = 0 \end{cases}$$

correspondant au problème d'optimisation (d'ordre 4) :

$$\min_{\xi_2} \left\{ \frac{1}{2}{}^t\xi_2\tilde{\mathcal{A}}\xi_2 - {}^t\tilde b\xi_2 \right\} \quad \text{sous contrainte} \quad {}^t\xi_2 D\xi_2 = 0$$

avec D non dégénéré.

Puisque la matrice $\tilde{\mathcal{A}}$ est symétrique définie positive et D est également symétrique, alors il existe une matrice $\mathcal{R}$ non orthonormée mais inversible telle que ${}^t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{R} = I$ et ${}^t\mathcal{R}D\mathcal{R} = \widetilde D$ où $\widetilde D$ est une matrice diagonale (ce qui consiste à réduire simultanément les deux matrices $\tilde{\mathcal{A}}$ et D). En posant $\xi_2 = \mathcal{R}\eta$, on obtient alors un problème (en η) de la forme :

$$\min_{\eta} \frac{1}{2}\|\eta - \tilde{\eta}\|^2 \quad \text{sous contrainte} \quad {}^t\eta \widetilde{D}\eta = 0$$

Le système d'optimalité associé est le suivant :

$$\begin{cases} \eta + \lambda \widetilde{D}\eta = \tilde{\eta} \\ {}^t\eta \widetilde{D}\eta = 0 \end{cases}$$

en posant $\widetilde{D} = \operatorname{diag} \mu_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, on en déduit

$$\begin{cases} \eta_i = \tilde{\eta}_i \dfrac{1}{1 + \lambda\mu_i} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \mu_i \eta_i^2 = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\sum_{i=1}^{4} \gamma_i \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^2 = 0$$

avec $\gamma_i = \tilde{\eta}_i^2/\mu_i$ et $\lambda_i = -1/\mu_i$, ce qui s'écrit comme une équation algébrique de degré 6. On choisit ensuite la racine $\tilde{\lambda}$ réelle telle que $\|\eta(\lambda) - \tilde{\eta}\|$ soit minimale et on obtient donc $\eta(\tilde{\lambda})$.

Enfin, la construction de la solution θ du problème d'optimisation quadratique initial ne pose pas de difficulté et permet d'obtenir ainsi le champ interpolé $u(z) = {}^t\mathcal{M}(z)\theta$ au sommet z du nouveau maillage.

Cette méthodologie de transfert de champs après remaillage est en cours de validation sur le calcul des structures en grandes déformations élastoplastiques en suivant la démarche proposée dans [7].

Références bibliographiques

[1] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 24 (1987) 337–357.

[2] M. Homsi, L. Morançay, J.M. Roëlandt, Techniques de remaillage appliquées au découpage des métaux, Rev. Europèenne des Éléments Finis 5 (3) (1996) 297–321.

[3] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides, Dunod, Paris, 1985.

[4] P. Villon, Contribution à l'optimisation, Thèse de doctorat d'état, Université de Technologie de compiègne, 1991.

[5] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, La méthode des éléments diffuses, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 3 (1991) 113–138.

[6] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, L'approximation diffuse, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 3 (1991) 293–296.

[7] H. Borouchaki, A. Cherouat, K. Saanouni, P. Laug, Remaillage en grandes déformations. Applications à la mise en forme de structrues 2D, à paraître dans la Rev. Europèenne des Éléments Finis.