

Stability of roll waves in open channel flows

Abdelaziz Boudlal^a, Valery Yu. Liapidevskii^b

^a Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441 U.S.T.L., Département de mécanique fondamentale, M3, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

^b Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, 630090 Novosibirsk, Russia

Received 29 June 2001; accepted after revision 11 February 2002

Note presented by Paul Germain.

Abstract

The stability of finite amplitude roll waves that may develop at a liquid free surface in inclined open channels of arbitrary cross-section is studied. In the framework of shallow water theory with turbulent friction the modulation equations for wave series are derived and a nonlinear stability criterion is obtained. *To cite this article: A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, C. R. Mécanique 330 (2002) 291–295.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / free surface flows / roll waves stability / open channel flows / shallow water flows

Stabilité de trains d'ondes dans un canal découvert

Résumé

On étudie la stabilité de trains d'ondes avec discontinuités pouvant se développer à la surface libre d'un liquide en mouvement dans un canal découvert incliné et de section quelconque. Dans le cadre de la théorie des ondes longues et en adoptant pour le frottement un schéma turbulent, des équations modulées pour ces séries d'ondes sont établies et un critère non linéaire de stabilité est obtenu. *Pour citer cet article : A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, C. R. Mécanique 330 (2002) 291–295.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / écoulements à surface libre / stabilité des ondes avec discontinuités / écoulements dans les canaux découverts / écoulements peu profonds

Version française abrégée

1. On considère un liquide en mouvement avec frottement dans un canal cylindrique de section droite arbitraire et de pente φ constante. On se place dans le cadre de la théorie des ondes longues et on adopte pour le frottement un schéma empirique. L'axe $O\tilde{x}$ est parallèle aux génératrices, avec l'origine O au fond du canal; $O\tilde{z}$ est dans le plan vertical et $O\tilde{y}$ complète le repère trirectangle; \tilde{A} et \tilde{B} représentent respectivement l'aire mouillée et la largeur du canal à la cote \tilde{z} , et \tilde{A} et \tilde{B} leurs valeurs à la surface libre. \tilde{t} désigne le temps, g l'accélération de la pesanteur, \tilde{L}_w le périmètre mouillé, \tilde{L} la longueur d'onde, \tilde{u} la vitesse moyenne longitudinale et \tilde{D} la célérité des ondes. Le coefficient de frottement c_w est supposé constant. On introduit $\tilde{P} = \int_0^{\tilde{A}} \tilde{C}^2(s) ds$, $\tilde{C}^2(\tilde{A}) = g_n(\tilde{A}/\tilde{B}(\tilde{A}))$, $g_n = g \cos \varphi$, $\tilde{C}(\tilde{A})$ est la célérité des ondes élémentaires de pesanteur. Les grandeurs adimensionnées correspondant à cet écoulement sont données

E-mail address: abdelaziz.boudlal@univ.-lille1.fr (A. Boudlal).

par (1), où l'indice 0 représente un écoulement de base uniforme. Un tel écoulement est régi par les équations (2). La condition d'écoulement uniforme est exprimée par (3).

2. Pour étudier la stabilité de trains d'ondes avec discontinuités d'amplitude finie considérons d'abord des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités descendantes, de vitesse de propagation constante \mathcal{D} , i.e. $0 < u < \mathcal{D}$ (Fig. 1). Désignons par section critique la section droite située entre deux discontinuités successives où le déterminant $\Delta = C^2(A) - (u - \mathcal{D})^2$ du système (2) est nul, par S l'aire mouillée correspondante et par l'indice c toutes les autres grandeurs dans cette section. Cela étant, les équations de l'écoulement continu sont données par (4), avec $\xi = x - \mathcal{D}t$. Au voisinage de la section critique Δ change de signe. Dans l'équation (4b) $dA/d\xi$ doit être positive. Pour des canaux de forme régulière ($P''(A) > 0$) il en résulte la condition nécessaire d'existence des ondes définie par (5). C'est exactement la condition d'instabilité linéaire d'une perturbation de faible amplitude d'un écoulement critique uniforme [1–3]. Pour compléter la construction de ces ondes il faut y joindre les équations de la discontinuité connectant deux longueurs d'ondes successives. Celles-ci sont données par (6), où les indices r et l représentent respectivement l'amont et l'aval de la discontinuité. Les équations (4)–(6) montrent que la structure de ces ondes dépend de deux paramètres. Pour S et A_r données les conditions définies par (7) sont nécessaires et suffisantes à l'existence de ce type d'onde.

3. Pour établir le critère de stabilité d'un train d'ondes avec discontinuités nous adoptons la technique de modulation d'équations pour des solutions périodiques [3,6]. On procède à la moyenne du système (2) sur une période de solutions à périodicité lentement variable de (4), ce qui nous conduit au système d'équations (8). Les courbes caractéristiques correspondantes sont données par (9), d'où il résulte le critère de stabilité (10). La difficulté principale pour localiser la région stable du domaine d'existence de ces ondes est due aux singularités que présentent à ses frontières les fonctions R et $\hat{G}_{\bar{A}}$. Pour des formes auto-semblables de section droite ($P(A) = \beta^{-1}A^\beta$, $L_w = A^{2-\beta}$) le domaine d'hyperbolicité est indépendant de la variable S . Par conséquent le critère de stabilité non linéaire pour ce type d'onde peut s'exprimer en fonction d'une seule variable $\bar{z} = \bar{A}/S$ et les expressions des valeurs moyennes dans (8) prennent une forme simple. Dans le cas plan ($\beta = 2$) cette étude a été faite dans [6]. Pour α, β ($\beta > 1, \alpha > 4/(\beta - 1)^2$) données, les ondes avec discontinuités existent lorsque $z_m(\alpha) < \bar{z} < 1$ avec $L \rightarrow 0$ pour $\bar{z} \rightarrow 1$ et $L \rightarrow \infty$ pour $\bar{z} \rightarrow z_m(\alpha)$; $A_m = Sz_m$ étant la plus grande racine de $F(A) = 0$, qui est inférieure à S . L'intervalle de stabilité $(\bar{z}^-(\alpha), \bar{z}^+(\alpha))$ de ces ondes peut être obtenu par calcul numérique des quantités moyennes dans (8).

Les résultats de calcul de stabilité pour les canaux auto-semblables sont représentés dans le plan (α, \bar{z}) des Figs. 2 (zones grisées) pour $\beta = 2$ correspondant à une section droite rectangulaire (Fig. 2a), et pour $\beta = 1,5$ correspondant à une section de forme triangulaire (Fig. 2b). Ces figures montrent que dans tous les cas le domaine de stabilité est situé uniquement dans le voisinage des amplitudes maximales. Par exemple, pour $\alpha = 20, \beta = 2$ ($\varphi \sim 5^\circ$) la frontière inférieure de l'intervalle d'hyperbolicité correspond (en variable dimensionnelle) à une onde de hauteur minimale $h_{\min} = 0,77h_n$, de hauteur maximale $h_{\max} = 4,68h_n$ et de longueur $L = 8,7h_n/c_w$ et la frontière à supérieure correspond à $h_{\min} = 0,58h_n, h_{\max} = 3,3h_n, L = 2,1h_n/c_w$, où h_n est la hauteur normale d'un écoulement uniforme. Il faut noter que pour des inclinaisons modérées du canal les ondes d'amplitude maximale sont instables.

1. Governing equations

Consider a liquid flow in a cylindrical open channel of arbitrary cross-section, inclined at an angle φ to the horizontal. The $O\tilde{x}$ axis is chosen parallel to the direction of the channel with the origin O at the bottom; $O\tilde{z}$ is in the vertical plane and $O\tilde{y}$ completes the rectangular system of coordinates; \tilde{A} and \tilde{B} respectively designate the mean wet area and the width of the channel at the level \tilde{z} , and \bar{A} and \bar{B} are their values at the free surface; \tilde{t} is the time, g is the gravity acceleration; \tilde{L}_w is the wet perimeter; \tilde{L} is the wavelength, \tilde{u} is

the streamwise velocity and \tilde{D} is the wave speed. The friction factor c_w is taken constant. It is supposed that the flow is shallow. The subscripts \tilde{x} , \tilde{t} , \tilde{A} and S denote partial derivatives. We introduce $\tilde{P} = \int_0^{\tilde{A}} \tilde{C}^2(s) ds$, $\tilde{C}^2(\tilde{A}) = g_n \tilde{A} / \tilde{B}(\tilde{A})$, $g_n = g \cos \varphi$. Here $\tilde{C}(\tilde{A})$ is the long wave velocity. With dimensionless quantities defined by:

$$\begin{cases} x = c_w \tilde{x} / \tilde{A}_0^{1/2}, & t = c_w g_n^{1/2} \tilde{t} / \tilde{A}_0^{1/4}, & A = \tilde{A} / \tilde{A}_0, & L_w = \tilde{L}_w / \tilde{A}_0^{1/2} \\ u = \tilde{u} / (g_n^{1/2} \tilde{A}_0^{1/4}), & C = \tilde{C} / (g_n^{1/2} \tilde{A}_0^{1/4}), & D = \tilde{D} / (g_n^{1/2} \tilde{A}_0^{1/4}), & P = \tilde{P} / (g_n \tilde{A}_0^{3/2}) \end{cases} \quad (1)$$

where the subscript 0 relates to a uniform flow, the mass and momentum conservation equations averaged over the cross-section are:

$$\begin{cases} A_t + (Au)_x = 0 \\ (Au)_t + (Au^2 + P)_x = \alpha A - L_w u^2 \end{cases} \quad (2)$$

The uniform flow parameters must satisfy

$$L_w u_0^2 = \frac{\tan \varphi}{c_w} = \alpha \quad (3)$$

Henceforth, our aim is to study the stability of roll wave trains of finite amplitude.

2. Travelling waves

Consider first discontinuous periodic waves which are travelling downstream with a constant velocity, i.e., $0 < u < D$ (Fig. 1). In the frame of reference accompanying the waves the flow is steady and solutions of (2) can be expressed in terms of the single variable $\xi = x - Dt$.

Let us call the critical cross-section a section in smooth part of flow where the determinant of (2) vanishes and denote by S the corresponding wet area and by subscript c the corresponding quantities at the critical section. For a smooth travelling wave, this condition is fulfilled if that $(u_c - D)^2 = C^2(S)$ and $\alpha S = L_w(S)u_c^2$. The roll wave equations may then be written in the form:

$$(a) (D - u)A = (D - u_c)S = SC(S) = m, \quad (b) \frac{dG}{d\xi} = \Delta \frac{dA}{d\xi} = F \quad (4)$$

where $G = P(A) + m^2/A$, $F = \alpha A - L_w(A)(D - m/A)^2$, $\Delta = C^2(A) - m^2/A^2$, $D = C(S) + \sqrt{\alpha S / L_w(S)}$. In the vicinity of the critical cross-section Δ changes its sign. In Eq. (4b) $dA/d\xi$ must be positive. For regular channels ($P''(A) > 0$) it follows that the necessary condition of roll waves existence is

$$F'(S) > 0 \quad (5)$$

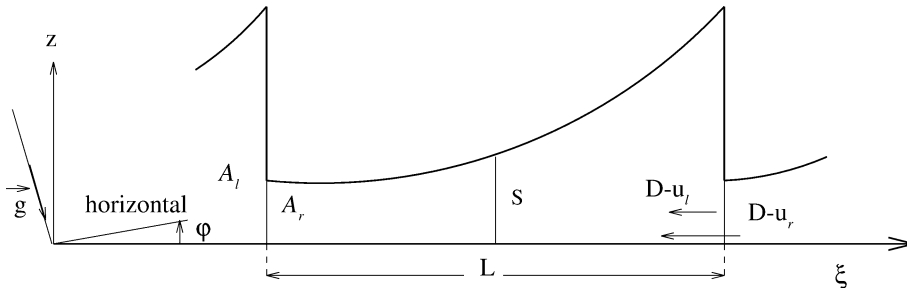


Figure 1. The structure of roll waves in a regular channel ($P'' > 0$). L is the length of a wave, A_r , A_l are the minimal and maximal wet areas, respectively.

Figure 1. Structure des ondes avec discontinuités en canal de forme régulière ($P'' > 0$). L est la longueur d'onde, A_r , A_l sont les aires mouillées minimale et maximale, respectivement.

It is exactly the linear instability condition for a steady flow [1–3].

To complete the construction of periodic waves the conjugate equations for a jump connecting two smooth parts of flow must be considered. Denoting by subscripts r and l the right and left sides of the discontinuity, one obtains:

$$A_r(\mathcal{D} - u_r) = A_l(\mathcal{D} - u_l), \quad \mathcal{G}(S, A_r) = \mathcal{G}(S, A_l) \tag{6}$$

Eqs. (4)–(6) indicate that roll waves depend on two parameters. For given values of S and A_r conditions

$$\begin{cases} F(S, A) < 0 & \text{for } A_r < A < S \\ F(S, A) > 0 & \text{for } S < A < A_l \end{cases} \tag{7}$$

are necessary and sufficient for roll wave existence. It follows from (7) that $A_m < A_r < S$, where $A_m = Sz_m$ is the greatest root of equation $F(A) = 0$, which is less than S . The limiting case $A_r = A_m$ corresponds to the wave of maximal amplitude.

3. Modulation equations

Let us now consider a stability criterion for roll wave trains. For this study, the modulation equations method for periodic solutions of (2) is used [4,5]. After averaging of slowly varying periodic solutions of (4) over a wave period, system (2) becomes after some calculations:

$$\begin{cases} \bar{A}_t + (\mathcal{D}\bar{A} - m)_x = 0 \\ (\mathcal{D}\bar{A} - m)_t + (\mathcal{D}^2\bar{A} - 2m\mathcal{D} + \bar{\mathcal{G}})_x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

with

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L d\xi = \int_{A_r}^{A_l} \frac{d\xi}{dA} dA = \int_{A_r}^{A_l} a(S, s) ds, & \bar{A} &= \frac{1}{L} \int_0^L A d\xi = \frac{1}{L} \int_{A_r}^{A_l} sa(S, s) ds \\ \overline{Au} &= \frac{1}{L} \int_0^L Au d\xi = \mathcal{D}\bar{A} - m(S), & \overline{Au^2 + P} &= \frac{1}{L} \int_0^L (Au^2 + P) d\xi = \mathcal{D}^2\bar{A} - 2m\mathcal{D} + \bar{\mathcal{G}} \\ \bar{\mathcal{G}} &= \frac{1}{L} \int_0^L \mathcal{G}(S, A) d\xi = \frac{1}{L} \int_{A_r}^{A_l} \mathcal{G}(S, s)a(S, s) ds, & a(S, s) &= \frac{\Delta(S, s)}{F(S, s)} \end{aligned}$$

Considering S, \bar{A} as new independent variables instead of S, A_r and setting $\bar{\mathcal{G}}(S, A_r) = \widehat{\mathcal{G}}(S, \bar{A})$, one obtains for characteristic curves of the modulated system (8) the following expression:

$$\frac{dx^\pm}{dt} = \mathcal{D} + \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4\delta^2 \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{A}}}}{2\delta} \tag{9}$$

where $\delta = \bar{A} d\mathcal{D}/dS - dm/dS$ and $R = \widehat{\mathcal{G}}_S - 2m d\mathcal{D}/dS$. The system is hyperbolic when

$$R^2 + 4\delta^2 \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{A}} > 0 \tag{10}$$

This case corresponds to a stable roll wave train. The main problem here is the behaviour of functions R and $\widehat{\mathcal{G}}_{\bar{A}}$ in the region near the boundaries of roll wave existence. For self-similar channels ($P(A) = \beta^{-1}A^\beta$, $L_w = A^{2-\beta}$) the hyperbolicity domain doesn't depend on the variable S . Therefore, the stability criterion for nonlinear periodic waves may be expressed for a function of single variable $\bar{z} = \bar{A}/S$ and the expressions for mean values in (8) take a simple form. In the plane case ($\beta = 2$) the investigation was performed in [6]. For given α, β ($\beta > 1, \alpha > 4/(\beta - 1)^2$), roll waves exist for $z_m(\alpha) < \bar{z} < 1$ with $L \rightarrow 0$ for $\bar{z} \rightarrow 1$ and $L \rightarrow \infty$ for $\bar{z} \rightarrow z_m(\alpha)$. The stability interval $(\bar{z}^-(\alpha), \bar{z}^+(\alpha))$ for roll waves can be found from (9) by numerical calculation of averaged quantities in (8).

The stability domains for roll waves in self-similar channels are shown in Figs. 2 as shaded areas in the (α, \bar{z}) -plane. In Fig. 2a, $\beta = 2$ and this corresponds to a channel of rectangular cross-section. In Fig. 2b, $\beta = 1.5$ and this value characterizes a channel of triangular shape. As one can see from the figures, in

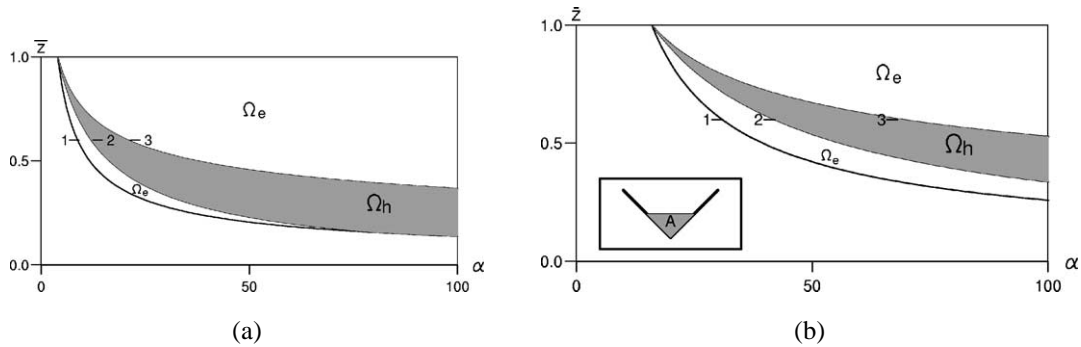


Figure 2. Stability diagram for roll waves: (a) rectangular cross-section, (b) triangular cross-section. Curve 1 is the lower boundary of roll waves existing domain ($\bar{z} = z_m(\alpha)$). Curves 2 and 3 are the boundaries of the hyperbolicity region Ω_h ($\bar{z} = \bar{z}^\pm(\alpha)$). In the ellipticity domains Ω_e roll waves are unstable. The boundary $\bar{z} = 1$ corresponds to roll waves of infinitesimal amplitude.

Figure 2. Diagramme de stabilité : (a) section rectangulaire, (b) section triangulaire. La courbe 1 est la frontière inférieure du domaine d'existence des ondes avec discontinuités ($\bar{z} = z_m(\alpha)$). Les courbes 2 et 3 sont les frontières de la région d'hyperbolicité Ω_h . Dans les domaines d'ellipticité Ω_e les ondes sont instables. La frontière $\bar{z} = 1$ correspond aux ondes d'amplitude infinitésimale.

both cases the stability domains correspond to the roll waves of near maximal amplitude. As an example, for $\alpha = 20$, $\beta = 2$ ($\varphi \sim 5^\circ$) the lower boundary of the hyperbolicity interval corresponds (in dimensional variables) to the roll wave with a minimal depth $h_{\min} = 0.77h_n$, a maximal depth $h_{\max} = 4.68h_n$ and a length $L = 8.7h_n/c_w$. The upper boundary corresponds to $h_{\min} = 0.58h_n$, $h_{\max} = 3.3h_n$, $L = 2.1h_n/c_w$, where h_n is the normal depth of uniform flow. It should be noted that for both cases the waves of maximal amplitude are unstable for a moderate channel inclination.

Acknowledgements. The research reported in this paper was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research under Grant 01-01-00767.

References

- [1] A. Boudlal, Stabilité et ondes périodiques avec discontinuités à l'interface de deux fluides non miscibles stratifiés en canalisation quasi-horizontale, in: 11^e Congrès Français de Mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq, Vol. 3, 1993, pp. 25–28.
- [2] R.F. Dressler, Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, *Comm. Pure. Appl. Math.* 2 (1949) 149–194.
- [3] H. Jeffreys, The flow of water in an inclined channel of rectangular section, *Philos. Mag.* 49 (6) (1925) 793–807.
- [4] P. Bhatnagar, *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [5] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.
- [6] V. Liapidevskii, Stability of roll waves, *Dokl. Phys.* 43 (11) (1998) 703–705.