

L'équation de Navier–Stokes avec mémoire et le transfert de quantité de mouvement dans un milieu poreux

Olivier Séro-Guillaume, Didier Calogine

LEMETA UMR CNRS 7563, 2, avenue de la forêt de Haye, 54504 Vandoeuvre les Nancy, France

Reçu le 18 février 2002 ; accepté après révision le 8 avril 2002

Note présentée par Charles-Michel Marle.

Résumé

On s'intéresse au transfert de quantité de mouvement dans un milieu poreux. Les équations du milieu continu équivalent sont écrites par la méthode de prise de moyenne mais la fermeture est obtenue en utilisant une thermodynamique étendue. Le modèle résultant correspond à l'équation de Navier–Stokes, dans laquelle la force exercée par la matrice sur le fluide satisfait une équation différentielle du premier ordre. Ce modèle d'équation de Navier–Stokes avec mémoire généralise le modèle de Darcy avec terme intégro-différentiel. *Pour citer cet article : O. Séro-Guillaume, D. Calogine, C. R. Mécanique 330 (2002) 383–389.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / milieux poreux / Navier–Stokes avec mémoire / E.I.T.

The Navier–Stokes equation with memory, and momentum transfer in a porous medium

Abstract

This paper is concerned with the momentum transfer in a porous medium. The equations for the continuous equivalent medium are written by the averaging method but the closure is obtained using an extended thermodynamics. The resulting model corresponds to the Navier–Stokes equation, in which the force exerted by the solid matrix on the fluid satisfies of first order differential equation. This Navier–Stokes equation model with memory generalises the Darcy model with an integro-differential term. *To cite this article: O. Séro-Guillaume, D. Calogine, C. R. Mécanique 330 (2002) 383–389.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / porous media / Navier–Stokes with memory / T.P.I.E.

Abridged English version

This work is motivated by the study of the flow inside vegetation, which contributes essentially to the propagation of forest fires for example. Vegetation is often modelled as a fractal and can be considered as a porous medium. So that there are several geometrical scales and several scales of velocity for the flow of gas inside and around a tree. In this work we aim to derive an equivalent medium model for such a porous medium. The methodology is inspired by the one initiated by Marle [4], which consists in: (1) extend by 0 quantities outside the phases where they are defined, (2) write the balance equations at microscopic level using distributions, (3) average these equations by taking the convolution product with

Adresse e-mail : osero@ensem.inpl-nancy.fr (O. Séro-Guillaume).

a regular kernel with compact support, (4) as new quantities has been defined by the preceding averaging close the system of equations using the positivity of the entropy production. The main differences with the present work are in the type of thermodynamics used and in the status of entropy. As the elementary representative volume (E.R.V.) can be large the particles may not be at thermodynamic equilibrium. Therefore we use here an extended thermodynamics as the one proposed by Jou et al. [5] named Extended Irreversible Thermodynamics (E.I.T.) or the one presented by Müller et al. [6] named Rational Extended Thermodynamics (E.R.T.). The entropy status is not the same in these two theories but at the very end in a linear approximation they seem to give similar results. It is more convenient to use the E.I.T. framework which is simpler than the E.R.T. method. In these new thermodynamics the space of variables involved in the entropy is extended to fluxes and forces.

The medium in the domain Ω is composed of a solid phase occupying the domain Ω_s and of fluid phase occupying the domain Ω_f so that $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$. Balance equations are written for mass (1), momentum (2) and energy (3) in the fluid domain, and energy (4) in the solid domain. Once the variables are extended and after averaging the balance equations, we can define the macroscopic quantities: porosity in relation (6), mass density in relation (8), velocity in relation (9), strain tensor and \mathbf{F}^{fs} the force exerted by the fluid on the solid in relation (11). After a lengthy calculation one can calculate the entropy production given in relations (25), (26). We are interested in a closure equation for the force \mathbf{F}^{fs} , the production of entropy is positive if the following relation is verified:

$$\tau \frac{d\mathbf{F}^{fs}}{dt} + \mathbf{F}^{fs} + P \text{grad } \Phi = \sigma \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{V}$$

relation (27). So that the balance of momentum reduces to a Navier–Stokes like Eq. (29) with the above memory term. If the memory and the inertial terms in (29) are neglected one recovers the usual Brinkman law and moreover if the viscosity effects are neglected one obtains Darcy’s law as already noticed by Marle [4]. Incidentally if the memory is not neglected but if the inertial and viscosity effects are neglected one recovers Darcy’s law with memory as obtained by homogenization theory [3]. Therefore the use of an extended thermodynamics can reconcile the results obtained by averaging theory and homogenization theory.

1. Introduction

Ce travail est motivé par l’étude de l’écoulement à l’intérieur de la végétation. Les écoulements dans de tels types de milieux ont une importance en météorologie [1] d’une part, mais aussi pour la modélisation des feux de forêts d’autre part, la quantité d’oxygène, due à l’écoulement, étant un des processus moteur de la propagation. Les milieux comme la végétation sont souvent considérés comme des milieux à caractère fractal. Dans un travail précédent [2] ils ont été considérés comme des milieux poreux et reconstruits par une méthode d’interpolation fractale. Pour obtenir le comportement du milieu équivalent la technique d’homogénéisation [3] est délicate à appliquer à cause de la présence de plusieurs échelles géométriques et de vitesses d’écoulements. Le nombre de Reynolds peut passer d’une valeur de 10^7 dans une partie où la végétation est peu compacte à une valeur de 10 dans une zone de végétation serrée. La méthode pour obtenir les équations du milieu équivalent est ici inspirée de celle de Marle [4]. Elle consiste en les étapes suivantes : (i) étendre les grandeurs définies dans chaque phase à l’ensemble du domaine en les prolongeant par 0 dans les autres phases, (ii) comme les dérivées de ces grandeurs étendues ne sont pas des fonctions mais des distributions, écrire les équations de bilan avec ces grandeurs étendues au sens des distributions, (iii) convoluer les équations avec un noyau régularisant à support compact (opération de prise de moyenne), (iv) fermer les équations en assurant la positivité de la production d’entropie. Cependant, comme il a été signalé dans [2], la taille de la particule fluide sur laquelle la « moyenne » est prise peut être assez grande, ou bien les propriétés physiques des matériaux peuvent être très différentes, de telle sorte que la particule fluide puisse ne plus être considérée comme étant à l’équilibre thermodynamique. Nous nous proposons

d'utiliser une thermodynamique étendue, comme celle proposée par [5] ou encore celle proposée par [6] dans laquelle l'espace des grandeurs dont dépend l'entropie est étendu aux forces et aux flux dissipatifs. Le procédé est le même que celui développé dans [2] où les conséquences sur le transfert de chaleur avait été étudié. Le présent travail s'attache plus spécialement aux conséquences sur le transfert de quantité de mouvement.

2. Équations à l'échelle microscopique

Considérons un milieu poreux contenant une matrice solide indexée par le symbole s occupant le domaine Ω_s . Dans ses pores, cette matrice contient une phase fluide indexée par f , qui occupe le domaine Ω_f , de sorte que $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f$ est le domaine occupé par le milieu poreux. Le solide est fixe dans l'espace ou animé d'un mouvement de solide indéformable, il n'est le siège que de transfert de chaleur, aucune réaction chimique n'a lieu.

Rappelons les équations intervenant à l'échelle du pore pour la phase f :

Bilan de masse :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho}\mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\rho}_f \mathbf{g} \quad (2)$$

Bilan d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\rho}_f \left(\tilde{e}_f + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \right) \right] + \text{div} \left[\tilde{\rho}_f \left(\tilde{h}_f + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \right) \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{q}}_f - \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right] - \tilde{\rho}_f \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (3)$$

\tilde{e}_f est l'énergie interne, l'enthalpie \tilde{h}_f est définie par $\tilde{h}_f = \tilde{e}_f + \tilde{p}_f / \tilde{\rho}_f$, $\tilde{\mathbf{q}}_f$ est le vecteur flux de chaleur. Le gaz est supposé être un gaz parfait et un fluide newtonien de sorte que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ peut s'écrire $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\tilde{p}_f \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}$.

Pour la phase solide seule l'équation de l'énergie subsiste, elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho}_s \tilde{e}_s) + \text{div}(\tilde{\mathbf{q}}_s) = 0 \quad (4)$$

Ces relations sont accompagnées des relations de saut à l'interface Σ entre les deux domaines.

3. Équations moyennées

Nous allons appliquer la technique évoquée dans l'introduction. Les équations valides à l'échelle microscopique vont être « moyennées ». Plus exactement les étapes sont les suivantes. On prolonge les grandeurs définies dans une phase par la valeur 0 dans l'autre phase. On écrit alors les équations sous forme distributionnelle, de telle sorte que les conditions limites ou aux interfaces soient incluses dans les équations.

Par exemple l'équation de continuité (1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}_f) + \nabla \cdot (\bar{\rho}_f \bar{\mathbf{v}}_f) = [\bar{\rho}_f (\bar{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\Sigma)] \cdot \mathbf{n}_f \delta_\Sigma \quad (5)$$

Dans (5) \mathbf{w}_Σ est la vitesse de l'interface et δ_Σ est la distribution de Dirac concentrée sur l'interface. Le terme $[\bar{\rho}_f (\bar{\mathbf{v}}_f - \mathbf{w}_\Sigma)] \cdot \mathbf{n}_f \delta_\Sigma$ est nul si le fluide adhère à la paroi solide.

On prend le produit de convolution de ces équations avec un noyau noté m à support compact assez régulier, comme celui donné en [4]. Comme un certain nombre de relations sont non linéaires, la prise de moyenne et les relations ne sont pas commutatives. Cependant on souhaite que le milieu équivalent macroscopique, s'il existe, vérifie les lois de bilans macroscopiques usuelles. Nous introduirons alors de nouvelles grandeurs qui dépendront des grandeurs microscopiques, en général de façon fonctionnelle. On

introduit tout d'abord la porosité Φ , définie par :

$$[\Phi] = (1 - \chi_s) * m \quad (6)$$

Dans la suite les grandeurs qui seront définies par des relations de la forme (6) seront placées entre crochets.

Après prise de moyenne on obtient :

Équation de Bilan de masse dans la phase f

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi \rho_f) + \text{div}(\Phi \rho_f \mathbf{V}) = 0 \quad (7)$$

la masse volumique ρ_f est définie par :

$$\Phi[\rho_f] = \bar{\rho}_f * m \quad (8)$$

la vitesse est définie par :

$$\Phi \rho_f[\mathbf{V}] = (\bar{\rho}_f \bar{\mathbf{v}}) * m \quad (9)$$

On obtient de même pour l'équation de bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi \rho_f \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\Phi \rho_f \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - \mathcal{S}) = \Phi \rho_f \mathbf{g} - \mathbf{F}^{fs} \quad (10)$$

avec les définitions suivantes :

$$\Phi \rho_f \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - [\mathcal{S}] = (\bar{\rho}_f \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) * m \quad (11)$$

$$[\mathbf{F}^{fs}] = (\bar{\rho}_f \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{w}_\Sigma) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{n}_\Sigma \delta_\Sigma * m$$

Remarquons que $[\mathbf{F}^{fs}]$ est la force qu'exerce la structure solide sur le gaz, elle apparaît comme un terme source. Et pour l'équation de bilan de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi \rho_f \left(E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \right) + \nabla \cdot \left(\Phi \rho_f \left(E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \mathbf{V} + \mathbf{Q}_f - \mathcal{S} \cdot \mathbf{V} \right) = \Phi \rho_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} - P \frac{\partial \Phi}{\partial t} - X^{fs} \quad (12)$$

l'énergie E_f est définie par :

$$\Phi \rho_f \left([E_f] + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = \bar{\rho}_f \left(\bar{e}_f + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 \right) * m \quad (13)$$

et le vecteur flux de chaleur \mathbf{Q}_f est défini par :

$$\Phi \rho_f \left(E_f + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) \mathbf{V} + [\mathbf{Q}_f] - \mathcal{S} \cdot \mathbf{V} = \left(\bar{\rho}_f \left(\bar{e}_f + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 \right) \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{q}}_f - \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) * m \quad (14)$$

Ces grandeurs macroscopiques ne sont pas les moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, le tenseur des contraintes \mathcal{S} contient des effets venant des efforts d'inertie car la moyenne $\bar{\rho}_f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} * m$ n'est pas $\Phi \rho_f \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$. La définition de la chaleur X^{fs} quittant la phase fluide au travers de l'interface Σ par unité de temps et de volume du milieu poreux est plus délicate. On peut la définir par :

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial t} + [X^{fs}] = \left(\left[\bar{\rho}_f \left(\bar{e}_f + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_f} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 \right) (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{w}}_\Sigma) + \bar{\mathbf{q}}_f - \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{p} \mathbf{w}_\Sigma \right] \cdot \mathbf{n}_\Sigma \delta_\Sigma \right) * m \quad (15)$$

Remarquons tout d'abord que les variables thermodynamiques habituelles, masse volumique ρ_f , et énergie interne E_f associées à l'équilibre ont été définies pour la phase f . On peut alors supposer que toutes les autres grandeurs thermodynamiques macroscopiques associées à la phase f sont définies pourvu que les équations d'état soient supposées être de mêmes types que celles valables au niveau microscopique à l'équilibre. Cette hypothèse est forte et discutable, car elle suppose que le milieu complexe dont on fabrique un modèle, suit les lois thermodynamiques habituellement utilisées pour les « corps usuels ». Le problème de la détermination de ces lois d'état est un problème en soit. Cependant si l'on fait cette hypothèse, la température T_f et la pression P sont définies.

Le tenseur des contraintes visqueuses \mathcal{T} est défini par :

$$\mathcal{S} = -\Phi P \mathbf{Id} + [\mathcal{T}] \quad (16)$$

La convolution du noyau avec l'équation (4) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \Phi) \rho_s E_s) + \text{div } \mathbf{Q}_s + X^{sf} = 0 \quad (17)$$

La masse volumique ρ_s , l'énergie interne E_s sont définies par :

$$(1 - \Phi)[\rho_s] = \bar{\rho}_s * m, (1 - \Phi)\rho_s[E_s] = (\bar{\rho}_s \bar{e}_s) * m \quad (18)$$

le vecteur flux de chaleur est défini par :

$$[\mathbf{Q}_s] = \bar{\mathbf{q}}_s * m \quad (19)$$

et la chaleur par unité de temps et de volume du milieu poreux X^{sf} quittant la phase solide au travers de Σ , est définie par :

$$[X^{sf}] = (\bar{\mathbf{q}}_s \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \delta_\Sigma * m \quad (20)$$

Notons que compte tenu des conditions à la traversée de l'interface Σ , la relation $X^{fs} + X^{sf} = 0$ qui exprime l'égalité des chaleurs reçues par les deux phases, doit être vérifiée.

4. Bilan d'entropie

Nous nous placerons, dans le cadre de la T.P.I.E. [5] ou de la Thermodynamique Rationnelle Etendue des Milieux Continus [6]. La prise de moyenne a introduit de nouvelles quantités essentiellement : les flux \mathcal{S} , \mathbf{Q}_f , \mathbf{Q}_s , les sources \mathbf{F}^{fs} , X^{fs} .

Pour clore le système d'équations, il faut relier ces quantités aux variables mécaniques et thermodynamiques usuelles. La variation de l'entropie S s'écrit :

$$\rho_{ve} \frac{dS}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_S + \sigma_S \quad (21)$$

\mathbf{J}_S est le flux d'entropie, σ_S est la production et $\rho_{ve} = \Phi \rho_f + (1 - \Phi) \rho_s$. Pour obtenir la variation totale d'entropie on écrit

$$\rho_{ve} \frac{dS}{dt} = \Phi \rho_f \frac{d^f S_f}{dt} + (1 - \Phi) \rho_s \frac{d^s S_s}{dt}.$$

Les dérivées sont prises dans le mouvement de chaque phase. La dépendance de l'entropie est étendue aux flux et sources. On suppose donc :

$$S_f = S_f \left(E_f, \frac{1}{\rho_f}, \mathbf{Q}_f, \mathbf{F}^{fs} \right) \quad \text{et} \quad S_s = S_s(E_s, \mathbf{Q}_s) \quad (22)$$

De telle sorte que les variations d'entropie sont données par :

$$d^f S = \frac{\partial S_f}{\partial E_f} d^f E_f - \frac{\partial S_f}{\partial(1/\rho_f)} \frac{d^f \rho_f}{\rho_f^2} + \frac{\partial S_f}{\partial \mathbf{Q}_f} d^f \mathbf{Q}_f + \frac{\partial S_f}{\partial \mathbf{F}^{fs}} d^f \mathbf{F}^{fs} \quad (23)$$

$$d^s S_s = \frac{\partial S_s}{\partial E_s} d^s E_s + \frac{\partial S_s}{\partial \mathbf{Q}_s} d^s \mathbf{Q}_s \quad (24)$$

Il faut maintenant remplacer toutes les différentielles dans les relations (23), (24) par leurs expressions tirées des relations de bilan, où les dérivées partielles sont remplacées en fonction des dérivées matérielles. On peut définir la température et la pression de non équilibre par $\partial S / \partial E_f = 1/\Theta_f$, $\partial S / \partial(1/\rho_f) = \Pi_f / \Theta_f$. Cependant en réalité le système n'est pas si loin de l'équilibre de sorte que la température et la pression thermodynamiques définies ci dessus peuvent être considérées comme égales aux température et pression

d'équilibre cf. [5]. On pose alors les relations suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial E_f} = \frac{1}{T_f}, \quad \frac{\partial S}{\partial(1/\rho_f)} = \frac{P_f}{T_f}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}_f} = -\frac{\mathbf{a}_f}{T_f}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{F}^{fs}} = \frac{\mathbf{W}}{T_f}, \quad \frac{\partial S}{\partial E_s} = \frac{1}{T_s}, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}_s} = -\frac{\mathbf{a}_s}{T_s}$$

Les deux vecteurs \mathbf{a}_f et \mathbf{a}_s peuvent être supposés nuls s'il n'y a pas de propagation de la chaleur, i.e. si $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_s = \mathbf{0}$, de sorte que l'on peut poser $\mathbf{a}_f = a_f(T_f, \rho_f, \dots)\mathbf{Q}_f$, $\mathbf{a}_s = a_s(T_s)\mathbf{Q}_s$, où a_f et a_s sont deux tenseurs du deuxième ordre. De la même façon le vecteur \mathbf{W} peut être considéré comme nul si la vitesse moyenne \mathbf{V} est nulle. On posera donc $\mathbf{W} = \tau(T_f, \rho_f, \mathbf{V}, \dots)\mathbf{V}$, τ est aussi *a priori* un tenseur du deuxième ordre. Compte tenu des relations précédentes, le bilan total d'entropie est obtenu en sommant alors tous les bilans pour les phases fluide et solide. Après calcul on obtient $\mathbf{J}_S = \mathbf{Q}_f/T_f + \mathbf{Q}_s/T_s$. La production d'entropie est la somme de plusieurs termes qui sont :

$$\sigma_{S1} = \text{grad } \mathbf{V} : \frac{\Sigma}{T_f} + \frac{\mathbf{V}}{T_f} \cdot \left(\tau \frac{d\mathbf{F}^{fs}}{dt} + \mathbf{F}^{fs} + P \nabla \Phi \right) \quad (25)$$

$$\sigma_{S2} = \mathbf{Q}_f \cdot \left(\nabla \frac{1}{T_f} - \frac{a_f}{T_f} \frac{d^f \mathbf{Q}_f}{dt} \right) + \mathbf{Q}_s \cdot \left(\nabla \frac{1}{T_s} - \frac{a_s}{T_s} \frac{d^p \mathbf{Q}_p}{dt} \right) - \frac{X^{fs}}{T_f} - \frac{X^{sf}}{T_s} \quad (26)$$

5. Fermeture des équations

Le terme de production d'entropie doit être positif, et ceci pour tout processus. Les différents facteurs intervenant dans la production d'entropie doivent être positifs indépendamment. En général on ne peut donner de critère pour que le terme $(\mathbf{V}/T_f) \cdot (\tau d\mathbf{F}^{fs}/dt + \mathbf{F}^{fs} + P_f \nabla \Phi)$ soit positif. Cependant en approximation linéaire on peut poser :

$$\tau \frac{d\mathbf{F}^{fs}}{dt} + \mathbf{F}^{fs} + P \text{ grad } \Phi = \sigma \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{V} \quad (27)$$

Où \mathbf{K} est un tenseur positif, c'est-à-dire tel que le produit scalaire $\langle \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle$ soit positif, σ est la densité de surface par unité de volume (ou surface spécifique). Pour le tenseur des contraintes on peut choisir la forme habituelle :

$$\mathfrak{S} = - \left[\Phi P + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \mathbf{Id} + 2\eta \mathbf{D} \quad (28)$$

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + {}^t \nabla \mathbf{V})$ est le tenseur taux de déformation.

Examinons les conséquences des relations (27) et (28) sur le bilan de quantité de mouvement, qui s'écrit compte tenu de l'équation de continuité :

$$\rho \Phi \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right) = -\Phi \text{ grad } P + \Phi \rho \mathbf{g} + \text{grad} \left(\frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \mathbf{F}^{fs} + 2 \nabla \cdot (\eta \mathbf{D}) \quad (29)$$

Comme remarqué par Marle si nous supposons que la viscosité est constante, que le fluide est incompressible, que l'écoulement est suffisamment lent pour que les termes non linéaires $\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ soient négligeables et que la constante de temps τ est négligeable, l'équation (29) correspond au modèle de Brinkman non stationnaire. Si de plus on néglige les forces de viscosité on obtient pour un écoulement stationnaire la loi de Darcy, le tenseur \mathbf{K}/σ s'identifie à la perméabilité du milieu. Le modèle obtenu contient donc comme sous-modèles deux des modèles les plus connus pour l'écoulement de fluides incompressibles en milieu poreux.

6. Discussion, conclusion

La méthode utilisée fournit un modèle assez général qui contient au moins deux des modèles les plus connus d'écoulement en milieux poreux. La fermeture a été obtenue avec une hypothèse de linéarité. Des

développements à des puissances plus élevées pourraient être considérés, de la forme :

$$\mathbf{F}^{fs} + P \operatorname{grad} \Phi = K_{ij}^1 V_j + K_{ijk}^2 V_j V_k + K_{ijkl}^3 V_j V_k V_l + \dots \quad (30)$$

Marušić-Paloka et Mikelić [7] obtiennent par homogénéisation la forme $\mathbf{V} = \mathcal{U}(f(x) - \nabla p(x))$ pour la loi de Darcy en tenant compte des effets d'inertie, où \mathcal{U} est une fonctionnelle non linéaire. Si l'on développe cette fonctionnelle par la formule de Taylor on obtient un modèle identique, du type Forchheimer–Ergun, à ce que donnerait (29) compte tenu de (30) en négligeant l'inertie. Lévy [8] et Allaire [9] plus tard ont montré d'ailleurs que l'on peut passer continûment de la loi de Brinkman à la loi de Darcy quand la taille de « l'inclusion » solide dans le volume élémentaire représentatif tend vers 0. L'homogénéisation de l'équation de Stokes instationnaire, et de l'équation de la chaleur fournit un modèle avec mémoire cf. Allaire dans [10] et [11], résultat qu'il n'est pas possible d'obtenir en considérant une thermodynamique usuelle. Ces deux remarques semblent montrer que le modèle des équations de Navier–Stokes avec mémoire est pertinent pour les milieux poreux avec structure interne.

Références bibliographiques

- [1] G. Groß, Numerical Simulation of Canopy Flows, Springer-Verlag, 1993.
- [2] O. Séro-Guillaume, J. Margerit, Modelling forest fires. Part I: A complete set of equations derived by extended irreversible thermodynamics, Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 1705–1722.
- [3] É. Sanchez-Palencia, Non Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Phys., Springer-Verlag, 1980.
- [4] C.M. Marle, On Macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media, Int. J. Engrg. Sci. 20 (5) (1982) 643–662.
- [5] D. Jou, J. Casa-Vasquez, G. Lebon, Extended Irreversible Thermodynamics, Springer-Verlag, 1993.
- [6] I. Müller, T. Ruggeri, Rational Extended Thermodynamics, 2nd edn., Springer, 1998.
- [7] E. Marušić-Paloka, A. Mikelić, The derivation of a non-linear filtration law including the inertia effects via homogenisation, Nonlinear Anal. 42 (2000) 97–137.
- [8] T. Lévy, Fluid flow through an array of fixed particles, Int. J. Engrg. Sci. 21 (1) (1983) 11–23.
- [9] G. Allaire, Homogenisation of the Navier–Stokes equations with a slip boundary condition, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991) 605–641.
- [10] U. Hornung, Homogenization and Porous Media, Springer-Verlag, 1997.
- [11] J.L. Auriault, Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, Int. J. Heat Mass Transfer 26 (1983) 861–869.