

Problème spectral pour la propagation conique des ondes élastiques dans un réseau de galeries

Sébastien Guenneau, Chris Poulton, Alexander Movchan

Department of Mathematical Sciences, Liverpool University, Liverpool L69 3BX, UK

Reçu le 3 janvier 2002 ; accepté après révision le 14 mars 2002

Note présentée par Pierre Suquet.

Résumé

L'objet de cette Note est l'analyse de la propagation conique des ondes élastiques dans des guides périodiques de type cristal phonique. On propose une nouvelle méthode qui s'appuie sur une approche dite « diffusion multiple », qui nous conduit à un système algébrique de type « Rayleigh ». La formulation spectrale du problème aux valeurs propres ainsi obtenu nous permet de construire les courbes de dispersions aux hautes fréquences et par la même d'étudier les structures à bandes interdites phoniques en propagation conique. On note une perturbation singulière induite par l'angle de conicité. *Pour citer cet article : S. Guenneau et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 491–497.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ondes / guide périodique / propagation conique

A spectral problem for conically propagating elastic waves through an array of cylindrical channels

Abstract

This Note is devoted to the analysis of elastic waves conically propagating through a doubly periodic array of cylindrical channels. A new method, based on a multiple scattering approach, has been proposed to reduce the problem to an algebraic system of the Rayleigh type. We obtain an eigenvalue problem formulation that enables us to construct the high-order dispersion curves and to study phononic band gap structures in oblique propagation. We note an effect of singular perturbation associated with a small angle of conical propagation. *To cite this article: S. Guenneau et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 491–497.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

waves / periodic array / conic propagation

Abridged English version

The object of this paper is to study the propagation of elastic vibrations through structured materials. It is well-known that in the propagation of *electromagnetic* waves through inhomogeneous materials many interesting and unusual phenomena may be observed. Such phenomena include the so-called 'band-gap' effects, where a range of frequencies is forbidden to propagate within the medium. Technological implications of this research have ensured that this area has received much attention over the last decade [8].

Slightly less well studied is the propagation of *elastic* waves through materials which exhibit microstructure. Although the equations which govern the behaviour of these waves possess an additional degree of complexity, it is expected that many of the interesting phenomena which arise in the study of photonic crystals will also occur in corresponding problems of elastodynamics. Previous studies in this

Adresses e-mail : guenneau@liverpool.ac.uk (S. Guenneau); cpoulton@liverpool.ac.uk (C. Poulton); abm@liverpool.ac.uk (A. Movchan).

area have focussed either on the homogenised limit, valid for the low-frequency domain, or on transverse incidence and other cases where the coupling between the wave modes can be neglected.

We consider an elastic wave propagating through a heterogeneous material of volume density ρ and with Lamé coefficients λ and μ . In this material we drill an array of cylindrical channels, of circular cross-section and periodically spaced in the $x - y$ plane. The elastic wave is then propagating conically through this array of cavities, with the angle of incidence given by the longitudinal wavenumber β (Fig. 1).

The displacement field $\mathbf{U}(x, y, z)$, of frequency of vibration ω , satisfies the Navier equations

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}(x, y, z) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}(x, y, z) + \rho\omega^2\mathbf{U}(x, y, z) = 0 \quad (0.1)$$

For the case of ‘transverse propagation’ the vector \mathbf{U} is independent of z , as in [1,2]. In the present paper we consider a problem of ‘conical propagation’, which means in our case that the solution of (0.1) is sought in the form $\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y)e^{i\beta z}$, where β is a real positive constant, characterising a longitudinal projection of the wavevector, along the axis of a cylindrical void (Fig. 1).

The complex nature of these differential equations necessitates a transformation to a simpler set of equations; we formulate the problem in terms of the Lamé potentials $\Phi(x, y)e^{i\beta z}$ and $\Psi(x, y)e^{i\beta z}$, which, though coupled on any interface within the material, satisfy Helmholtz equations wherever the material happens to be homogeneous. These potentials also have a physical interpretation, in that $\Phi(x, y)e^{i\beta z}$ gives rise to Longitudinal (or Pressure) waves in the material, whereas the vector potential $\Psi(x, y)e^{i\beta z}$ generates waves of the Shear type.

Because the tractions must vanish on the surface of each cavity, we obtain a set of boundary conditions which couple the potentials Φ and Ψ . These are expressed in terms of the components of the stress tensor:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad (0.2)$$

The remaining condition follows from a zero-divergence requirement on Ψ , which is necessary for the consistency of the potential formulation. Due to the periodicity of the array, we note that the displacement field \mathbf{u} must satisfy the quasi-periodicity condition

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_{\text{Bloch}} \cdot \mathbf{R}_p) \quad (0.3)$$

where $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$ lies in the $x - y$ plane and is known as the Bloch vector or quasi-momentum in the context of Solid-State Physics. The vector \mathbf{R}_p also lies in the $x - y$ plane and points to the p th cavity in the array. The generating potentials ϕ and Ψ must also possess the quasi-periodicity conditions. The problem is now well-posed, and the frequency of vibration ω can be calculated for any given value of the Bloch vector $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$. In this way one can specify the dispersion relation for an arbitrarily high frequency.

We have developed a new method which is successfully applied in the study of phononic crystals; the potentials are expanded in terms of cylindrical functions and the equations of motion, as well as the boundary conditions (0.2), are satisfied exactly. The multiple scattering algorithm presented in this paper is highly efficient for composites of finite volume fraction of inclusions/voids. We propose several examples which involve voids of comparatively small radii (cf. Figs. 2(a)–(d)). It is essential to note that all three modes, dilatational, in-plane shear and out-of plane, are coupled for the case of oblique incidence of elastic waves on an array of circular cylinders (Figs. 2(c), (d)). We have analysed this coupling phenomenon and its relation to the dispersion diagrams. It is also worth noting that the oblique incidence formulation, for small β , generates a singular perturbation problem and that the lower part of the spectrum requires analysis involving evanescent waves; this reveals the possible existence of waves which are bound to the surface of each void.

1. Formulation du problème spectral

L'étude de la propagation d'ondes élastiques dans un milieu hétérogène décrit par sa densité volumique ρ et ses coefficients de Lamé λ et μ repose sur l'analyse de ses modes propres. S'agissant du problème traité, savoir la propagation d'ondes acoustiques en incidence conique dans un matériau présentant une périodicité

dans le plan $(x - y)$ et une invariance suivant l'axe des z , si $\beta > 0$ désigne la constante de propagation (ou « angle de conicité » i.e. la projection longitudinale du vecteur d'onde, cf. Fig. 1), étant donné un point $x \in \mathbb{R}^3$, on cherche donc tous les champs de déplacements non nuls $\mathbf{U}(x, y, z)$ de la forme $\mathbf{u}(x, y) e^{i\beta z}$ et leur fréquence de vibration ω associée, qui satisfont l'équation de Navier :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}(x, y, z) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{U}(x, y, z) + \rho\omega^2\mathbf{U}(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

Pour le cas de la « propagation transverse », le champ de vecteur \mathbf{U} est indépendant de z , comme dans [1,2]. La nature complexe de cette équation vectorielle requiert un changement d'inconnue. Il apparaît plus commode de travailler avec les potentiels scalaire et vectoriel de Lamé $\Phi(x, y) e^{i\beta z}$ et $\Psi(x, y) e^{i\beta z}$:

$$\mathbf{U} = \nabla(\Phi e^{i\beta z}) + \nabla \times (\Psi e^{i\beta z}), \quad \nabla \cdot (\Psi e^{i\beta z}) = 0 \quad (1.2)$$

Si l'on restreint l'étude aux structures de type air-silice, on déduit alors de (1.1) et (1.2), que ces potentiels sont solutions des équations de Helmholtz entre les cavités d'air :

$$(\Delta + (k_{\perp,a})^2)\Phi = 0, \quad (\Delta + (k_{\perp,b})^2)\Psi_j = 0, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (1.3)$$

où $k_{\perp,p}$, $p \in \{a, b\}$, est défini par $k_{\perp,p} = \sqrt{(k_p)^2 - \beta^2}$ et $k_p = \omega/v_p$. Ici, les quantités v_a et v_b désignent les célérités des ondes de dilatation et de cisaillement dans le matériau et s'expriment en fonction des coefficients de Lamé comme $v_a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $v_b = \sqrt{\mu/\rho}$.

Les quatre équations d'Helmholtz sont couplées par quatre conditions aux limites. Plus précisément, en coordonnées cylindriques, les composantes normale, tangentielle et longitudinale u_r , u_θ , u_z du champ de déplacement \mathbf{u} sont données naturellement en fonction de celles de Ψ

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} - i\beta \Psi_\theta, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} + i\beta \Psi_r, \quad u_z = i\beta \Phi + \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \Psi_\theta \quad (1.4)$$

La condition de nullité pour la traction sur le bord circulaire des tiges ($r = r_c$) s'exprime alors par

$$\sigma_{rz} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1.5)$$

où σ_{rz} , σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ dénotent les trois composantes du tenseur des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + i\beta u_r \right), & \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + i\beta u_z \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

La jauge portant sur la divergence nous fournit la condition de compatibilité. Notre problème spectral est bien posé si l'on spécifie en outre que le champ de déplacement \mathbf{u} satisfait une condition de quasi-périodicité

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_p) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_{\text{Bloch}} \cdot \mathbf{R}_p) \quad (1.7)$$

où le vecteur de Bloch $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$ vit dans le plan $x - y$ et \mathbf{R}_p pointe sur le centre de la p -ième cavité.

La condition (1.7) annonce que nous cherchons des modes propagatifs i.e. les solutions correspondant aux ondes se propageant à travers une structure « périodique infinie » (cf. Fig. 1). Le vecteur $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$ – « vecteur de Bloch » – représente la projection transverse du vecteur d'onde pour un signal propagatif (cf. Fig. 1). Les fonctions qui possèdent la propriété (1.7) sont connues dans la littérature comme « fonctions de Bloch » [3].

Il est bon de noter que dans le cas particulier où $\beta = 0$ (incidence transverse), résoudre le système de Navier revient alors à chercher d'une part les potentiels scalaires Ψ_1 et Ψ_2 solutions de (1.3) avec la condition au bord $\sigma_{rz} = 0$ et la jauge (ondes longitudinales de pression) et d'autre part les potentiels scalaires Φ et Ψ_3 solutions de (1.3) avec les conditions au bord couplées $\sigma_{rr} = 0$ et $\sigma_{r\theta} = 0$ (ondes transverses de pression et de dilatation) [1,2]. Dans le cas général, notant Φ , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 les potentiels scalaires exprimés dans une base cartésienne, les conditions aux limites et de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + i\beta \Psi_3 = 0 \quad (1.8)$$

$$\left[\mu \left(2i\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} + \beta^2 \Psi_2 \right) + \sin \theta \left(-\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} - \beta^2 \Psi_1 \right) + \frac{i\beta}{r_c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=r_c} = 0 \quad (1.9)$$

$$\left[2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta} - \frac{1}{r_c} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - i\beta \left(\cos \theta \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right) \right) - (k_{\perp,a})^2 (2\mu + \lambda) \Phi - \lambda \beta^2 \Phi \right] \Big|_{r=r_c} = 0 \quad (1.10)$$

$$\left[\mu \left(-\frac{2}{r_c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r_c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial r} + (k_{\perp,b})^2 \Psi_3 + \frac{2}{r_c} \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} + \frac{2}{r_c^2} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta^2} + \cos \theta \left(i\beta \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{i\beta}{r_c} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \left(i\beta \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{i\beta}{r_c} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \right) \right) \right] \Big|_{r=r_c} = 0 \quad (1.11)$$

On décompose les potentiels de Lamé en séries de fonctions de Bessel ou multipôles

$$\Phi(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (a_m^{(0)} \chi_m(k_{\perp,a}r) + b_m^{(0)} X_m(k_{\perp,a}r)) e^{im\theta} \quad (1.12)$$

où $(\chi_m, X_m) = (J_m, Y_m)$ quand $k_{\perp,a}$ est réel, $(\chi_m, X_m) = (I_m, K_m)$ si $k_{\perp,a}$ est imaginaire pur, et

$$\Psi_j(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (a_m^{(j)} J_m(k_{\perp,b}r) + b_m^{(j)} Y_m(k_{\perp,b}r)) e^{im\theta}, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (1.13)$$

En substituant (1.8) dans (1.9)–(1.11), avec (1.12) et (1.13) on obtient le système linéaire :

$$\mathbf{L}_m^0 \mathbf{A}_m + \mathbf{L}_m^1 \mathbf{A}_{m+1} + \mathbf{L}_m^2 \mathbf{A}_{m-1} = \mathbf{P}_m^0 \mathbf{B}_m + \mathbf{P}_m^1 \mathbf{B}_{m+1} + \mathbf{P}_m^2 \mathbf{B}_{m-1} \quad (1.14)$$

où les décalages à gauche et à droite sont induits par l'angle de conicité $\beta > 0$: dans le cas transverse, (1.14) se réduit à $\mathbf{L}_m^0 \mathbf{A}_m = \mathbf{P}_m^0 \mathbf{B}_m$. Les composantes transverses de \mathbf{u} étant quasi-périodiques et solutions de l'équation d'Helmholtz, on déduit d'une intégration par parties dans la cellule de base du réseau et du théorème d'addition de Graf les identités de Rayleigh [1,2,4].

$$A_l^{(0)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+m} S_{m-l}^X(k_{\perp,a}, \mathbf{k}_{\text{Bloch}}) B_m^{(0)} \quad (1.15)$$

$$A_l^{(i)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+m} S_{m-l}^X(k_{\perp,b}, \mathbf{k}_{\text{Bloch}}) B_m^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (1.16)$$

où la série S_l^X , dite « lattice sum » en ce quelle rend compte de la géométrie du réseau, est donnée par

$$S_l^X(k_{\perp,\alpha}, \mathbf{k}_{\text{Bloch}}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} X_l(k_{\perp,\alpha} R_p) e^{i\Phi_p l + i\mathbf{k}_{\text{Bloch}} \cdot \mathbf{R}_p}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{a, b\} \quad (1.17)$$

avec $\Phi_p = \arg(\mathbf{R}_p)$ (\mathbf{R}_p pointe sur le centre de la p-ième cavité). Si $k_{\perp,a}^2 \leq 0$ (i.e. les ondes de pression se propagent et les ondes de dilatation sont évanescentes), $X_l = K_l$ dans (1.16) et $X_l = Y_l$ dans (1.15), alors que pour $k_{\perp,a}^2 \geq 0$ (les ondes de tous types et toutes polarisations se propagent), $X_l = Y_l$ dans (1.15) et (1.16). En outre, on peut accélérer à loisir la convergence de la série S_l^X [1,2].

De (1.14)–(1.16), on déduit le système de type Rayleigh pour tout $(p, j) \in \{(a, 0), (b, 1), (b, 2)\}$

$$M_l^{(j0)} B_l^{(0)} + M_l^{(j1)} B_l^{(1)} + M_l^{(j2)} B_l^{(2)} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+m} S_{m-l}^Y(k_{\perp,p}, \mathbf{k}_{\text{Bloch}}) B_m^{(j)} = 0 \quad (1.18)$$

que l'on peut écrire sous forme d'une matrice de « conditions aux limites » \mathbf{M} et de « quasi-périodicité » \mathbf{S}

$$\mathbf{R}\mathbf{B} = (\mathbf{M} + \mathbf{S})\mathbf{B} = 0 \quad (1.19)$$

La structure de \mathbf{R} (dite matrice de Rayleigh) dans l'approximation dipolaire est jointe en annexe. \mathbf{R} a des valeurs propres réelles pour $\omega \geq v_a\beta$, alors que la symétrie hermitienne est rompue pour $\omega \in [v_b\beta; v_a\beta[$ en raison de la présence d'ondes évanescentes. Après normalisation, les termes extra-diagonaux de \mathbf{R} décroissent exponentiellement en fonction de l et m [1,2], ce qui justifie la troncature du système.

2. Solution numérique du problème spectral. Exemples illustratifs

L'algorithme de diffusion multiple présenté ci-dessus est efficace pour des structures composites avec des cavités de « fraction volumique f non nulle » (i.e. il existe un réel α tel que $0 < \alpha \leq f < 1$). Néanmoins, quand les cavités sont dans une configuration compacte (se touchent presque), on doit choisir un ordre de troncature élevé pour le système (1.19). Dans cette section, par soucis de simplicité, nous proposons différents exemples dans l'approximation dipolaire i.e. quand les cavités ont un rayon r_c relativement faible devant le pas du réseau (fraction volumique f faible). La partie \mathbf{S} de la matrice du système (1.19) a été construite de manière analogue à [1,2,4] avec un traitement *adequat* des ondes évanescentes. La structure de \mathbf{M} , matrice associée aux conditions de bord, est donnée en annexe dans l'approximation dipolaire.

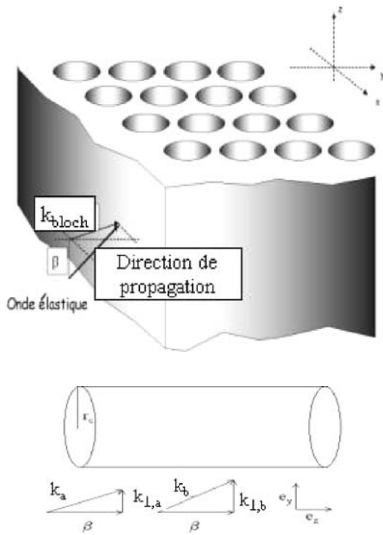


Figure 1. Le réseau de galeries dans le bloc de silice. Le vecteur de Bloch $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$ vit dans le plan transverse $x - y$, alors que la direction de propagation de l'onde est oblique (« angle de conicité » $\beta > 0$).

Figure 1. Network of channels in a block of silica. The Bloch vector $\mathbf{k}_{\text{Bloch}}$ is in the transversal, whilst the wave propagation vector is oblique (the 'conicity angle' $\beta > 0$).

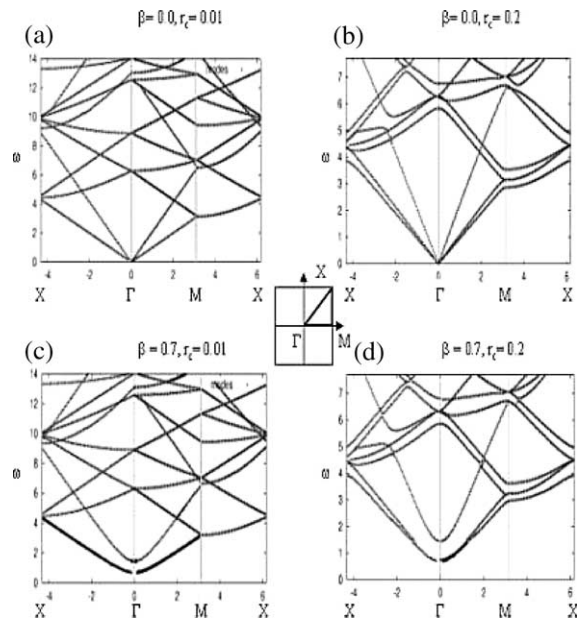


Figure 2. Les courbes de dispersion des ondes élastiques en incidences transverse et conique dans un réseau de fibres. En abscisse, on représente le module du vecteur de Bloch k_{Bloch} et en ordonnée la fréquence ω des ondes élastiques associées (ω étant normalisée par le pas du réseau $d = 1$). Le médaillon au centre représente la première zone de Brillouin décrite par le vecteur de Bloch.

Figure 2. Dispersion curves for the elastic waves at transversal and conic incidence in the fibre network. The abscissa gives the modulus of the Bloch vector k_{Bloch} , and the ordinate the frequency ω of the associated elastic waves (ω is normalized by the step size, $d = 1$).

Nous présentons quatre exemples de courbes de dispersion, pour lesquels la fréquence ω des ondes propagatives et le rayon r_c des cavités sont normalisés par le pas du réseau (cellule de base unité) :

- (a) Diagramme de référence correspondant à une incidence transverse ($\beta = 0$) pour des ondes élastiques se propageant dans un matériau avec des cavités de rayon $r_c = 0.01$ et des conditions nécessaires de quasi-périodicité : il apparaît que ces courbes de dispersion sont celles d'un milieu homogène (Fig. 2(a)).
- (b) Un diagramme correspondant à $\beta = 0$ et des cavités de rayon fini $r_c = 0.2$ (Fig. 2(b)).
- (c) et (d) Diagrammes pour $\beta = 0.7$ et des cavités de rayon $r_c = 0.01$ (Fig. 2(c)) et $r_c = 0.2$ (Fig. 2(d)).

On note que pour des cavités de rayon $r_c \ll 1$, la courbe de dispersion la plus basse (ondes de pression) correspond à une valeur propre multiple de l'équation de dispersion $\det(\mathbf{R}) = 0$ déduite de (1.19) (cf. Figs. 2(a) et 2(c)). Quand $r_c > 0$, les ondes de tout type et toute polarisation sont couplées par les conditions au bord des cavités, et les Figs. (2b) et 2(d) exhibent trois bandes acoustiques distinctes : il y a levée de dégénérescence.

Dans le cas de l'incidence transverse, il existe une unique fréquence de coupure $\omega = 0$ caractérisant les modes propagatifs. Au contraire, en incidence conique, les Figs. 2(c) et 2(d) exhibent des fréquences de coupure $\omega_a = v_a\beta$ et $\omega_b = v_b\beta$ distinctes pour les ondes de pression et de cisaillement (ces ondes se propagent à des vitesses différentes). La partie inférieure du spectre requiert donc un traitement des ondes évanescentes (i.e. les « lattices sums » font intervenir des fonctions de Bessel modifiées de type I_m et K_m), et les techniques classiques s'appuyant sur les développements en ondes planes, qui ont été appliquées au cas transverse [5], sont caducs dans cette situation particulière. En effet, dans un développement en ondes planes, tous les termes représentent des modes propagatifs [6], alors que pour les fréquences $\omega \in [\omega_a; \omega_b]$, des modes propagatifs et des ondes évanescentes co-existent. Cette situation physique correspond à des ondes longitudinales stationnaires (ou modes de bord) et des ondes transverses propagatives.

On remarque que pour tout $\beta > 0$, la vitesse de groupe est nulle quand le module du vecteur de Bloch k_{Bloch} tend vers 0 (Fig. 2(c)). Le fait que le problème en incidence transverse ($\beta = 0$), caractérisé par des valeurs finies non nulles de l'indice effectif de réfraction [6], ne puisse être obtenu comme une limite quand β tend vers 0 à partir de l'analyse du cas conique, est la marque d'un problème de limites non commutatives. En effet, la formulation en incidence oblique, pour un β faible, induit une perturbation singulière puisque les développements asymptotiques des fréquences propres peuvent se mettre sous la forme

$$\omega(k_{\text{Bloch}}, \beta) \sim \omega_0(k_{\text{Bloch}}) + \beta\omega_1(k_{\text{Bloch}}/\beta) \tag{1.20}$$

de sorte que la variation sur ω soit faible, alors que la vitesse de groupe $\partial\omega/\partial k_{\text{Bloch}}$ ait une variation finie.

Le prolongement naturel de cette étude porte sur l'analyse des structures composites à fort taux de remplissage ($r_c \sim 0.35$) et, en particulier, de celles qui exhibent des propriétés de bandes phoniques interdites.

3. Annexe : structure de la matrice M

$\mathbf{E}_m = \mathbf{L}_m^0 + \mathbf{L}_{m-1}^1 + \mathbf{L}_{m+1}^2$ peut-être écrite sous la forme d'une matrice diagonale par blocs (correspondant au cas transverse) et d'une matrice extra-diagonale par blocs (caractérisant le couplage entre Φ , Ψ_1 , Ψ_2 et Ψ_3 quand $\beta > 0$). Dans l'approximation dipolaire, on obtient :

$$\mathbf{E}_m = \begin{pmatrix} E_{11} & -iE_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_{11} & -iE_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{43} & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{33} & -E_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{43} & E_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{13} & E_{14} \\ E_{31} & -iE_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{41} & -iE_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & iE_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_{41} & -iE_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les termes de la matrice diagonale par blocs sont donnés comme suit :

$$E_{11} = -i\frac{k_{\perp,b}^2 - \beta^2}{2} (J_0(k_{\perp,b}r_c) - J_2(k_{\perp,b}r_c)), \quad E_{33} = \frac{2i}{r_c} \left(-\frac{X_1(k_{\perp,a}r_c)}{r_c} + k_{\perp,a}X'_1(k_{\perp,a}r_c) \right)$$

$$E_{34} = -2k_{\perp,b}^2 J_1''(k_{\perp,b}r_c) - (k_{\perp,b}^2 - \beta^2) J_1(k_{\perp,b}r_c) - \frac{2\beta^2}{r_c k_{\perp,b}} J_2(k_{\perp,b}r_c)$$

$$E_{43} = 2\mu k_{\perp,a}^2 (X_1''(k_{\perp,a}r_c) - \lambda k_a^2 X_1'(k_{\perp,a}r_c))$$

$$E_{44} = \frac{2\mu i}{r_c} \left(k_{\perp,b} J_1'(k_{\perp,b}r_c) - \frac{J_1(k_{\perp,b}r_c)}{r_c} + \mu i \beta^2 J_2'(k_{\perp,b}r_c) \right)$$

et les termes de la matrice extra-diagonale par blocs sont définis par :

$$E_{13} = 2i\beta k_{\perp,a} X_1(k_{\perp,a}r_c), \quad E_{14} = -2\beta \left(\frac{J_1(k_{\perp,b}r_c)}{r_c} - \frac{J_2(k_{\perp,b}r_c) k_{\perp,b}^2 - \beta^2}{k_{\perp,b} 4} \right), \quad E_{31} = 2i\beta J_2(k_{\perp,b}r_c)$$

$$E_{41} = k_{\perp,b} \mu \beta (J_0'(k_{\perp,b}r_c) - J_2'(k_{\perp,b}r_c)), \quad \text{où } X_m = I_m \text{ si } k_{\perp,a}^2 \leq 0 \text{ et } X_m = J_m \text{ si } k_{\perp,a}^2 \geq 0$$

De même, on définit $\mathbf{F}_m = \mathbf{P}_m^0 + \mathbf{P}_{m-1}^1 + \mathbf{P}_{m+1}^3$ en remplaçant I_m par K_m et J_m par Y_m dans \mathbf{E}_m . La matrice \mathbf{M}_m (qui hérite de la structure diagonale par blocs de \mathbf{E}_m et \mathbf{F}_m quand $\beta = 0$) est alors donnée par

$$\mathbf{M}_m = -\mathbf{E}_m^{-1} \mathbf{F}_m \quad (1.21)$$

Remerciements. Ce travail financé par le projet EPSRC (GR/M93994) est le fruit d'une collaboration avec l'équipe du Professeur P. St. J. Russell qui réalise les fibres de type cristal photonique et phonique à l'université de Bath [7].

Références bibliographiques

- [1] C.G. Poulton, A.B. Movchan, R.C. McPhedran, N.A. Nicorovici, Y.A. Antipov, Eigenvalue problems for doubly periodic elastic structures and phononic band gaps, Proc. Roy. Soc. 456 (2000) 2543–2559.
- [2] V.V. Zalipae, A.B. Movchan, C.G. Poulton, R.C. McPhedran, Elastic waves and homogenization in oblique periodic structures, Proc. Roy. Soc., accepté.
- [3] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 7th edn., Wiley, 1998, p. 179.
- [4] A.B. Movchan, N.A. Nicorovici, R.C. McPhedran, Green's tensors and lattice sums for elastostatics and elastodynamics, Proc. Roy. Soc. 453 (1997) 643–662.
- [5] M.M. Sigalas, E.N. Economou, Elastic and acoustic wave band structure, J. Sound Vibration 158 (1992) 377–382.
- [6] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978, Chapitre 4.
- [7] J.C. Knight, J. Broeng, T.A. Birks, St.J.P. Russell, Photonic band gap guidance in optical fibers, Science 382 (1999) 1476–1478.
- [8] E. Yablonovitch, Photonic crystals: semiconductors of light, Sci. Amer. 285 (2001) 34–41.