

Chargements axisymétriques d'un bicouche transversalement isotrope

Charles Ruimy, Marc Dahan

Université de Franche-Comté, Laboratoire de mécanique appliquée R. Chaléat, CNRS-UMR 6604, 24, chemin de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

Reçu le 18 février 2002 ; accepté le 8 avril 2002

Note présentée par André Zaoui.

Résumé

L'analyse exacte tridimensionnelle est développée pour un chargement axisymétrique appliqué normalement à la surface d'un massif semi-infini composé de deux matériaux transversalement isotropes. Le chargement est supposé être parallèle à l'axe de symétrie élastique du bicouche. Les solutions pour la force concentrée et pour une charge uniforme répartie sur un cercle sont obtenues sous la forme d'expressions intégrales. Les résultats numériques permettent de montrer l'influence de l'anisotropie au travers de courbes d'isovaleurs de contraintes. *Pour citer cet article : C. Ruimy, M. Dahan, C. R. Mécanique 330 (2002) 469–473.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

milieux continus / bicouche / anisotropie / chargement axisymétrique

Axisymmetric loading on a transversely isotropic two-layered medium

Abstract

An exact three-dimensional analysis is developed for an axisymmetric loading acting on the surface of a semi-infinite medium composed by two transversely isotropic materials. The loading is assumed to be parallel to the elastic symmetry axis of the upper layer. The solutions of a concentrated force and a uniform loading distributed on a circle are obtained by exact integral expressions. The numerical results are performed to show the anisotropic effect with isovalue curves of stress. *To cite this article: C. Ruimy, M. Dahan, C. R. Mécanique 330 (2002) 469–473.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

continuum mechanics / multi-layer / anisotropy / axisymmetric loading

1. Introduction

Nous considérons un milieu élastique occupant le demi-espace euclidien tridimensionnel ($-h \leq z < +\infty$). Nous supposons que ce milieu est composé de deux matériaux distincts transversalement isotropes et que l'axe Oz est leur axe de symétrie élastique commun. Nous limitant à un problème axisymétrique, nous utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et nous notons $(u, 0, w)$ les composantes du déplacement. Les composantes non nulles du tenseur contrainte sont alors $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz})$.

Le matériau est un bicouche composé d'une couche supérieure d'épaisseur h occupant l'espace définie par $-h \leq z \leq 0$ et d'un massif semi-infini défini par $z \geq 0$.

Adresses e-mail : charles.ruimy@univ-fcomte.fr (C. Ruimy); marc.dahan@univ-fcomte.fr (M. Dahan).

A l'interface des deux composants ($z = 0$), nous supposons qu'il n'y a pas de glissement. Cette condition s'exprime par la continuité des déplacements et des contraintes normales.

D'une façon générale, pour distinguer les expressions identiques relatives aux deux constituants, on surligne les éléments de la couche supérieure par une barre et on souligne ceux de la couche inférieure. Ainsi, les continuités à l'interface se traduisent par :

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, \theta, 0) &= \underline{u}(r, \theta, 0); & \bar{\sigma}_{zz}(r, \theta, 0) &= \underline{\sigma}_{zz}(r, \theta, 0), \\ \bar{w}(r, \theta, 0) &= \underline{w}(r, \theta, 0); & \bar{\sigma}_{rz}(r, \theta, 0) &= \underline{\sigma}_{rz}(r, \theta, 0) \end{aligned} \quad \forall (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 \quad (1)$$

Le bicouche est un milieu qu'on retrouve dans plusieurs branches de la mécanique. Nous avons choisi d'imposer le non-glissement à l'interface afin de modéliser le comportement de nombreux dépôts de matériaux en couche mince sur des substrats tels qu'on les rencontre en technologie de la microélectronique (wafers, ...). Toutefois, la même méthode de raisonnement peut être appliquée en acceptant le glissement sans frottement des deux couches, l'une sur l'autre. Classique en mécanique des sols, cette hypothèse se traduit à l'interface par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{w}(r, \theta, 0) &= \underline{w}(r, \theta, 0); & \bar{\sigma}_{rz}(r, \theta, 0) &= 0, \\ \bar{\sigma}_{zz}(r, \theta, 0) &= \underline{\sigma}_{zz}(r, \theta, 0); & \bar{\sigma}_{rz}(r, \theta, 0) &= 0 \end{aligned} \quad \forall (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 \quad (2)$$

2. Équations de base

Nous supposons que le bicouche est soumis, sur sa surface libre, à un chargement axisymétrique sans frottement. Les conditions aux limites s'expriment :

$$\bar{\sigma}_{zz}(r, \theta, -h) = -p(r); \quad \bar{\sigma}_{rz}(r, \theta, -h) = 0 \quad \forall (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 \quad (3)$$

où $p(r)$ est une fonction arbitraire définie sur \mathfrak{R}_+ et qui admet une transformée de Hankel d'ordre zéro p^H :

$$p^H(m) = \int_0^\infty r J_0(mr) p(r) dr$$

Enfin à l'infini, les contraintes et les déplacements sont supposés tendre vers zéro avec (r, z) tendant vers l'infini.

Dans [1] et [2], il est montré que pour ces matériaux transversalement isotropes, il existe une fonction potentiel de type Love $\varphi(r, z)$ dont l'expression est la suivante :

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty (A e^{s_1 mz} + B e^{s_2 mz} + C e^{-s_1 mz} + D e^{-s_2 mz}) J_0(mr) m dm \quad (4)$$

Les différentes constantes utilisées dans cette Note sont identiques à celles définies dans [1]. Les constantes nouvellement définies sont données en Annexe.

Les coefficients A , B , C et D sont déterminés pour chacun des deux matériaux du bicouche à partir des conditions aux limites sus-énoncées et les expressions des contraintes et des déplacements s'expriment

donc en fonction de ces constantes. En particulier, nous avons en tout point du milieu :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}(r, z) &= \int_0^\infty ((-A e^{s_1 m z} + C e^{-s_1 m z}) s_1 g_1 + (-B e^{s_2 m z} + D e^{-s_2 m z}) s_2 g_2) m^4 J_0(mr) dm \\
 \sigma_{rz}(r, z) &= \int_0^\infty ((A e^{s_1 m z} + C e^{-s_1 m z}) p_1 + (B e^{s_2 m z} + D e^{-s_2 m z}) p_2) m^4 J_1(mr) dm \\
 u(r, z) &= e \int_0^\infty (s_1 (A e^{s_1 m z} - C e^{-s_1 m z}) + s_2 (B e^{s_2 m z} - D e^{-s_2 m z})) m^3 J_1(mr) dm \\
 w(r, z) &= \int_0^\infty ((A e^{s_1 m z} + C e^{-s_1 m z}) q_1 + (B e^{s_2 m z} + D e^{-s_2 m z}) q_2) m^3 J_0(mr) dm
 \end{aligned} \tag{5}$$

3. Résolution

Les conditions à l'infini se traduisent immédiatement par $\underline{A} = \underline{B} = 0$.

Les conditions à l'interface (1) permettent d'écrire avec $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}((\bar{A} - \bar{C})\bar{s}_1 + (\bar{B} - \bar{D})\bar{s}_2) &= (-\underline{C}s_1 - \underline{D}s_2)\underline{e}; & (-\bar{A} + \bar{C})\bar{s}_1 \bar{g}_1 + (-\bar{B} + \bar{D})\bar{s}_2 \bar{g}_2 &= \underline{C}s_1 g_1 + \underline{D}s_2 g_2 \\
 (\bar{A} + \bar{C})\bar{p}_1 + (\bar{B} + \bar{D})\bar{p}_2 &= \underline{C}p_1 + \underline{D}p_2; & (\bar{A} + \bar{C})\bar{q}_1 + (\bar{B} + \bar{D})\bar{q}_2 &= \underline{C}q_1 + \underline{D}q_2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Quant aux conditions aux limites sur la surface du bicouche, nous déduisons de (3) et (5) :

$$\begin{aligned}
 (-\bar{A} e^{-\bar{s}_1 m h} + \bar{C} e^{\bar{s}_1 m h})\bar{s}_1 \bar{g}_1 + (-\bar{B} e^{-\bar{s}_2 m h} + \bar{D} e^{\bar{s}_2 m h})\bar{s}_2 \bar{g}_2 &= -p^H(m)/m^3 \\
 (\bar{A} e^{-\bar{s}_1 m h} + \bar{C} e^{\bar{s}_1 m h})\bar{p}_1 + (\bar{B} e^{-\bar{s}_2 m h} + \bar{D} e^{\bar{s}_2 m h})\bar{p}_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

car d'après les propriétés de la transformée de Hankel : $p(r) = \int_0^\infty m J_0(mr) p^H(m) dm$.

(6) et (7) forment un système de 6 équations linéaires par rapport aux 6 constantes d'intégration encore inconnues. Sa résolution conduit à :

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= -p^H(m) e^{\bar{s}_1 m h} (c_6 e^{(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) m h} \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + c_8 e^{2\bar{s}_2 m h} \bar{p}_2) / m^3 F \\
 \bar{B} &= p^H(m) e^{\bar{s}_2 m h} (c_7 e^{(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) m h} \bar{p}_2 + \bar{p}_1 + c_5 e^{2\bar{s}_1 m h} \bar{p}_1) / m^3 F \\
 \bar{C} &= c_5 \bar{A} + c_6 \bar{B} \\
 \bar{D} &= c_7 \bar{A} + c_8 \bar{B} \\
 \underline{C} &= \bar{A}(c_1 - c_1 c_5 - c_2 c_7) + \bar{B}(c_2 - c_1 c_6 - c_2 c_8) \\
 \underline{D} &= \bar{A}(c_3 - c_3 c_5 - c_4 c_7) + \bar{B}(c_4 - c_3 c_6 - c_4 c_8)
 \end{aligned} \tag{8}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 F &= (-\bar{g}_1 \bar{p}_2 \bar{s}_1 + c_5 e^{2\bar{s}_1 m h} \bar{g}_1 \bar{p}_2 \bar{s}_1 - c_8 e^{2\bar{s}_2 m h} \bar{g}_1 \bar{p}_2 \bar{s}_1 + \bar{g}_2 \bar{p}_1 \bar{s}_2 + c_5 e^{2\bar{s}_1 m h} \bar{g}_2 \bar{p}_1 \bar{s}_2 - c_8 e^{2\bar{s}_2 m h} \bar{g}_2 \bar{p}_1 \bar{s}_2 \\
 &\quad + (-c_6 c_7 + c_8 c_5) (\bar{g}_1 \bar{p}_2 \bar{s}_1 - \bar{g}_2 \bar{p}_1 \bar{s}_2) e^{2(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) m h} - 2 e^{(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) m h} (c_6 \bar{g}_1 \bar{p}_1 \bar{s}_1 - c_7 \bar{g}_2 \bar{p}_2 \bar{s}_2))
 \end{aligned}$$

En reportant ces résultats dans les expressions (5), relativement à chacun des deux matériaux, nous obtenons par intégration suivant m les valeurs des contraintes et des déplacements en tout point du bicouche. La convergence de ces intégrales a été vérifiée en déterminant l'équivalent de chacune des fonctions pour

m suffisamment grand. Leur résolution numérique a été faite en s’aidant du logiciel Matlab. Nous obtenons ainsi un tableau de valeurs numériques en fonction des variables r et z discrétisées. Il est à signaler que pour les points de l’axe de chargement ($r = 0$) ou ceux de la surface libre du massif ($z = -h$), les intégrales (5) sont obtenues sous une forme littérale exacte pour les différents chargements. Ces résultats permettent de vérifier que les conditions aux limites imposées sont bien satisfaites.

4. Chargement uniforme sur un disque de rayon r_0

Le chargement à la surface du massif résultant d’une force totale P est définie par :

$$p(r) = p_0 = P/\pi r_0^2 \quad \text{si } r < r_0 \quad \text{et} \quad p^H(m) = p_0 r_0 J_1(mr_0)/m \tag{9}$$

En introduisant cette expression de $p^H(m)$ dans les relations (8), nous pouvons évaluer les diverses intégrales (5).

Sur les courbes d’isovaleurs de la contrainte normale et de la contrainte de cisaillement, on vérifie la continuité des contraintes à l’interface. La modification des rayons de courbure pour $z = 0$ est due au changement de comportement des matériaux anisotropes. Cela est très net pour les courbes de la contrainte de cisaillement dans le bicouche anisotrope. *A contrario*, on note une parfaite continuité des courbes pour le bicouche isotrope.

En faisant tendre r_0 vers zéro dans l’expression (9), $p^H(m) = P/2\pi$. Nous en déduisons la solution pour une force ponctuelle en revenant aux formules (5) et (8).

Le résultat obtenu par différence d’un chargement p_0 sur un disque de rayon r_0 et un chargement $-p_0$ sur un disque de rayon r_1 correspond à une charge uniforme répartie sur un anneau $[r_1, r_0]$. Dans ce cas, $p^H(m) = p_0[r_0 J_1(mr_0) - r_1 J_1(mr_1)]/m$.

Les différents résultats présentés dans cette Note pour le matériau anisotrope sont facilement transposables au cas d’un bicouche totalement ou partiellement isotrope. En faisant tendre simultanément les coefficients \bar{s}_1 et \bar{s}_2 vers 1 pour la couche supérieure et/ou \underline{s}_1 et \underline{s}_2 vers 1 pour le massif inférieur, on obtient les résultats conformes à ceux exprimés par Burmister [3].

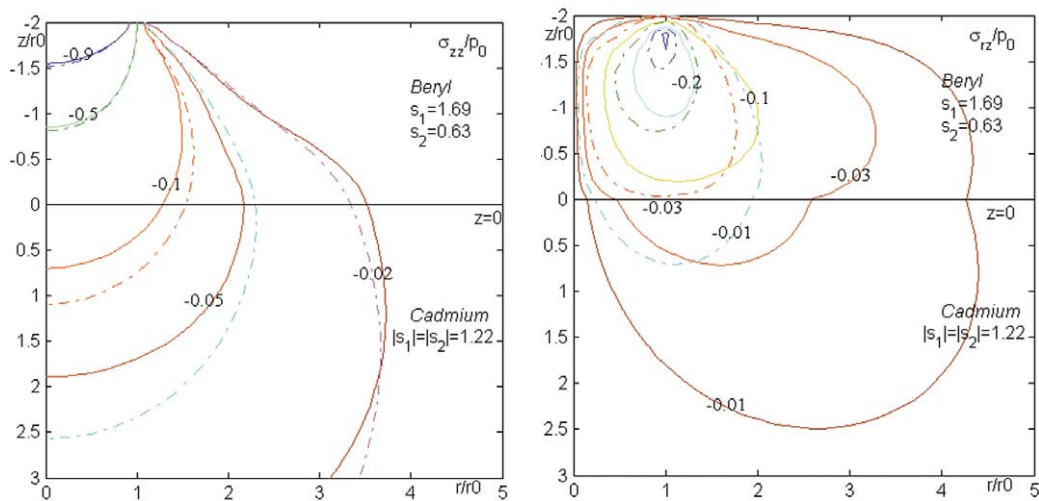


Figure 1. Isovaleurs des contraintes normales et de cisaillement pour un chargement uniforme sur un disque.

Figure 1. Distribution of normal and shear stresses for a uniform loading.

Le cas limite isotrope est représenté dans la figure en pointillé. Les matériaux anisotropes (béryl et cadmium) sont définis dans [4] par leurs constantes élastiques.

En supprimant la couche supérieure, c'est-à-dire en posant $h = 0$, ou en homogénéisant le bicouche ($\overline{a_{ij}} = a_{ij}$), on se retrouve dans le cas du chargement d'un massif semi-infini. La solution alors obtenue correspond à celle donnée dans [2] pour un massif transversalement isotrope (problème de Boussinesq).

Annexe

$$\begin{aligned}
 c_1 &= (-\underline{e}\overline{g_1} + \overline{e}g_2)\overline{s_1}/\underline{e}(g_1 - g_2)s_1 & c_3 &= (-\overline{e}g_1 + \underline{e}\overline{g_1})\overline{s_1}/\underline{e}(g_1 - g_2)s_2 \\
 c_2 &= (\overline{e}g_2 - \underline{e}\overline{g_2})\overline{s_2}/\underline{e}(g_1 - g_2)s_1 & c_4 &= -(\overline{e}g_1 - \underline{e}\overline{g_2})\overline{s_2}/\underline{e}(g_1 - g_2)s_2 \\
 \alpha_1 &= \overline{p_1} - \underline{p_1}c_1 - \underline{p_2}c_5 & \beta_1 &= \overline{q_1} - \underline{q_1}c_1 - \underline{q_2}c_5 \\
 \alpha_2 &= \overline{p_2} - \underline{p_1}c_2 - \underline{p_2}c_6 & \beta_2 &= \overline{q_2} - \underline{q_1}c_2 - \underline{q_2}c_6 \\
 \alpha_3 &= \overline{p_1} + \underline{p_1}c_1 + \underline{p_2}c_5 & \beta_3 &= \overline{q_1} + \underline{q_1}c_1 + \underline{q_2}c_5 \\
 \alpha_4 &= \overline{p_2} + \underline{p_1}c_2 + \underline{p_2}c_6 & \beta_4 &= \overline{q_2} + \underline{q_1}c_2 + \underline{q_2}c_6 \\
 c_5 &= (\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4)/(-\alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4) & c_7 &= (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)/(-\alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4) \\
 c_6 &= (\alpha_4\beta_2 - \alpha_2\beta_4)/(-\alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4) & c_8 &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)/(-\alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4)
 \end{aligned}$$

Références bibliographiques

- [1] M. Dahan, M. Predeleanu, Solutions fondamentales dans la théorie de l'élasticité aélotropique pour un milieu semi-infini, C. R. Acad. Sci., Série A 289 (1979) 147–150.
- [2] M. Dahan, Poinçons axisymétriques rigides sur un massif semi-infini transversalement isotrope, J. Mécan. Appl. 3 (1979) 373–386.
- [3] D.M. Burmister, The general theory of stresses and displacements in layered systems, J. Appl. Phys. 16 (1945) 89–94.
- [4] R.F.S. Hearmon, The elastic constants of anisotropic materials, Rev. Modern Phys. 18 (1946) 409–440.