

Étude tridimensionnelle des contraintes de cisaillement à la paroi dans un tube de section droite non circulaire

Salah Naili^a, Marc Thiriet^{b,c}, Christian Ribreau^d

^a Université Paris XII, Val-de-Marne, Faculté des sciences et technologie, Laboratoire de mécanique physique, UMR 7052 B2OA CNRS, 61, avenue du général de Gaulle, 94010 Créteil cedex, France

^b INRIA, Projet M3N, BP 105, 78153 Le Chenay cedex, France

^c Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598 CNRS, 75252 Paris cedex 05, France

^d IUT de Cachan, 9, avenue de la division Leclerc, BP 140, 94234 Cachan cedex, France

Reçu le 30 novembre 2001 ; accepté après révision le 15 avril 2002

Note présentée par Robert Dautray.

Résumé

Des simulations numériques de l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible sont effectuées dans un tube rectiligne rigide de section droite uniforme. La section droite est soit quasi-circulaire, soit collabée avec contact des parois opposées. Les variations de la contrainte de cisaillement à la paroi sont décrites non seulement le long du périmètre mouillé de la section droite mais aussi sur la longueur du tube, en particulier dans la longueur d'entrée. Ce travail a pour objectif de fournir les conditions nécessaires pour l'étude expérimentale du comportement des cellules endothéliales dans un environnement non-uniforme de cisaillement. *Pour citer cet article* : S. Naili et al., *C. R. Mecanique* 330 (2002) 483–490. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

biomécanique / écoulement laminaire / contrainte de cisaillement / culture cellulaire

Three-dimensional study of wall shear stresses in a tube of noncircular cross-section

Abstract

This paper describes numerical solutions of the Navier–Stokes equations for incompressible steady flow through a rigid smooth straight tube with an axially uniform non-circular cross section which mimics collapsed veins at peculiar values of the transmural pressure. One of the peculiar values of the transmural pressure produces a contact of the opposite walls along a straight segment. This article deals with the space variations of the wall shear stress induced along the wetted perimeter of the cross section as well as in the streamwise direction especially in the entry length. The motivation of this study is to provide the data for experimental works on flow-subjected endothelial cell culture when the space variations of the wall shear stress are non-uniform. *To cite this article*: S. Naili et al., *C. R. Mecanique* 330 (2002) 483–490. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

biomechanics / laminar flow in ducts / steady shear flow / physics of cellular

Adresses e-mail : naili@univ-paris12.fr (S. Naili); marc.thiriet@inria.fr (M. Thiriet); christian.ribeau@iut-cachan.u-psud.fr (C. Ribreau).

Abridged English version

Wall shear stresses exerted by a Newtonian incompressible fluid in straight vessels with uniformly collapsed rigid walls are computed when the developing steady flow is laminar. The cross-section of the vessel is uniform in the longitudinal direction; two types of cross-sections are investigated. The first corresponds to the unstressed configuration (transmural pressure $p = 0$) denoted Σ_0 ; it is elliptic (ellipticity of 1.005). The second Σ_l is obtained from the computation of the deformation without extension of a thin-walled conduit of infinite length with homogeneous purely elastic walls of constant thickness, which, subjected to a uniform transmural pressure, collapses in a mode of two-lobe deformation: the opposite walls are in contact in a segment at p_l , characterized by an infinite curvature radius at the intersection of the symmetry axes.

The Navier–Stokes equations are solved numerically by the finite element method (software N3S). The resolution is based on the variational formulation of these equations. The computational domain is discretized into tetrahedra of type P1isoP2/P1 where velocities and pressure are approached. The tests are carried out with the same volumic flow-rate whatever the tube for 3 Reynolds numbers ($\mathcal{R}_{e_0} = 35, 500, 1000$).

In the straight pipes, an axial gradient in wall shear stress is observed only in the entry length. The product of the dimensionless wall shear stress and of the Reynolds numbers are computed. The fully developed laminar value is known in Σ_0 to be equal to 2 and is used to check the validity of the computation. $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ decreases abruptly and then slowly over a tube length which is longer when \mathcal{R}_{e_0} is greater and reaches the Poiseuille value. In the quasi-circular configuration Σ_0 , $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ is constant along the wetted perimeter of the cross section. In Σ_l , $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ are minimum at the edges and maximum at the lobe faces. The wall shear stress maximum location is affected by \mathcal{R}_{e_0} . The larger \mathcal{R}_{e_0} the closer to the wall contact the wall shear stress maximum.

These results provide not only data for the design of chambers with cell cultures subjected to flow which coat perspex models of collapsed veins but also estimates of the shear stresses applied to the endothelial cells. The next stage consists in computing the flow quantities in domains meshed from the imagery of the experimental benches. Such a technique validates the numerical tests by the measurement of some entities in 2 sections of the tube only. Moreover, the stress field, known in each point of the tube, allows to better understanding of the biological responses of the endothelial cells in culture.

1. Introduction

Les interactions entre le flux sanguin et les parois vasculaires sont très fortement impliquées dans le contrôle local de la vasomotricité ainsi que celui de la croissance et du développement des vaisseaux. Elles interviennent aussi largement dans la physiopathologie du vieillissement, de l'hypertension, et des diverses situations où les efforts et les débits locaux sont modifiés [1]. De nombreux travaux ont prouvé qu'il y avait un lien direct entre les efforts auxquels la paroi est soumise et la structure pariétale [2].

Les cellules endothéliales constituent la barrière entre la paroi vasculaire et le sang ; elles sont impliquées dans l'hémostase. Elles règlent le tonus du muscle lisse de la paroi vasculaire par la production des facteurs vasoactifs [3]. Ces cellules sont exposées aux chargements mécaniques, variables dans le temps en raison de l'écoulement pulsé du sang et dans l'espace en raison des courbures longitudinale et transversale de la paroi.

L'influence spécifique de la composante transversale de vitesse et/ou de son gradient sur les cellules endothéliales a été peu étudiée, en particulier dans les veines susceptibles de se collaber, c'est-à-dire lorsque les parois opposées du vaisseau s'affaissent [4,5]. Une installation expérimentale a été développée pour produire des contraintes de cisaillement avec des gradients transversaux locaux [6]. Le banc de mesure est composé de cellules endothéliales cultivées dans un tube rectiligne de section droite caractéristique

soumises à un écoulement laminaire pleinement développé. Les auteurs ont détecté des changements de forme des cellules endothéliales dus à un réarrangement du cytosquelette sous l'effet des forces appliquées par le flux.

Cette note vise à évaluer la contrainte de cisaillement due à l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien dans un tube rectiligne de section droite non circulaire à l'image d'une veine aplatie. Nous déterminons par une méthode numérique non seulement la contrainte de cisaillement à la paroi le long de l'abscisse curviligne pour différentes sections du vaisseau, mais aussi, longitudinalement pour une abscisse curviligne donnée. Cette étude a pour objet de contribuer à une meilleure compréhension des mécanismes en jeu en vue des applications physiologiques, et d'établir les conditions nécessaires pour l'étude expérimentale du comportement des cellules endothéliales dans un environnement non-uniforme de cisaillement.

2. Formulation du problème

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible dans un tube rectiligne d'axe \vec{z} dont la section droite est non-circulaire. Ce tube est rapporté à un repère orthonormé $\mathbf{R}(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ où O est un point situé sur l'axe \vec{z} et dans la section droite d'entrée. Cette section droite caractéristique est obtenue à partir de l'étude de la déformation d'un tube élastique mince d'axe \vec{z} dont la section droite dans la configuration de référence est légèrement elliptique et soumise à la pression transmurale uniforme p , définie par la différence de pression de part et d'autre de la paroi latérale [7]. Dans une telle étude, le tube est considéré comme homogène, d'épaisseur constante, de longueur infinie, et dont la surface moyenne est inextensible. Pour décrire la déformation du tube, la théorie des coques minces a été employée. La formulation mécanique est ramenée à un problème décrit dans le plan de la section droite par une ligne moyenne de l'épaisseur de la paroi. La déformation de cette ligne se produit sans allongement. Dans ce cadre, les tubes à parois minces isotropes (ou orthotropes) homogènes de section droite elliptique s'affaissent en prenant une forme caractérisée par deux axes de symétrie. La pression transmurale associée à la configuration de référence est notée p_0 ($p = 0$). À la pression $p_q < 0$, la section droite devient quasi-ovale. À la pression $p_c < 0$, les parois opposées sont en contact en un point. Lorsque p est abaissé en dessous de p_c , la courbure de la section droite au point de contact diminue jusqu'à ce qu'elle devienne nulle à la pression de ligne de contact p_l . Pour $p < p_l$, le contact se produit le long d'un segment rectiligne dont la longueur augmente à mesure que p diminue. Les *lumen* des deux tubes associés aux pressions p_0 et p_l sont respectivement notés Σ_0 et Σ_l et leurs sections droites S_0 et S_l .

Les formes des sections droites sont représentées Fig. 1(a). On définit l'origine de l'abscisse curviligne par le point d'intersection B de l'axe des y positifs et de la paroi. Ce point B est le point médian de la face supérieure de la paroi mouillée. La face inférieure est constituée par la paroi opposée. Les bords droit et gauche sont les points d'intersection de la paroi avec l'axe des x positif et négatif respectivement. Le sens de parcours du bord de la section droite est anti-trigonométrique. La courbure transversale de la paroi est constante pour S_0 ; elle est donnée Fig. 1(b) pour S_l uniquement pour les x positifs. Les variables sans dimension utilisées dans ces figures sont précisées ci-dessous.

La section droite elliptique dans la configuration de référence est caractérisée par son périmètre χ_0 et son ellipticité $k_0 = 1,005$, définie par le rapport du demi-axe principal a_0 au demi-axe mineur b_0 . Le demi-axe a_0 est utilisé comme longueur caractéristique. Par conséquent, le périmètre sans dimension pour toutes les sections droites est donné par $\tilde{\chi} = \chi_0/a_0$. En outre, l'aire de la section droite A est normalisée par sa valeur dans la configuration de référence A_0 de sorte que $\tilde{A} = A/A_0$. L'aire sans dimension des sections droites est donnée dans le Tableau 1.

L'écoulement stationnaire dans le tube est régi par les équations de Navier–Stokes exprimées en variables sans dimension :

$$\overrightarrow{\text{Grad}} \vec{V} \cdot \vec{V} = -\overrightarrow{\text{Grad}} \tilde{p}_i + \frac{1}{\mathcal{R}_{e0}} \tilde{\Delta} \vec{V}, \quad \widetilde{\text{Div}} \vec{V} = 0 \quad (1)$$

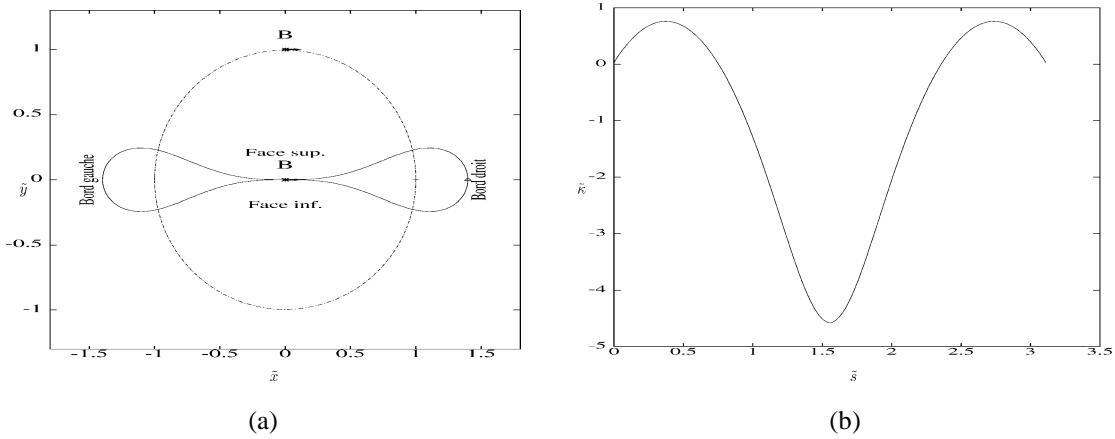


Figure 1. (a) Forme des sections droites S_0 et S_I . S_0 est marqué par le symbole + tandis que S_I par Δ . Le point B et la flèche indiquent respectivement l’origine de l’abscisse curviligne $\tilde{s} = 0$ et la direction pour décrire la contrainte de cisaillement à la paroi le long du périmètre mouillé. Nous avons non seulement localisé les faces supérieures et inférieures, mais aussi, les bords droits et gauches. (b) Courbure $\tilde{\kappa}$ fonction de \tilde{s} sur le bord de S_I .

Figure 1. (a) Cross section shape – marked by one symbol – S_0 and S_I : S_0 by + and S_I by Δ ; The point B – marked by the symbol \times – and the arrow indicate respectively the origin of the arclength – $\tilde{s} = 0$ – and the clockwise direction to describe the wall shear stress along the wetted perimeter. We have not only located the upper and lower faces but also the right and left edges. (b) Local curvature $\tilde{\kappa}$ versus the dimensionless arclength \tilde{s} on the boundary of S_I .

Tableau 1. Pour chaque section droite, nous donnons son aire A , son aire normalisée \tilde{A} , et enfin, la vitesse sans dimension \tilde{V}_Γ à l’entrée du tube afin d’obtenir un débit volumique sans dimension $\tilde{q}_v = 1/2$ quelle que soit la configuration.

Table 1. For each cross section, we give the cross sectional area A , its normalized cross sectional area \tilde{A} , and finally, the boundary condition at the inlet cross section of the tube \tilde{V}_Γ in order to obtain a dimensionless volume flow-rate equal to 1/2 whatever Σ .

	S_0	S_I
A	3,12	0,66
\tilde{A}	1	0,21
\tilde{V}_Γ	0,5	2,38

où $\vec{\nabla}$, Div et $\tilde{\Delta}$ sont respectivement les opérateurs de gradient, de divergence et de Laplace. En raison de la longueur caractéristique choisie, le nombre de Reynolds est défini par $\mathcal{R}_{e_0} = V_c a_0 / \nu$, où V_c est une vitesse caractéristique définie dans la Section 3 et ν la viscosité cinématique du fluide. Les variables sans dimension sont reliées aux variables physiques par les relations :

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}}{V_c}, \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i}{\rho V_c^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{a_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{a_0} \quad (2)$$

où \vec{V} and p_i sont respectivement les champs de vitesse et de pression du fluide, ρ la densité du fluide, et enfin, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ sont les coordonnées d'une particule fluide par rapport à \mathbf{R} .

Si l'on note respectivement Γ_1 and Γ_2 les sections droites d'entrée et de sortie associées au domaine tridimensionnel d'étude de l'écoulement et Γ_3 sa surface latérale, les conditions aux limites sont :

$$\vec{V} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad \tilde{V}_z = \tilde{V}_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \tilde{\mathbf{T}}\vec{n}_2 = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3)$$

où \tilde{V}_z est la composante axiale du champ de vitesse, \tilde{V}_Γ est la vitesse uniforme à l'entrée, laquelle est ajustée afin d'obtenir un débit volumique sans dimension identique pour toutes les configurations Σ , $\tilde{\mathbf{T}}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy sans dimension, et enfin, \vec{n}_2 est le vecteur unitaire normal sortant à la surface Γ_2 .

Avec ces variables sans dimension, la partie visqueuse associée au tenseur des contraintes de Cauchy est définie par :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{2}{\mathcal{R}_{e_0}} \tilde{\mathbf{D}} \quad (4)$$

où $\tilde{\mathbf{D}}$ est le tenseur sans dimension associé au tenseur des taux de déformation. À chaque point de la surface latérale, le vecteur contrainte associé à la partie visqueuse est défini par :

$$\vec{\tau} = \frac{2}{\mathcal{R}_{e_0}} \tilde{\mathbf{D}}\vec{n} \quad (5)$$

où \vec{n} est vecteur normal unitaire à Γ_3 orienté vers l'intérieur du domaine. Ainsi, ce vecteur sans dimension caractérise l'effort exercé par le fluide sur la paroi latérale par unité d'aire.

3. Méthode numérique et conditions de calculs

Les équations de Navier–Stokes (1), associées aux conditions aux limites (3), sont résolues numériquement par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel N3S [8]. La résolution s'appuie sur la formulation variationnelle de ces équations. Le maillage des *lumen* des tubes est réalisé avec des tétraèdres et l'élément fini utilisé est défini par une approximation P1isoP2/P1 pour la vitesse et la pression respectivement. Le système d'équations algébriques issu de la discrétisation des équations de Navier–Stokes est résolu à l'aide de la méthode du gradient conjugué. Les tests sont effectués à débit sans dimension et constant quelle que soit la configuration de la section droite du tube, défini par la relation :

$$\tilde{q}_v = \int_{\tilde{A}} \tilde{V}_z d\tilde{A} = \frac{1}{2} \quad (6)$$

où $d\tilde{A}$ est l'élément différentiel de surface associé à \tilde{A} . Ce choix est justifié par le cas d'un écoulement stationnaire pleinement développé dans un tube de section droite circulaire pour lequel V_c est la vitesse maximale sur l'axe. Les valeurs de \tilde{V}_Γ pour les deux configurations Σ sont données dans le tableau.

On remarquera qu'usuellement le nombre de Reynolds est défini par la relation $\mathcal{R}_e = (V_\Gamma d_h)/\nu$, où d_h est le diamètre hydraulique donné par la relation $d_h = 4A/\chi_0$. Mais puisque $\tilde{q}_v = 1/2$, on montre que $V_c = 2V_\Gamma \tilde{A}$, et par conséquent, $\mathcal{R}_{e_0} = \mathcal{R}_e$. Les calculs sont effectués pour 3 nombres de Reynolds ($\mathcal{R}_{e_0} = 35, 500, 1000$).

Le vecteur contrainte est calculé en chaque noeud de la paroi par rapport au repère \mathbf{R} à l'aide d'une interpolation par des polynômes de Lagrange de degré 1. Le vecteur contrainte est ensuite converti dans un repère local associé à la paroi. La résultante en chaque noeud est pondérée par l'aire des faces frontières ayant le noeud considéré comme sommet.

4. Résultats et discussion

Comme prévu, les résultats numériques montrent que la composante \tilde{V}_z du champ de vitesse est prédominante vis-à-vis des deux autres composantes, ainsi que la composante $\tilde{\tau}_z$ du vecteur associé au cisaillement. En outre, pour un écoulement stationnaire établi dans un tube de section droite circulaire, la vitesse maximale du fluide est constante et est égale à 1. Par ailleurs, la contrainte de cisaillement à la paroi est constante et est égale à 2. Ainsi, en utilisant la configuration Σ_0 , on trouve que la contrainte de cisaillement est évaluée avec une erreur maximale relative inférieure à 4%.

La Fig. 2 montre les variations de $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ en fonction de l'abscisse curviligne \tilde{s} à différentes cotes \tilde{z} pour $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ dans Σ_I . $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ est nul au point de contact, augmente jusqu'à un maximum puis diminue jusqu'à un minimum aux bords. La localisation du maximum sur la face est affecté par \tilde{z} dans la longueur d'entrée. En revanche, la localisation du minimum sur le bord ne varie pas dans la longueur d'entrée.

La Fig. 3 donne les variations de $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ en fonction \tilde{z} pour les trois nombres de Reynolds considérés le long du bord de Σ_0 . En raison du développement de la couche limite, $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ décroît de la section d'entrée (profil de vitesse uniforme) très fortement sur une distance représentant environ 4% de la longueur du tube quelle que soit \mathcal{R}_{e_0} . La décroissance de $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ s'effectue ensuite sur une longueur d'autant plus grande que \mathcal{R}_{e_0} est plus élevé. Le gradient axial de $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ n'est observé que dans la longueur d'entrée du tube. Dans le tronçon terminal du tube, $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ atteint la valeur obtenue pour l'écoulement de Poiseuille.

Avec les mêmes caractéristiques que la Fig. 3 mais pour Σ_I , la Fig. 4 montre que $\tilde{\tau}_z \times \mathcal{R}_{e_0}$ évolue le long du tube de la même manière mais avec une amplitude environ dix fois plus grande.

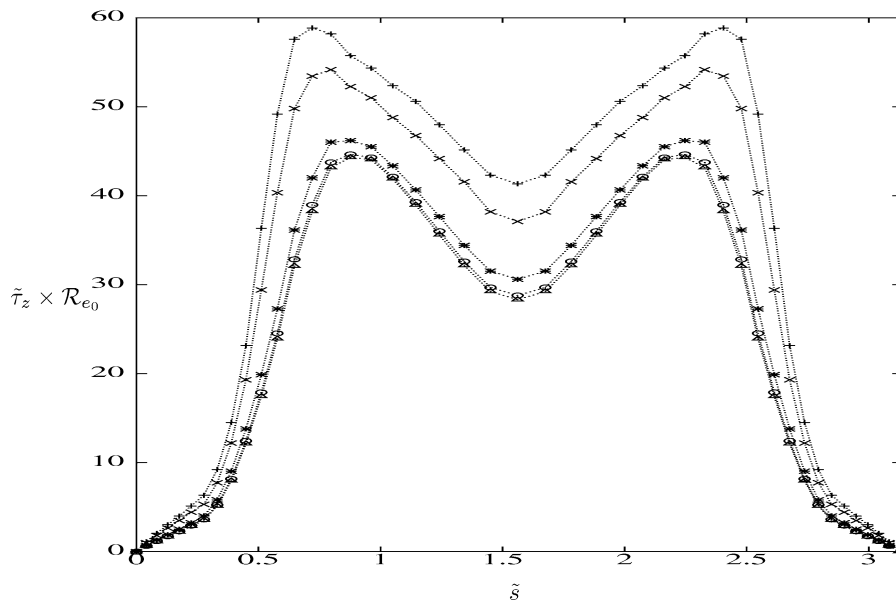


Figure 2. Contrainte de cisaillement à la paroi $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ fonction de \tilde{s} pour des sections droites données quand $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ dans Σ_I : $\tilde{z} = 2$ (+ + +), $\tilde{z} = 3$ (x x x), $\tilde{z} = 7,5$ (***), $\tilde{z} = 9$ (o o o), $\tilde{z} = 10,5$ ($\Delta\Delta\Delta$), $\tilde{z} = 36$ ($\nabla\nabla\nabla$), $\tilde{z} = 64,5$ ($\diamond\diamond\diamond$).

Figure 2. Wall shear stress $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ along the dimensionless arclength at selected cross sections when $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ in the configuration Σ_I : $\tilde{z} = 2$ (+ + +), $\tilde{z} = 3$ (x x x), $\tilde{z} = 7.5$ (***), $\tilde{z} = 9$ (o o o), $\tilde{z} = 10.5$ ($\Delta\Delta\Delta$), $\tilde{z} = 36$ ($\nabla\nabla\nabla$), $\tilde{z} = 64.5$ ($\diamond\diamond\diamond$).

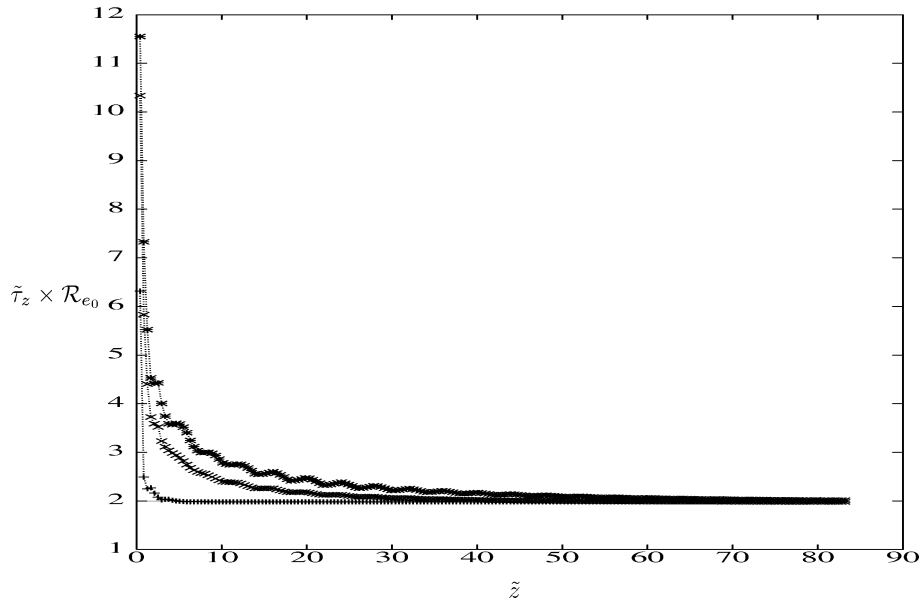


Figure 3. Contrainte de cisaillement à la paroi $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ fonction de \tilde{z} pour les trois nombres de Reynolds dans Σ_0 : $\mathcal{R}_{e_0} = 35$ (+ + +), $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ (x x x), $\mathcal{R}_{e_0} = 1000$ (***) .

Figure 3. Wall shear stress $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ versus \tilde{z} for the three Reynolds numbers in Σ_0 : $\mathcal{R}_{e_0} = 35$ (+ + +), $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ (x x x), $\mathcal{R}_{e_0} = 1000$ (***) .

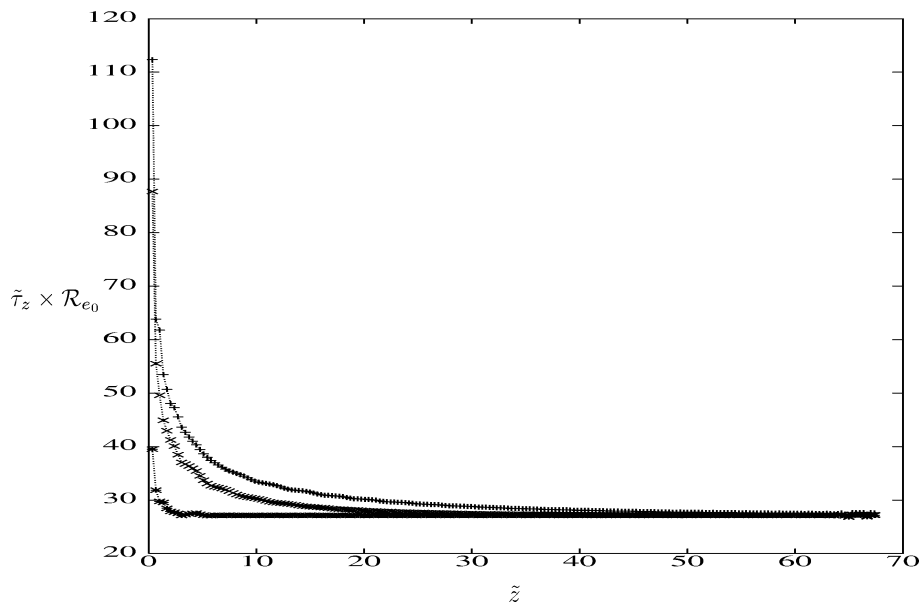


Figure 4. Contrainte de cisaillement à la paroi $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ fonction de \tilde{z} pour les trois nombres de Reynolds dans Σ_l : $\mathcal{R}_{e_0} = 35$ (+ + +), $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ (x x x), $\mathcal{R}_{e_0} = 1000$ (***) .

Figure 4. Wall shear stress $\mathcal{R}_{e_0} \times \tilde{\tau}_z$ versus \tilde{z} for the three Reynolds numbers in Σ_l : $\mathcal{R}_{e_0} = 35$ (+ + +), $\mathcal{R}_{e_0} = 500$ (x x x), $\mathcal{R}_{e_0} = 1000$ (***) .

5. Conclusion

Ces premiers résultats apportent des données pour la conception de chambres de cultures cellulaires sous flux et ils fournissent des estimations de contraintes auxquelles les cellules en cultures dans des maquettes de veines collabées sont soumises. Une prochaine étape consistera à calculer les contraintes dans des domaines maillés à partir de l'imagerie des bancs expérimentaux. Cette technique permettrait de valider les tests numériques par la mesure de quelques entités en 2 sections du tube uniquement. Surtout, le champ de contrainte calculé en chaque point du tube et à chaque instant permettra de mieux comprendre la réponse des cellules en culture dans des configurations de vaisseaux collabés.

Références bibliographiques

- [1] A. Tedgui, B.I. Lévy, Contraintes mécaniques et hydrauliques dans les vaisseaux sanguins : définitions, physiologie et physiopathologie, *Sang, Thrombose & Vaisseaux* 5 (1993) 91–97.
- [2] G.K. Owens, Growth response of aortic smooth muscle cells in hypertension, in: R. Lee (Ed.), *Blood Vessel Change in Hypertension: Structure and Function*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1989, pp. 45–64.
- [3] P.F. Davies, Endothelial cells, hemodynamics forces and the localization of atherosclerosis, in: D. Ryan (Ed.), Vol. II, CRC Press, 1986, pp. 123–138.
- [4] M.J. Levesque, R.M. Nerem, Elongation and orientation of endothelial cell shape in response to shear, *ASME J. Biomech. Engrg.* 107 (1985) 341–347.
- [5] S. Naili, C. Ribreau, Wall shear stress in collapsed tubes, *European Phys. J. Appl. Phys.* 5 (1999) 95–100.
- [6] C. Haond, C. Ribreau, O. Bouterin-Falson, M. Finet, Laminar flow through a model of collapsed veins. Morphometric response of endothelial vascular cells to a longitudinal shear stress non uniform cross-wise, *European Phys. J. Appl. Phys.* 8 (1999) 87–96.
- [7] C. Ribreau, S. Naili, M. Bonis, A. Langlet, Collapse of thin-walled elliptical tubes for high values of the major-to-minor axis ratio, *ASME J. Biomech. Engrg.* 115 (4(A)) (1993) 432–440.
- [8] N3S Package, EDF-Simulog, France, 2000.