

Stabilisation des couches PML pour les équations d'Euler linéarisées

Jérôme Métral^{a,b}, Olivier Vacus^c

^a Laboratoire MAS, École centrale de Paris, 92295 Châtenay-Malabry cedex, France

^b Études scientifiques Amont, Dassault-Aviation, 78, quai Marcel Dassault, 92214 Saint-Cloud cedex, France

^c CEA/CESTA, BP 2, 33114 Le Barp, France

Reçu le 27 novembre 2001 ; accepté le 10 décembre 2001

Note présentée par Pierre Perrier.

Résumé

Les couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) sont une façon efficace de simuler des conditions d'espace libre dans les problèmes de propagation d'ondes. Testées avec succès en électromagnétisme, elles semblent cependant donner lieu à des instabilités numériques dans le cas des équations d'Euler linéarisées. Dans cette Note, nous présentons un moyen simple de gagner en stabilité. La méthode proposée consiste en une succession de perturbations dissipatives des inconnues de la formulation (PML). Quelques tests numériques montrent l'efficacité de cette approche. *Pour citer cet article : J. Métral, O. Vacus, C. R. Mécanique 330 (2002) 347–352.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / analyse numérique / équations d'Euler linéarisées

PML stabilization for linearized Euler equations

Abstract

The perfectly matched layer (PML) is an efficient tool to simulate propagation phenomena in free space on unbounded domain. It seems to be very efficient for Maxwell's equations, but for the linearized Euler equations, it leads to numerical instabilities. In this Note we describe a simple way to gain stability. The method consists in dissipative time perturbations of the split variables. It is illustrated by some convincing numerical tests. *To cite this article: J. Métral, O. Vacus, C. R. Mécanique 330 (2002) 347–352.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / numerical analysis / linearized Euler equations

Abridged English version

In this Note we consider the PML layer, as defined by Bérenger in [1], applied to the linearized Euler equations. The PML technique consists in splitting the variables and the equations and adding suitable

damping terms. In the 2-D case, it leads to

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + M_x \partial_x (u_1 + u_2) + \partial_x (p_1 + p_2) + \sigma_1 u_1 = 0 \\ \partial_t v_1 + M_x \partial_x (v_1 + v_2) + \sigma_1 v_1 = 0 \\ \partial_t p_1 + M_x \partial_x (p_1 + p_2) + \partial_x (u_1 + u_2) + \sigma_1 p_1 = 0 \\ \partial_t u_2 + M_y \partial_y (u_1 + u_2) + \sigma_2 u_2 = 0 \\ \partial_t v_2 + M_y \partial_y (v_1 + v_2) + \partial_y (p_1 + p_2) + \sigma_2 v_2 = 0 \\ \partial_t p_2 + M_y \partial_y (p_1 + p_2) + \partial_y (v_1 + v_2) + \sigma_2 p_2 = 0 \end{cases}$$

which appears as the perturbation of a weakly hyperbolic problem (see [5]). Thus no general theory can guarantee whether it is well-posed or not, and, as far as we know, exhibiting an a priori estimate – as it is done in [3] for Maxwell’s equations – is still an open issue. Consequently, numerical instabilities, as those pointed out in [4] or [6], were likely to occur.

In this Note we propose a simple way to gain stability (see Fig. 1). Following an idea by J.-L. Lions, the time range $[0, T]$ is divided into N subranges $[t_n, t_{n+1}]$, and the split unknowns are modified in the layer \mathcal{L} at each time level t_n , for instance, with $\alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{cases} u_1(x, t_n^+) = (1 - \alpha)u_1(x, t_n^-) + \alpha u_2(x, t_n^-) & \text{p.p. } x \in \mathcal{L} \\ u_2(x, t_n^+) = \alpha u_1(x, t_n^-) + (1 - \alpha)u_2(x, t_n^-) & \text{p.p. } x \in \mathcal{L} \end{cases}$$

They are then discontinuous (this is why the method is called the “reset” method) but their sum is conserved and

$$\|u_1(\cdot, t_n^+)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u_2(\cdot, t_n^+)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq \|u_1(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u_2(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{L}}^2$$

This method is quite easy to use as it only adds the operation (8) which resets at each time step the values of the unknowns in the standard PML method. Numerical tests show that the method is very efficient, while the quality of the matching of the PML layer is not altered, especially when α is a regular function of space variables, as it is the case for the damping.

1. Présentation du problème

Les équations d’Euler incompressibles et isentropiques, pour les inconnues de vitesse \mathbf{U} et de pression P , s’écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0 \\ \partial_t P + (\mathbf{U} \cdot \nabla) P + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases}$$

Dans cette Note, nous nous intéressons, dans le cas bidimensionnel, à la propagation des ondes acoustiques dans un écoulement moyen $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}, \bar{V})$, de densité $\bar{\rho}$. Les inconnues à calculer sont les perturbations du champ de vitesse et du champ de pression, respectivement $\mathbf{u} = (u, v)$, telle que $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$, et p , telle que $P = \bar{P} + p$ ($\bar{P} = \bar{\rho}c^2$, où c est la vitesse du son). En injectant ces données dans les équations d’Euler, et après normalisation (par c pour la vitesse et \bar{P} pour la pression), on obtient le jeu d’équations linéarisées adimensionnées suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + M_x \partial_x u + M_y \partial_y u + \partial_x p = \mu_1(u, v, p) \\ \partial_t v + M_x \partial_x v + M_y \partial_y v + \partial_y p = \mu_2(u, v, p) \\ \partial_t p + M_x \partial_x p + M_y \partial_y p + \partial_x u + \partial_y v = \mu_3(u, v, p) \end{cases} \quad (1)$$

où l'on a noté $M_x = \bar{U}/c$, $M_y = \bar{V}/c$ et où μ_1, μ_2, μ_3 sont des termes de correction qui ne font pas intervenir les dérivées de (u, v, p) . Ces termes sont nuls dans le cas d'un flux moyen uniforme.

Associées aux données initiales (u_0, v_0, p_0) , les équations (1) forment un problème de Cauchy hyperbolique. Souvent, dans les problèmes d'aéroacoustique externe par exemple, elles doivent être résolues dans tout l'espace, en l'occurrence \mathbf{R}^2 . Or, pour des raisons pratiques évidentes, le domaine de calcul doit être borné. Se pose alors la question des conditions aux limites sur la frontière externe de ce domaine, conditions dont on attend qu'elles ne perturbent pas les phénomènes étudiés.

Une approche possible est celle des couches absorbantes, notamment les couches PML (pour *Perfectly Matched Layer*) introduites par Bérenger dans [1]. Cette formulation présente la propriété de laisser pénétrer les ondes dans la couche sans aucune réflexion.

Elles s'avèrent particulièrement efficaces pour les équations de Maxwell (voir [2] par exemple), il est même possible de montrer dans certains cas le caractère bien posé de leur formulation [3].

Rien de tel en revanche dans le cas des équations d'Euler linéarisées, pour lequel la technique des PML, dans sa formulation première (rappelée au paragraphe 2), donne lieu à des instabilités [4]. Ceci n'est d'ailleurs en contradiction avec aucun résultat théorique puisqu'il n'existe pas d'estimation a priori pour ces problèmes ; en particulier, on ne sait pas exhiber d'« énergie » décroissante au cours du temps, et sous certaines conditions, la formulation PML peut mener à des systèmes mal posés [5]. Différentes améliorations ont été proposées, notamment dans [6] où l'apport théorique et numérique d'une régularisation des termes d'amortissement est établi.

L'objet de cette Note n'est pas de présenter une théorie aussi complète que dans [6], mais seulement de décrire un moyen simple d'améliorer considérablement la stabilité des couches PML, sans altérer leur efficacité. Pour cela, notre raisonnement se fonde sur deux remarques simples.

- (i) La formulation PML repose sur le calcul de variables intermédiaires dont seule la somme a une signification physique. Toute modification qui conserve cette somme est donc a priori envisageable.
- (ii) L'absence d'énergie n'empêche pas de recourir à des modifications de formulation qui soient par nature dissipatives.

Au second paragraphe, nous introduisons une telle modification pour le problème continu. Elle se fonde sur une idée originale de J.-L. Lions : l'intervalle de temps est divisé en sous-intervalles, au début desquels des conditions initiales spécifiques peuvent être imposées. Au troisième paragraphe, nous exposons la mise en oeuvre numérique de cette idée et présentons quelques résultats qui illustrent son efficacité.

2. Formulation RESET

Les couches absorbantes constituent un domaine (noté \mathcal{L}) entourant le domaine d'intérêt Ω . La formulation des équations dans les couches PML compte deux étapes : «splitting» des variables, puis ajout de termes d'amortissement adéquats. Dans le cas du système (1), elles s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + M_x \partial_x (u_1 + u_2) + \partial_x (p_1 + p_2) + \sigma_1 u_1 = 0 \\ \partial_t v_1 + M_x \partial_x (v_1 + v_2) + \sigma_1 v_1 = 0 \\ \partial_t p_1 + M_x \partial_x (p_1 + p_2) + \partial_x (u_1 + u_2) + \sigma_1 p_1 = 0 \\ \partial_t u_2 + M_y \partial_y (u_1 + u_2) + \sigma_2 u_2 = 0 \\ \partial_t v_2 + M_y \partial_y (v_1 + v_2) + \partial_y (p_1 + p_2) + \sigma_2 v_2 = 0 \\ \partial_t p_2 + M_y \partial_y (p_1 + p_2) + \partial_y (v_1 + v_2) + \sigma_2 p_2 = 0 \end{cases} \quad \text{p.p. } x \in \Omega \cup \mathcal{L} \quad (2)$$

avec

$$u_1 + u_2 = u, \quad v_1 + v_2 = v, \quad p_1 + p_2 = p \quad (3)$$

Rappelons encore que $\sigma_i(x, y)|_{\Omega} = 0$ et $\sigma_i(x, y)|_{\mathcal{L}} > 0$, de telle sorte que, sur Ω , en sommant deux à deux les équations du système (2), on obtient bien le système (1).

Considérons le problème (2) sur l'intervalle de temps $[0, T]$. En ce qui concerne les conditions initiales, on choisit généralement $u_1(t = 0) = u_2(t = 0) = u_0/2$ (même chose pour v et p), mais ce choix est arbitraire : la seule contrainte réelle est (3), soit $u_1(t = 0) + u_2(t = 0) = u_0$. On obtient alors un problème de Cauchy dont, comme nous l'avons dit en introduction, on ne sait pas s'il est bien posé ou non.

Divisons à présent l'intervalle de temps $[0, T]$. Soit une suite d'instants t_n telle que

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}] \quad (4)$$

Le problème (2) peut alors se voir comme une succession de N sous-problèmes posés sur $[t_n, t_{n+1}]$, $n \in \{0, \dots, N - 1\}$. L'avantage est qu'on dispose maintenant de N degrés de liberté qui sont les conditions initiales de chacun de ces sous-problèmes. Si on cherche des solutions continues en temps, on choisira

$$u_{1,2}(t_n^+) = u_{1,2}(t_n^-), \quad v_{1,2}(t_n^+) = v_{1,2}(t_n^-), \quad p_{1,2}(t_n^+) = p_{1,2}(t_n^-) \quad (5)$$

Ce sera en particulier le cas sur Ω . Cependant, sur \mathcal{L} , tous les choix sont possibles du moment qu'ils respectent la contrainte (3). Cette liberté peut être mise à profit pour introduire de la dissipation, donc de la stabilité. Si on raisonne sur u , le but est de réaliser simultanément :

$$\begin{cases} u_1(x, t_n^+) + u_2(x, t_n^+) = u_1(x, t_n^-) + u_2(x, t_n^-) & \text{p.p. } x \in \mathcal{L} \\ \|u_1(\cdot, t_n^+)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u_2(\cdot, t_n^+)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq \|u_1(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u_2(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{L}}^2 \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi formulé, de nouvelles solutions deviennent naturelles, comme de choisir, pour $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{cases} u_1(x, t_n^+) = (1 - \alpha)u_1(x, t_n^-) + \alpha u_2(x, t_n^-) & \text{p.p. } x \in \mathcal{L} \\ u_2(x, t_n^+) = \alpha u_1(x, t_n^-) + (1 - \alpha)u_2(x, t_n^-) & \text{p.p. } x \in \mathcal{L} \end{cases} \quad (7)$$

Certes, u_1 et u_2 sont à présent discontinues en temps ; mais la contrainte d'égalité de (6) reste satisfaite, et quant à la contrainte de stabilité, elle découle des inégalités de convexité vérifiées presque partout :

$$\begin{aligned} [\alpha a + (1 - \alpha)b]^2 + [(1 - \alpha)a + \alpha b]^2 &= [\alpha^2 + (1 - \alpha)^2](a^2 + b^2) + 4\alpha(1 - \alpha)ab \\ &\leq [\alpha^2 + (1 - \alpha)^2](a^2 + b^2) + 2\alpha(1 - \alpha)(a^2 + b^2) \\ &\leq [\alpha(1 - \alpha)]^2(a^2 + b^2) \leq (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'en pratique, de faibles valeurs de α (quelques pourcents) suffisent à stabiliser les couches PML. Il est aussi envisageable de considérer que α n'est pas constant dans la couche. Les résultats numériques qui suivent montrent même qu'il est souhaitable que α soit une fonction de la variable d'espace avec un profil semblable à l'amortissement σ (en général quadratique). Les propriétés des PML à l'interface seront ainsi conservées.

3. Mise en œuvre numérique

Le schéma numérique utilisé est le schéma aux différences finies décrit dans [6]. Les différentes variables sont évaluées sur des grilles décalées d'un demi-pas d'espace et à des instants différents (schéma en temps de type saute-mouton). Cependant, u_1 et u_2 sont calculés aux mêmes points de discrétisation et aux mêmes instants. La mise en œuvre de la méthode décrite au paragraphe 2 est donc immédiate : chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ introduit en (5) correspond à un pas de temps du schéma.

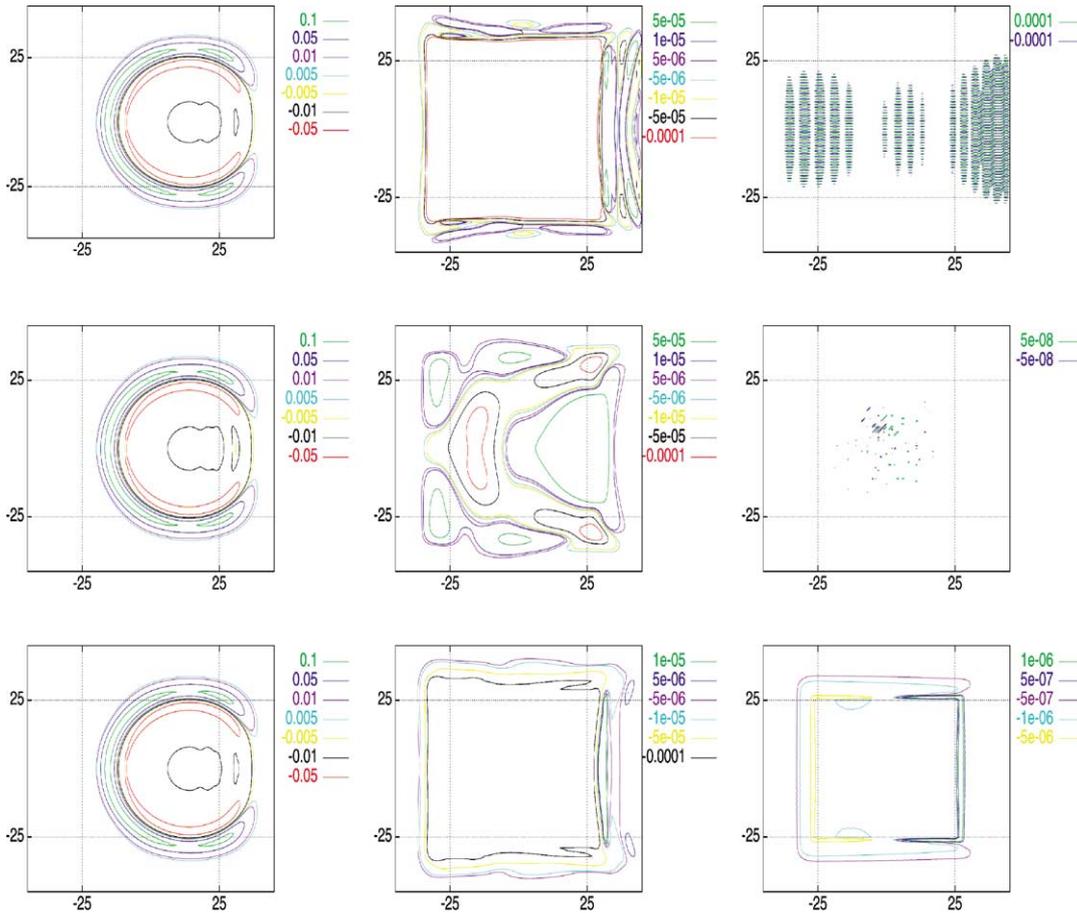


Figure 1. Équations d'Euler linéarisées 2D ($M_x = 0,5$ et $M_y = 0,0$) : isobares (pression p) après 40, 250 et 5000 itérations. Les couches absorbantes sont délimitées par les lignes pointillées. En haut : formulation PML ($\alpha = 0$). Au milieu : $\alpha = 0,02$. En bas : α variable en espace (fonction quadratique de 0 à 0,03).

Figure 1. 2D linearized Euler equations ($M_x = 0.5$ and $M_y = 0.0$): contours of pressure p after 40, 250 and 5000 time steps. Absorbing layer is delimited by dot lines. Top: PML formulation ($\alpha = 0$). Center: $\alpha = 0.02$. Bottom: α depends on space variables (quadratic function between 0 and 0.03).

A chaque pas de temps, les calculs PML conventionnels sont inchangés, on modifie simplement les valeurs de u_1 et u_2 comme suit :

$$u_1 \leftarrow (1 - \alpha)u_1 + \alpha u_2 \quad \text{et} \quad u_2 \leftarrow \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \quad (8)$$

de même pour (v_1, v_2) et (p_1, p_2) . Cette opération traduit exactement la méthode décrite par l'équation (7). Elle est également plus simple que celle décrite dans [6].

Sur la Fig. 1, on reproduit des résultats de l'expérience décrite dans [4] et reprise dans [6], d'abord avec $\alpha = 0$ (PML non modifiée), puis avec $\alpha = 0.02$. On voit qu'une très faible valeur de α suffit à stabiliser la couche.

Une autre façon de quantifier ce gain en stabilité consiste à calculer au cours du temps les normes L^2 des différentes variables du problème (voir Fig. 2). Même si rien ne permet d'affirmer que le problème soit effectivement stable, la stabilisation est manifeste et ce, pour une expérience qui compte plusieurs milliers

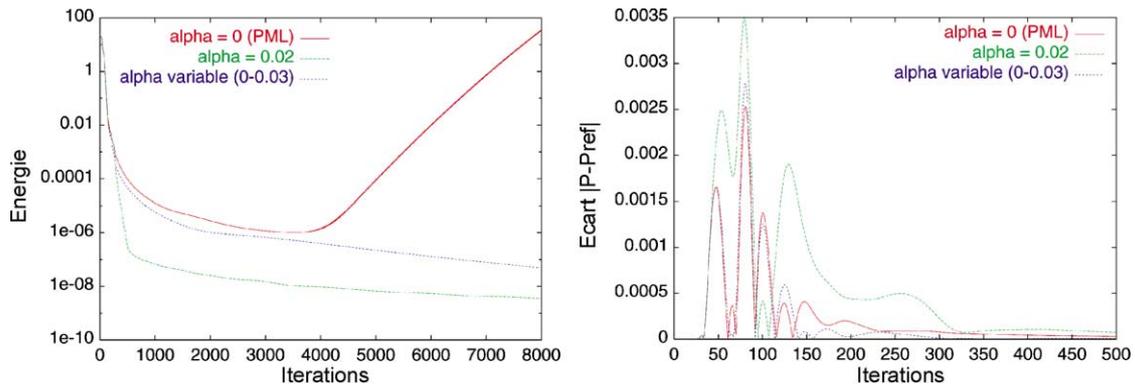


Figure 2. Équations d’Euler linéarisées 2D ($M_x = 0,5$ et $M_y = 0,0$). A gauche : calcul de l’« énergie » (somme des carrés de la norme L^2 des variables u, v, p) pour 3 formulations (PML, $\alpha = 0,02, \alpha = 0,03(x/L)^2$). A droite : écart de la valeur de la pression en un point du domaine proche de la couche par rapport à la solution de référence.

Figure 2. 2D linearized Euler equations ($M_x = 0.5$ and $M_y = 0.0$). Left: energy (Sum of the L^2 -norm of u, v, p) for 3 formulations (PML, $\alpha = 0.02, \alpha = 0.03(x/L)^2$). Right: error of the pressure at a point close to the absorbing layer compared to the reference solution.

de pas de temps. Enfin, on peut constater sur la seconde courbe de la Fig. 2 que l’on peut conserver le caractère « parfaitement adapté » de la PML en choisissant α comme une fonction de la variable d’espace.

Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire qu’une modification mineure de la formulation PML pour les équations d’Euler linéarisées semble lui conférer d’intéressantes propriétés de stabilité. Pourtant, la démarche décrite dans cette Note reste sommaire ; le cas échéant, de nombreuses adaptations sont possibles (dépendance du paramètre α en espace et/ou en temps par exemple).

Remerciements. Enfin, nous tenons à rendre hommage à Jacques-Louis Lions dont les précieux conseils sont pour beaucoup dans les résultats présentés dans cette Note.

Références bibliographiques

- [1] J.P. Bérenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.* 114 (1994) 185–200.
- [2] J.P. Bérenger, Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 44 (1996) 110–117.
- [3] J. Métral, O. Vacus, Caractère bien posé du problème de Cauchy pour les PML de Bérenger, *C. R. Acad. Sci., Série I* 328 (1999) 847–852.
- [4] Ch.K.W. Tam, L. Auriault, F. Cambuli, Perfectly matched layer as absorbing condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains, *J. Comput. Phys.* 144 (1998) 213–234.
- [5] S. Abarbanel, D. Gottlieb, A mathematical analysis of the PML method, *J. Comput. Phys.* 134 (1997) 357–363.
- [6] J.-L. Lions, J. Métral, O. Vacus, Well-posed absorbing layer for hyperbolic problem, *Numer. Math.* (2002), à paraître, <http://dx.doi.org/10.1007/s002110100263>.