

Étude théorique et numérique du comportement d'un assemblage de plaques

Fouad Zaittouni^a, Frédéric Lebon^b, Christian Licht^a

^a Laboratoire de mécanique et génie civil, UMR 5508, Université Montpellier II, CC 048, place E. Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

^b Laboratoire mécanique matériaux structures, Université Claude Bernard Lyon 1, 82, Bd Niels Bohr, 69622 Villeurbanne, France

Reçu le 23 janvier 2002 ; accepté après révision le 28 mars 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé

On considère le comportement en flexion statique de deux plaques coplanaires de type Kirchhoff–Love collées par l'intermédiaire d'une troisième, plus étroite et moins rigide. Dans les cas d'une adhésion parfaite ou de conditions unilatérales entre les adhérents et l'adhésif, on étudie le comportement asymptotique de l'ensemble lorsque des paramètres liés à l'épaisseur et à la rigidité de la plaque intermédiaire tendent vers zéro. *Pour citer cet article* : F. Zaittouni et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 359–364. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solides et structures / collage / plaque / conditions unilatérales

Theoretical and numerical study of the behaviour of bonded plates

Abstract

We consider the flexural static behavior of two coplanar Kirchhoff–Love plates bonded by a thin third one, softer and narrower. In the case of perfect adhesion or unilateral conditions between the adherents and the adhesive, we study the asymptotic behavior of the assembly when the stiffness and the narrowness of the intermediate plate tend to zero. *To cite this article* : F. Zaittouni et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 359–364. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solids and structures / bonding / plate / unilateral conditions

Abridged English version

Adhesive bonding of linear elastic bodies involves a problem with several parameters, of which three at least are essential: the thickness of the adhesive which is small with respect to the size of the adherents and the elasticity coefficients of the glue which are lower than those of the adherents. In the literature this problem is treated with asymptotic techniques. When these small parameters go to zero, the adhesive geometrically disappears but is replaced by a mechanical constraint between the adherents. The constitutive equations of this constraint, which depends strongly on the relative behavior of these parameters, keeps in memory the mechanical and the geometrical characteristics of the adhesive. In this Note, such a technique is applied to the bonding of two Kirchhoff–Love plates with thickness h . The adhesive is also treated as a

Adresses e-mail : lebon@iutal2m.univ-lyon1.fr (F. Lebon); licht@lmgc.univ-montp2.fr (C. Licht).

Kirchhoff–Love plate of same thickness h , its small dimension being denoted by ε . We denote by λ' and μ the characteristic coefficients of the glue and $\beta = (\varepsilon, \lambda', \mu)$.

First, a perfect adhesion between the adhesive and the adherents is supposed. The limit problem obtained when β tends to 0 depends on the limit of the ratio between the small dimension ε and the characteristic coefficients. We assume that $\lambda'/\varepsilon^{2i+1}, \mu/\varepsilon^{2i+1}, 0 \leq i \leq 1$, admit limits λ'_i, μ_i in $[0, +\infty]$. The limit problem yields a relation at the interface between the shearing stress-resultant force T , the normal stress couples M_N and the jumps of deflection $\llbracket w \rrbracket$ and of deflection derivative (rotation) $\llbracket \partial w / \partial n \rrbracket$ with respect to the normal n :

- (a) If λ'_1 and $\mu_1 \in [0, +\infty[$, $T = h^3(\lambda'_1 + 2\mu_1)\llbracket w \rrbracket$;
- (b) If λ'_1 or $\mu_1 = +\infty$, $\llbracket w \rrbracket = 0$;
- (c) If λ'_0 and $\mu_0 \in [0, +\infty[$, $M_N = -\frac{h^3}{12}(\lambda'_0 + 2\mu_0)\llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket$;
- (d) If λ'_0 or $\mu_0 = +\infty$, $\llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket = 0$.

In a second step, we consider one-side conditions between the adhesive and the adherents

$$\llbracket w \rrbracket \leq 0, \quad T \geq 0, \quad \llbracket w \rrbracket T = 0, \quad \text{and} \quad \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket \leq 0, \quad M_N \leq 0, \quad \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket M_N = 0, \quad \text{respectively}$$

The asymptotic results are modified in order to take into account the positive part of the jump of deflection and rotation:

$$T = h^3(\lambda'_1 + 2\mu_1)\llbracket w \rrbracket^+, \quad M_N = -\frac{h^3}{12}(\lambda'_0 + 2\mu_0)\llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket^+, \quad \text{respectively}$$

The obtained laws have been implemented in a finite element software. The method is based on an overrelaxation procedure which has shown accuracy and robustness [4,6].

1. Description du problème

Le comportement en flexion d'un ensemble de trois plaques isotropes, minces, de type Kirchhoff–Love, de même épaisseur h et de surfaces moyennes coplanaires peut être schématisé de la manière suivante. Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^2 , de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ et d'intersection S avec $\{x_2 = 0\}$ de longueur positive, on note $\Omega_\varepsilon = \{x = (x_1, x_2) \in \Omega \text{ tel que } |x_2| > \frac{\varepsilon}{2}\}$, $B_\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ où ε est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro. Ces trois ouverts correspondent aux surfaces moyennes des trois plaques dans un état non déformé, l'une (celle de l'adhésif) étant nettement plus étroite que les deux autres (celles des adhérents). On suppose en outre que les coefficients de flexion λ' et μ de la plaque étroite sont petits par rapport à ceux d_{ijkl} des deux autres. On pose $\beta = (\varepsilon, \lambda', \mu)$. Les plaques étant supposées parfaitement collées entre elles, le déplacement de flexion \bar{w}^β de l'ensemble soumis à des charges volumiques et surfaciques sur une partie de sa surface latérale est solution d'un problème du type

$$\text{Min} \left\{ F_\beta(w) - l(w), w \in V = \left\{ w \in H^2(\Omega); w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\} \right\} \quad (\text{P}_\beta)$$

avec

$$F_\beta(w) = \frac{h^3}{24} \int_{\Omega_\varepsilon} d\kappa(w)\kappa(w) \, dx + \frac{h^3}{24} \lambda' \int_{B_\varepsilon} \Delta(w)\Delta(w) \, dx + \frac{h^3}{12} \mu \int_{B_\varepsilon} \kappa(w)\kappa(w) \, dx$$

$$l(w) = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma_1} \left(g w + m \frac{\partial w}{\partial n} \right) dl, \quad \kappa_{ij}(w) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad \Delta w = -\kappa_{ii}$$

Les lignes Γ_0 et Γ_1 réalisent une partition de $\partial\Omega$ et l'on suppose les charges telles que

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(m)) \cap B_\varepsilon = \emptyset \\ (f, g, m) \in L^2(\Omega) \cap L^2(\Gamma_1) \cap L^2(\Gamma_1) \end{cases} \quad (\text{H})$$

L'existence et l'unicité de \bar{w}^β sont classiques si l'on suppose que les coefficients λ' , μ et d vérifient les conditions usuelles d'ellipticité et de bornitude. On se propose d'étudier le comportement limite de \bar{w}^β lorsque β tend vers zéro en donnant une nouvelle démonstration des résultats de [1]. Ce problème peut modéliser le collage de deux plaques par une colle faiblement rigide ou une plaque endommagée sur une zone de faible largeur.

2. Résultats de convergence

On suppose désormais que $\lambda'/\varepsilon^{2i+1}$ et μ/ε^{2i+1} , $0 \leq i \leq 1$, admettent des limites λ'_i et μ_i dans $[0, \infty]$ et on pose $K_i = \frac{h^3}{12^{1-i}}(\lambda'_i + 2\mu_i)$. On définit l'espace X par :

- (i) $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^2/\mu < +\infty$: si $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^2/\mu = 0$, $X = H^1(\Omega)$; si $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^2/\mu > 0$, $X = W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, 2[$;
- (ii) $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^2/\mu = +\infty$: si $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^4/\mu = 0$, $X = L^2(\Omega)$; si $\limsup_{\beta \rightarrow 0} \varepsilon^4/\mu > 0$, $X = L^p(\Omega)$, $p \in [1, 2[$;

et on note τ sa topologie forte. Par la suite, $G(v) = (h^3/24) \int_\Omega d\kappa(v)\kappa(v) dx$ désigne la limite de l'énergie de déformation des adhérents et $\llbracket \varphi \rrbracket$ la différence des traces sur S de tout φ de $H^1(\Omega \setminus S)$.

Le comportement limite de la structure est donné par le

THÉORÈME 2.1. – *La solution \bar{w}^β de (P_β) converge dans X vers la solution \bar{w} du problème $\text{Min}\{F_0(w) - l(w)$; $w \in X\}$ avec*

- (a) si λ'_1 et $\mu_1 \in [0, +\infty[$, $F_0(w) = G(w) + (K_1/2) \int_S \llbracket w \rrbracket^2 ds$ si $w \in V_0$, $+\infty$ si $w \in X \setminus V_0$, $V_0 = \{w \in H^2(\Omega \setminus S)$; $w = \partial w / \partial n = 0$ sur $\Gamma_0\}$;
- (b) si λ'_1 ou $\mu_1 = +\infty$, $F_0(w) = G(w)$ si $w \in V_1$, $+\infty$ si $w \in X \setminus V_1$, $V_1 = \{w \in V_0$; $\llbracket w \rrbracket = 0$ sur $S\}$;
- (c) si λ'_0 et $\mu_0 \in [0, +\infty[$, $F_0(w) = G(w) + (K_0/2) \int_S \llbracket \partial w / \partial n \rrbracket^2 ds$ si $w \in V_1$, $+\infty$ si $w \in X \setminus V_1$;
- (d) si λ'_0 ou $\mu_0 = +\infty$, $F_0(w) = G(w)$ si $w \in V_2$, $+\infty$ si $w \in X \setminus V_2$, $V_2 = \{w \in V_1$; $\llbracket \partial w / \partial n \rrbracket = 0$ sur $S\}$.

Les liaisons limites obtenues dépendent des comportements relatifs de l'étroussure et des coefficients de rigidité de l'adhésif :

- $K_0 = 0$, les deux plaques sont libres.
- $0 < K_0 < +\infty$, l'interface présente une liaison élastique.
- $K_0 = +\infty$:
 - * $K_1 = 0$, l'interface présente une charnière libre.
 - * $0 < K_1 < +\infty$, l'interface présente une charnière élastique.
 - * $K_1 = +\infty$, les deux plaques sont parfaitement collées.

Schéma de démonstration. – Grâce aux estimations standards suivantes pour les éléments de V

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} |w(x)|^2 dx &\leq C \left(\varepsilon^2 \int_{B_\varepsilon} |\nabla w(x)|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w(x)|^2 dx \right) \\ \int_{B_\varepsilon} |\nabla w(x)|^2 dx &\leq C \left(\varepsilon^2 \int_{B_\varepsilon} |\kappa(w)|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |\kappa(w)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

où C désigne une constante indépendante de ε et d'après un argument de [2], la bornitude de F_β entraîne que la suite w^β est relativement compacte dans X . On établit ensuite :

$$\forall w \in X, \exists w^\beta \xrightarrow{\tau} w \text{ dans } X \text{ telle que } \limsup_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(w^\beta) \leq F_0(w) \quad (1)$$

Pour K_0 ou K_1 infini, on choisit $w^\beta = w$, sinon, on introduit une suite w_m dans $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus S) \cap V_i, i = 0, 1$, convergeant vers w dans V_i . Puis on considère la suite $w_m^\beta = R^\varepsilon w_m$ dans V qui converge dans X vers w_m avec

- si $|x_2| > \frac{\varepsilon}{2}, R^\varepsilon w(x_1, x_2) = w(x_1, x_2)$;
- si $|x_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}, R^\varepsilon w(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(s^\varepsilon(w) + \phi^\varepsilon(x_2)d^\varepsilon(\frac{\partial w}{\partial x_2})) + \psi_i^\varepsilon(w)$ si $W \in V_i, s^\varepsilon(\varphi) = \varphi(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) + \varphi(x_1, -\frac{\varepsilon}{2}), d^\varepsilon(\varphi) = \varphi(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) - \varphi(x_1, -\frac{\varepsilon}{2}), \phi^\varepsilon(x_2) = \frac{\varepsilon}{4}((\frac{2x_2}{\varepsilon})^2 - 1), \psi_0^\varepsilon(w) = \frac{x_2}{\varepsilon}(\phi^\varepsilon(x_2)s^\varepsilon(\frac{\partial w}{\partial x_2}) - \frac{1}{2}((\frac{2x_2}{\varepsilon})^2 - 3)d^\varepsilon(w)), \psi_1^\varepsilon(w) = \frac{w(x) - w(-x)}{2}$.

Les propriétés de l'opérateur de régularisation R^ε entraînent

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(w_m^\beta) = F_0(w_m) \tag{2}$$

La fonctionnelle F_0 étant continue pour la topologie forte de V_i , on déduit (1) par un argument classique de diagonalisation [3]. Enfin, on montre :

$$\forall w \in X, \forall w^\beta \rightarrow w \text{ dans } X, F_0(w) \leq \liminf_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(w^\beta) \tag{3}$$

Lorsque K_0 est fini, on considère une suite w_m appartenant à $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V_1$ convergeant vers w dans V_1 . L'inégalité de convexité $F_\beta(w^\beta) \geq F_\beta(w_m^\beta) + \nabla F_\beta(w_m^\beta) \cdot (w^\beta - w_m^\beta)$, la relation (2), les propriétés de R^ε et $\lim \int_S |\frac{\partial w^\beta}{\partial x_2}(x_1, \pm \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, 0)|^2 dx_1 = 0$ entraînent

$$\liminf_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(w^\beta) \geq F_0(w_m) + K_0 \int_S \left[\left\| \frac{\partial w_m}{\partial n} \right\| \left\| \frac{\partial(w - w_m)}{\partial n} \right\| \right] ds$$

D'où (3) en faisant tendre m vers l'infini. Le cas K_1 fini se traite de manière similaire. Si K_0 ou K_1 sont infinis, on utilise un argument de comparaison (cf. [3]). Le théorème découle alors de (1) et (3) (cf. [3]).

3. Prise en compte de conditions unilatérales

On suppose maintenant qu'il y a des relations unilatérales sans frottement entre la couche mince et les deux plaques. On introduit $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{w \mid w \in H^2(\Omega_\varepsilon); w \in H^2(B_\varepsilon); w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, S_\varepsilon^\pm = \{x \in \Omega; \pm x_2 = \frac{\varepsilon}{2}\}, K_\varepsilon^1 = \{w \mid w \in \mathfrak{N}_\varepsilon; \llbracket w \rrbracket \leq 0 \text{ sur } S_\varepsilon^\pm, \llbracket \frac{\partial w}{\partial x_2} \rrbracket = 0 \text{ sur } S_\varepsilon^\pm\}$ et $K_\varepsilon^2 = \{w \mid w \in \mathfrak{N}_\varepsilon; \llbracket w \rrbracket = 0 \text{ sur } S_\varepsilon^\pm, \llbracket \frac{\partial w}{\partial x_2} \rrbracket \leq 0 \text{ sur } S_\varepsilon^\pm\}$.

Les convexes $K_\varepsilon^k, k = 1, 2$, correspondent respectivement à du contact unilatéral et à des rotations unilatérales (liaison du type roue libre). Par la suite, on note $v^+ = \sup(v, 0)$.

Les deux problèmes mécaniques s'écrivent sous forme de problèmes d'optimisation :

$$\text{Min}\{F_\beta(w) - l(w), w \in K_\varepsilon^k\}, \quad k = 1, 2 \tag{P_\beta^k}$$

Dans ce cas, le comportement limite de la structure est donné par le

THÉORÈME 3.1. – La solution \overline{w}^β de (P_β^k) converge dans X vers la solution \overline{w} du problème $\text{Min}\{F_0(w) - l(w); w \in X\}$ avec

- (i) si $k = 1$, les cas (c) et (d) du Théorème 2.1 sont inchangés et (a) et (b) sont remplacés par
 - (a') si λ_1 et $\mu_1 \in [0, +\infty[, F_0(w) = G(w) + \frac{K_1}{2} \int_S (\llbracket w \rrbracket^+)^2 ds$ si $w \in V_0, +\infty$ si $w \in X \setminus V_0$,
 - (b') si λ_1 ou $\mu_1 = +\infty, F_0(w) = G(w)$ si $w \in V_3, +\infty$ si $w \in X \setminus V_3, V_3 = \{w \in V_0; \llbracket w \rrbracket \leq 0 \text{ sur } S\}$,
- (ii) si $k = 2$, les cas (a) et (b) du Théorème 2.1 sont inchangés et (c) et (d) sont remplacés par
 - (c') si λ_0 et $\mu_0 \in [0, +\infty[, F_0(w) = G(w) + \frac{K_0}{2} \int_S (\llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket^+)^2 ds$ si $w \in V_1, +\infty$ si $w \in X \setminus V_1$,
 - (d') si λ_0 ou $\mu_0 = +\infty, F_0(w) = G(w)$ si $w \in V_4, +\infty$ si $w \in X \setminus V_4, V_4 = \{w \in V_0; \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket \leq 0 \text{ sur } S\}$.

Schéma de démonstration. – On utilise des arguments semblables à ceux du Théorème 2.1. À titre d'exemple dans le cas $k = 2$ et pour $w \in V_1$, l'opérateur de régularisation devient

- si $|x_2| > \frac{\varepsilon}{2}$ $R^\varepsilon w(x_1, x_2) = w(x_1, x_2)$,
- si $|x_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $R^\varepsilon w(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(s^\varepsilon(w) + \phi^\varepsilon(x_2)(d^\varepsilon(\frac{\partial w}{\partial x_2}))^+) + \psi_i^\varepsilon(w)$.

Remarques. – La liaison limite obtenue correspond à la mise en série des liaisons unilatérales originelles et de la liaison limite du Paragraphe 2. On trouvera dans la version anglaise l’expression des lois de comportement des liaisons limites évoquées dans les Théorèmes 1 et 2.

4. Mise en oeuvre numérique

Une première étape de l’étude numérique consiste à traiter le problème pour de faibles valeurs de l’étroitesse et des paramètres de rigidité afin de vérifier que les résultats numériques sont cohérents avec la théorie et de chercher un seuil d’étroitesse à partir duquel on peut considérer la loi de contact comme valide. On traite l’exemple de deux plaques carrées isotropes de 1 m de coté, telles que les coefficients $\lambda'h^3$ et μh^3 associés à leur rigidité commune soient respectivement égaux à $0,8 \cdot 10^{+4}$ Nm et $1,2 \cdot 10^{+4}$ Nm. On donne successivement aux paramètres $(\varepsilon, \lambda'h^3, \mu h^3)$ de la couche étroite les cinq jeux suivants de valeurs (exprimées en unités S.I.) : $(10^{-1}, 250, 1200)$, $(5 \cdot 10^{-2}, 89, 600)$, $(10^{-2}, 8, 120)$, $(5 \cdot 10^{-3}, 2,8, 60)$, et $(10^{-3}, 0,25, 12)$. Sur la Fig. 1, on compare le rapport moment-saut de rotation sur la ligne de contact pour les cinq épaisseurs considérées au rapport limite théorique ($M_N = -2000 \llbracket \frac{\partial w}{\partial n} \rrbracket$ dans ce cas). Sauf près des bords, les courbes s’approchent de plus en plus de la courbe théorique lorsque ε tend vers zéro et les résultats globaux de « convergence énergétique » peuvent être considérés comme valides à partir de $\varepsilon = 10^{-2}$ m. La Fig. 1 montre la présence d’une couche limite singulière comme observé en [4,5] dans des situations analogues.

Une autre étape consiste à implémenter les lois de contact asymptotiques obtenues. Pour cela, on a adapté un algorithme de surrelaxation ponctuelle avec projection [6,7]. On présente la méthode dans le cas $k = 2$ du Théorème 3.1 ; on utilise des éléments finis $Q1$ – Lagrange [8], ce sont des quadrangles à quatre nœuds et douze degrés de liberté, les rotations et la flèche en chaque sommet.

On note N_h le nombre total de nœuds du maillage, I_N l’ensemble des indices des composantes normales des nœuds de rotation, ϖ le coefficient de relaxation, a la matrice de rigidité et b celle associée aux termes d’interface.

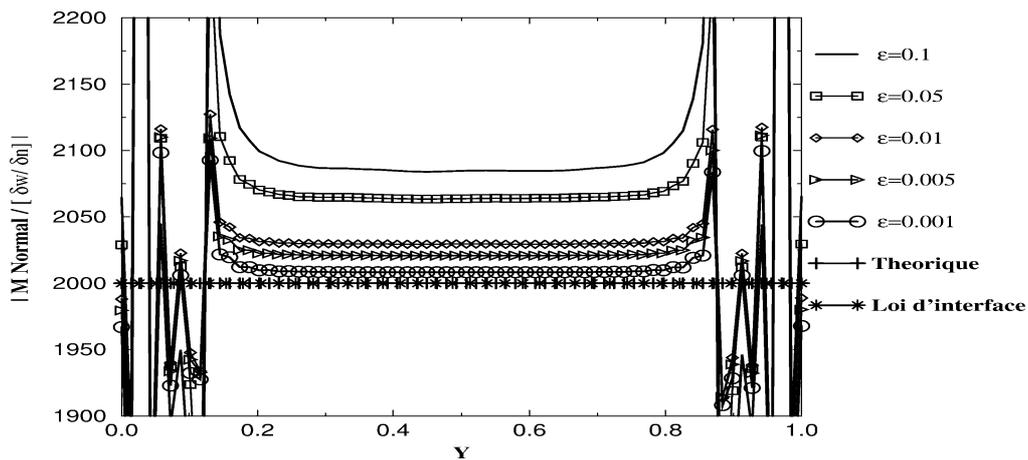


Figure 1. Rapport moment-saut de rotation sur la zone de contact.

Figure 1. Retro normal stress couple jump of rotation on the contact zone.

L'algorithme de relaxation s'écrit : u^0 arbitraire dans \mathbb{R}^{3N_h} , on suppose u_i^n connu et on détermine u_i^{n+1} de proche en proche pour $i = 1, \dots, 3N_h$:

$$\begin{cases} u_i^{n+1/2} = \frac{1}{a_{ii} + \gamma(u_i^{n+1/2})b_{ii}} \left(q_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} + \gamma(u_j^{n+1})b_{ij})u_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{3N_h} (a_{ij} + \gamma(u_j^n)b_{ij})u_j^n \right) \\ \text{avec} \\ \text{si } i \notin I_N, \gamma(u_i) = 0 \text{ et si } i \in I_N, \gamma(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_i \geq 0 \\ 1 & \text{si } u_i < 0 \end{cases} \\ u_i^{n+1} = (1 - \varpi)u_i^n + \varpi u_i^{n+1/2} \end{cases}$$

Cet algorithme peut être accéléré par une méthode de condensation [6]. On traite l'exemple précédent avec $K_0 = 10^{+11}$. La courbe correspondant à la loi d'interface coïncide parfaitement avec la courbe théorique (Fig. 1). L'algorithme s'est avéré précis et robuste.

Références bibliographiques

- [1] G. Geymonat, F. Krasucki, Analyse asymptotique du comportement en flexion de deux plaques collées, C. R. Acad. Sci. Paris, Série Iib 325 (1997) 307–314.
- [2] C. Licht, G. Michaille, Une modélisation du comportement d'un joint collé élastique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 322 (1996) 295–300.
- [3] H. Attouch, Variational Convergence for Functions and Operators, Pitman, London, 1984.
- [4] A. Ait Moussa, Modélisation et étude des singularités de contraintes d'un joint collé très mince, Thèse, Univ. Montpellier II, 2000.
- [5] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci, Analyse asymptotique du comportement d'un assemblage collé, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 322 (1996) 1107–1112.
- [6] M. Raous, P. Chabrand, F. Lebon, Numerical methods for solving unilateral contact problem with friction, J. Méc. Théor. Appl. 7 (1) (1988) 111–128.
- [7] F. Zaittouni, Modélisation théorique et numérique d'interfaces. Prise en compte du contact et du frottement, Thèse, Univ. Montpellier II, 2000.
- [8] P.L. George, P. Paté, M. Vidrascu, Guide 7 de Modulef, Fiches techniques, INRIA, 1992.