C. R. Mecanique 330 (2002) 587–592

Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésofissuré

Vincent Deudé [a], Luc Dormieux [a], Djimédo Kondo [b], Vincent Pensée [b]

[a] CERMMO, École nationale des ponts et chaussées, 77455 Marne-la-Vallée, France

[b] Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441, Université de Lille-I, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 23 octobre 2001 ; accepté le 12 mars 2002

Note présentée par Jean-Baptiste Leblond.

Résumé On démontre que l'influence de fissures fermées non frottantes sur les caractéristiques élastiques macroscopiques d'un milieu fissuré peut être évaluée par une technique d'estimation basée sur la théorie d'Eshelby. L'idée consiste à remplacer la fissure par un matériau fictif de module de cisaillement nul et de module de compression identique à celui du solide. La fermeture progressive des fissures est responsable de la non linéarité du comportement macroscopique. Ce phénomène permet de déterminer la distribution de la densité de fissures en fonction du rapport d'aspect initial. ***Pour citer cet article : V. Deudé et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 587–592.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

endommagement / micromécanique / mésofissuration / non linéarité / effets unilatéraux

Nonlinear elastic properties of a mesocracked medium

Abstract It is shown that the influence of closed frictionless cracks on overall elasticity can be evaluated by estimates based on Eshelby's theory. The idea consists in replacing the closed cracks by a ficticious material with shear modulus equal to 0 and a bulk modulus identical to that of the solid. Progressive crack closure is responsible for the nonlinearity of the overall elasticity. From this phenomenon, the distribution of crack density as a function of the initial aspect ratio can be determined. ***To cite this article: V. Deudé et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 587–592.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

damage / micromechanics / mesocracking / nonlinearity / unilateral effects

Abridged English version

An open crack can be modelled as a flat oblate ellipsoid characterized by its aspect ratio ω and its orientation. From a mechanical point of view, it can be represented by an elasticity tensor $\mathbb{C}^f = 0$. The idea explored in this Note is that closed cracks can be represented by the elasticity tensor $\mathbb{C}^f$ defined in (1), where k^s denotes the bulk modulus of the solid. The homogenized stiffness tensor $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ relates the macroscopic stress and strain rates $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ and $\dot{\boldsymbol{E}}$ according to $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \dot{\boldsymbol{E}}$. The latter is given in (3) where

Adresses e-mail : vincent@cermmo.enpc.fr (V. Deudé); dormieux@cermmo.enpc.fr (L. Dormieux); djimedo.kondo@univ-lille1.fr (D. Kondo); vincent.pensee@eudil.fr (V. Pensée).

S1631-0721(02)01489-4/FLA

$\langle\mathbb{A}\rangle_f$ is the average over the cracks of the strain concentration tensor, ϕ is the crack volume fraction and where $\mathbb{C}^f = 0$ or $\mathbb{C}^f = 3k^s\mathbb{J}$, according to the state of the crack (open or closed). $\langle\mathbb{A}\rangle_f$ can be estimated by Eshelby theory. For a set of non interacting parallel cracks with identical aspect ratio, the dilute estimate of $\langle\mathbb{A}\rangle_f$ is given in (4).

In the case of open cracks, this estimate with $\mathbb{C}^f = 0$ is introduced in (3) and yields the expression (5) of $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ which seems to depend on the current value of the aspect ratio ω. However, for $\omega \ll 1$, the quantity $\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega)^{-1}$ can be approximated by the limit $\mathbb{T}$ defined in (6). Accordingly, $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ keeps a constant value which is not affected by the variations of the aspect ratio, provided that the cracks remain opened. The number of cracks is represented by the crack density parameter ε [2].

When the crack is closed, the value $\mathbb{C}^f$ of (1) must be introduced in (4). The corresponding estimate of $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ is given in (8). From a practical point of view, the crack closure can be taken into account in replacing $\mathbb{T}$ in (6) by $\mathbb{T}'$ defined in (8). The existence of closed cracks only modifies the shear moduli C^{hom}_{1313} and C^{hom}_{2323}, according to (9), where $\underline{e}_3$ denotes the direction normal to the cracks. The representation of closed cracks by the fictitious material introduced in (1) can be validated by the alternative approach introduced in [3] in the two-dimensional case and extended in [4] to the three-dimensional case. The interest of the proposed approach lies in the fact that it can be readily extended to the case of interacting cracks, for instance in replacing the dilute estimate (4) of $\langle\mathbb{A}\rangle_f$ by that derived in the framework of the Mori–Tanaka scheme or that of the differential one.

Using (4) with $\mathbb{C}^f = 0$, it is shown that crack closure occurs if the initial aspect ratio ω_0 satisfies condition (19). In the case of a set of parallel cracks in a medium subjected to a uniaxial compressive stress $\mathbf{\Sigma} = \Sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, (19) takes the form (20) in which appears the threshold aspect ratio $\omega^f(\Sigma)$. The latter divides the set of cracks into the subsets of open ($\omega_0 > \omega^f(\Sigma)$) and closed cracks ($\omega_0 < \omega^f(\Sigma)$) which contributions to the degradation of the overall elasticity tensor are represented by the two integrals of (21). The nonlinearity is due to the open → closed transition, which threshold is defined by $\omega^f(\Sigma)$.

1. Introduction

L'objectif de cette Note est de présenter des résultats nouveaux concernant la détermination des propriétés élastiques homogénéisées d'un milieu fissuré. Dans le cas de fissures ouvertes, les propriétés peuvent être obtenues classiquement par application des techniques d'estimation basées sur la théorie d'Eshelby. L'approche basée sur la théorie d'Eshelby est étendue ici au cas de fissures fermées sans frottement. La question du critère de fermeture et la non-linéarité des propriétés homogénéisées tangentes liée à la fermeture progresssive des fissures (effets unilatéraux) sont également abordées. On rappelle qu'une analyse thermodynamique des conditions de propagation des fissures fermées non frottantes peut être trouvée dans [1].

2. Principe des estimations basées sur la théorie d'Eshelby

On se limite à la situation de fissures sans interaction, la démarche étant généralisable à la situation des fissures interagissantes. Du point de vue géométrique, les fissures sont modélisées comme des ellipsoides aplatis possédant la symétrie de révolution autour du petit axe. Une famille de fissures est caractérisée par l'orientation des fissures, leur rapport d'aspect ω dans la configuration actuelle du v.e.r., et la fraction volumique correspondante. En raison de l'hypothèse de fissures sans interaction, la prise en compte d'un nombre arbitraire de familles de fissures consiste à additionner les contributions de chacune d'entre elles à la modification de la raideur macroscopique. Par la suite, on considère une unique famille de fissures.

On note $\mathbb{C}^s$ le tenseur d'élasticité de la phase solide, supposé isotrope (modules de compression et de cisaillement k^s et μ^s). Du point de vue mécanique, les fissures sont représentées par un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}^f$ qui dépend de l'état d'ouverture des fissures. On utilise classiquement $\mathbb{C}^f = 0$ pour rendre compte de la nullité du vecteur-contrainte s'exerçant sur les faces de la fissure lorsque celle-ci est ouverte. Dans le cas de fissures fermées sans frottement, il s'agit de tenter de rendre compte de l'absence de contraintes tangentielles sur les faces de la fissure. L'idée proposée dans cette Note consiste à représenter la fissure fermée comme un milieu isotrope de module de compression k^s et de module de cisaillement nul :

$$\mathbb{C}^f = 3k^s\mathbb{J} \quad \text{avec } J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1}$$

Cette idée appelle une validation qui sera présentée dans la suite. Dans le cas d'une unique famille de fissures, le v.e.r. se présente comme un milieu biphasé constitué de solide (élasticité $\mathbb{C}^s$, fraction volumique $1-\phi$) et de fissures (élasticité $\mathbb{C}^f$, fraction volumique ϕ).

On se donne des conditions aux limites uniformes en taux de déformation sur le contour $\partial\Omega$ du v.e.r., du type $\underline{\dot{\xi}}(\underline{X}) = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{X}$, où $\underline{\xi}$ désigne le vecteur déplacement, $\dot{\boldsymbol{E}}$ le taux de déformation macroscopique. On recherche le tenseur d'élasticité homogénéisé tangent $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ qui relie le taux de contraintes macroscopique $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{E}}$ par la relation $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \dot{\boldsymbol{E}}$.

On note $\mathbb{A}$ le tenseur de localisation du taux de déformation en fonction duquel le tenseur $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle = (1-\phi)\mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_s + \phi\mathbb{C}^f : \langle \mathbb{A} \rangle_f \tag{2}$$

où $\langle\cdot\rangle$ (resp. $\langle\cdot\rangle_\alpha$) désigne la moyenne volumique dans le v.e.r. (resp. dans la phase $\alpha = s$ ou f). Compte tenu de la relation $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ (tenseur identité du 4ième ordre), on trouve encore :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \phi\left(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s\right) : \langle \mathbb{A} \rangle_f \tag{3}$$

L'estimation basée sur la théorie d'Eshelby consiste à admettre que le taux de déformation local dans les fissures peut être approché par le taux de déformation uniforme qui s'établit dans un ellipsoide de même élasticité, orientation et rapport d'aspect, placé dans une matrice infinie d'élasticité $\mathbb{C}^s$ avec des conditions en taux de déformations uniforme à l'infini. On adopte donc l'estimation diluée suivante :

$$\langle \mathbb{A} \rangle_f = \left(\mathbb{I} + \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{C}^{s-1} : \left(\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s\right)\right)^{-1} \tag{4}$$

où $\mathbb{S}^s_\omega$ est le tenseur d'Eshelby relatif à la matrice d'élasticité $\mathbb{C}^s$. Il dépend du rapport d'aspect ω des fissures, ainsi que de leur orientation.

2.1. Cas des fissures ouvertes ($\mathbb{C}^f = 0$)

Soit a le rayon de l'ellipsoide modélisant la fissure, c la demi-longueur du petit axe dans sa configuration actuelle, $\omega = c/a$ le rapport d'aspect. N désignant la densité volumique de fissures de la famille considérée, sa fraction volumique est $\phi = \frac{4}{3}\pi a^2 c N$. ϕ est fonction du niveau d'ouverture de la fissure. On introduit le paramètre de densité de fissures $\varepsilon = Na^3$ [2]. La fraction volumique des fissures s'écrit encore $\phi = \frac{4}{3}\pi\varepsilon\omega$. Compte tenu de (3) et (4), le tenseur d'élasticité homogénéisé tangent s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4\pi}{3}\varepsilon\omega\left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1}\right) \tag{5}$$

A première vue, le tenseur $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ semble dépendre du rapport d'aspect ω en configuration actuelle. Cependant, on montre que la quantité $\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega)^{-1}$ admet une limite $\mathbb{T}$ quand $\omega \to 0$. De plus, l'approximation $\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega)^{-1} \approx \mathbb{T}$ est licite dans le domaine des faibles valeurs de ω qui correspond précisément au modèle géométrique de fissures aplaties. On a donc

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi\varepsilon\mathbb{T}\right) \quad \text{avec } \mathbb{T} = \lim_{\omega\to 0} \omega\left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1} \tag{6}$$

2.2. Cas des fissures fermées ($\mathbb{C}^f = 3k^s\mathbb{J}$)

Contrairement au cas des fissures ouvertes, le rapport d'aspect ω n'a pas vocation à modéliser la géométrie de la fissure dans le cas où celle-ci est fermée. Sur le plan mécanique, sa valeur n'a pas d'importance dans le domaine $\omega \ll 1$. Plus précisément, l'estimation du tenseur d'élasticité homogénéisé s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s - \frac{8\pi}{3}\mu^s \varepsilon\omega\mathbb{K} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{K}\right)^{-1} \tag{7}$$

où $\mathbb{K}$ est le tenseur $\mathbb{I} - \mathbb{J}$. Pour ω suffisamment petit, la quantité $\omega\mathbb{K} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{K})^{-1}$ peut être assimilée à sa limite $\mathbb{T}'$ quand $\omega \to 0$, de sorte que

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4}{3}\pi\varepsilon\mathbb{T}'\right) \quad \text{avec } \mathbb{T}' = \lim_{\omega\to 0} \omega\mathbb{K} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}^s_\omega : \mathbb{K}\right)^{-1} \tag{8}$$

On note $\underline{e}_3$ la normale aux fissures de la famille considérée et l'on se donne un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. En composantes, l'équation tensorielle (8) se traduit par le fait que les coefficients C^{hom}_{ijkl} et C^s_{ijkl} sont identiques, sauf les modules de cisaillement correspondant aux quadruplets $\{1, 3, 1, 3\}$ et $\{2, 3, 2, 3\}$

$$C^{\text{hom}}_{1313} = C^{\text{hom}}_{2323} = \mu^s \left(1 - \varepsilon\frac{16(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)}\right) \tag{9}$$

où ν^s désigne le coefficient de Poisson du solide. Il est possible de valider le résultat précédent et la méthode qui y conduit, basée sur le matériau fictif défini par (1), en transposant « en vitesses » dans le présent problème la démarche utilisée dans [3] et [4]. Elle consiste à scinder le problème du v.e.r. soumis au taux de contrainte macroscopique $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ en deux sous-problèmes détaillés ci-après. Dans la suite, $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) désigne la face supérieure (resp. inférieure) de la fissure, dont la normale orientée vers $\mathcal{F}^-$ (resp. $\mathcal{F}^+$) est $-\underline{e}_3$ (resp. $+\underline{e}_3$). On note $[\underline{\xi}] = \underline{\xi}_{\mathcal{F}^+} - \underline{\xi}_{\mathcal{F}^-}$ le mouvement relatif de la face supérieure par rapport à la face inférieure. On rappelle que le v.e.r. comporte une densité N de fissures (fermées) identiques de rayon a.

Dans le premier sous-problème (P1), on applique sur la frontière $\partial\Omega$ du v.e.r. le taux de contrainte macroscopique $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ (conditions aux limites uniformes en taux de contrainte), et on applique aux faces de la fissure un chargement mécanique tel que la solution de (P1) coincide avec la réponse du v.e.r. *non fissuré* au chargement défini par $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$. Dans le cas d'une fissure fermée, on impose donc

– la nullité du mouvement relatif en projection selon la normale, soit $[\dot{\xi}^{(1)}_3] = 0$;
– les composantes tangentielles du taux de contrainte sur les faces $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$:

$$\text{sur } \mathcal{F}^+ : \quad \underline{\dot{t}}^{(1)} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (-\underline{e}_3) + \dot{\Sigma}_{33}\underline{e}_3 \tag{10}$$

et l'action opposée sur $\mathcal{F}^-$. Les taux de contrainte $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ et de déformation $\dot{\boldsymbol{E}}^{(1)}$ macroscopiques solutions de (P1) coincident avec la contrainte et la déformation locales. En particulier, on note que $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \dot{\boldsymbol{E}}^{(1)}$.

Dans le second sous-problème, désigné par (P2), la frontière $\partial\Omega$ du v.e.r. est libre de contraintes. On impose à nouveau la condition de fissure fermée, soit $[\dot{\xi}^{(2)}_3] = 0$. Les composantes tangentielles du taux de contrainte sur les faces $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont opposées à celles imposées dans le problème (P1), de sorte que soit vérifiée la condition de non frottement dans la superposition des problèmes (P1) et (P2) :

$$\text{sur } \mathcal{F}^+ : \quad \underline{\dot{t}}^{(2)} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \underline{e}_3 - \dot{\Sigma}_{33}\underline{e}_3 = \left(\dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \underline{e}_3\right) \cdot (\boldsymbol{\delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{11}$$

et l'action opposée sur $\mathcal{F}^-$.

On montre (voir par exemple [5]) que le taux de déformation macroscopique $\dot{\boldsymbol{E}}^{(2)}$ dans (P2) se calcule en fonction de la moyenne $\underline{\dot{\gamma}}$ de la discontinuité du taux de déplacement (tangentiel) entre les faces $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{e}_3 \otimes \underline{\dot{\gamma}} + \underline{\dot{\gamma}} \otimes \underline{e}_3) \quad \text{avec } \underline{\dot{\gamma}} = N \int_{\mathcal{F}} \left([\underline{\dot{\xi}}] - [\dot{\xi}_3]\underline{e}_3\right) \mathrm{d}S \tag{12}$$

Le taux de déformation macroscopique total $\dot{\boldsymbol{E}}$ étant la somme de $\dot{\boldsymbol{E}}^{(1)}$ et de $\dot{\boldsymbol{E}}^{(2)}$, on note que l'équation $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \dot{\boldsymbol{E}}^{(1)}$ issue du problème (P1) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \left(\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}^{(2)}\right) = \mathbb{C}^s : \left(\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{2}(\underline{e}_3 \otimes \underline{\dot{\gamma}} + \underline{\dot{\gamma}} \otimes \underline{e}_3)\right) \tag{13}$$

L'intérêt de la décomposition du problème initial en (P1) et (P2) réside dans le fait que la résolution de (P2) se ramène au problème classique d'une fissure unique dans un espace homogène infini (voir par exemple [6]). On montre ainsi que la discontinuité tangentielle $\underline{\dot{\gamma}}$ est proportionnelle à $\underline{\dot{t}}^{(2)}$:

$$\underline{\dot{\gamma}} = \frac{\varepsilon}{K_0(1-\nu^s/2)}\left(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\underline{e}_3\right)\cdot(\boldsymbol{\delta}-\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3) \quad \text{avec } K_0 = \frac{3E^s}{16(1-\nu^{s2})} \tag{14}$$

où E^s désigne le module de Young du solide. En utilisant (13) dans (14), il est possible de déterminer $\underline{\dot{\gamma}}$ en fonction du taux de déformation macroscopique $\dot{\boldsymbol{E}}$. Cependant, dans le cadre de l'hypothèse de fissures sans interaction, il est légitime de linéariser cette relation par rapport à ε, ce qui revient à introduire l'approximation $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} \approx \mathbb{C}^s : \dot{\boldsymbol{E}}$ dans (14). On trouve alors :

$$\underline{\dot{\gamma}} = \frac{\varepsilon}{K_0(1-\nu^s/2)}\left(\mathbb{C}^s : \dot{\boldsymbol{E}}\cdot\underline{e}_3\right)\cdot(\boldsymbol{\delta}-\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3) \tag{15}$$

En combinant (12) et (15), on obtient l'expression de $\dot{\boldsymbol{E}}^{(2)}$ en fonction de $\dot{\boldsymbol{E}}$, qu'il reste à introduire dans (13). Cette dernière s'écrit alors $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \dot{\boldsymbol{E}}$ avec [4] :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s - \varepsilon\frac{16(1-\nu^s)}{3(2-\nu^s)(1+\nu^s)}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}\,\overline{\otimes}\,\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\delta}\,\underline{\otimes}\,\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Delta}\,\underline{\otimes}\,\boldsymbol{\delta}) - 2\boldsymbol{\Delta}\otimes\boldsymbol{\Delta}\right) \tag{16}$$

avec les notations $(\boldsymbol{A}\overline{\otimes}\boldsymbol{B})_{ijkl} = A_{il}B_{jk}$ et $(\boldsymbol{A}\underline{\otimes}\boldsymbol{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}$. Il est alors facile de vérifier que les tenseurs $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ de (8) et (16) sont identiques.

Ainsi validée, la démarche utilisant les estimations basées sur la théorie d'Eshelby et le matériau fictif de fissure défini en (1) offre plusieurs avantages sur la technique qui vient d'être rappelée. Elle permet de s'affranchir de l'hypothèse de fissures sans interaction, en adoptant par exemple le schéma différentiel ou celui de Mori–Tanaka. De plus, la démarche se généralise à l'homogénéisation d'un milieu fissuré à matrice non homogène. Elle peut être ainsi étendue au cas d'un milieu poreux fissuré.

3. Non linéarité des propriétés macroscopiques tangentes

L'étude des non linéarités liées à la fermeture progressive des fissures nécessite au préalable de formuler le critère de fermeture. A cet effet, on détermine le taux de déformation local $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans une fissure ouverte. Dans le cadre du schéma dilué et compte tenu de (4), on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbb{I}-\mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1} : \mathbb{C}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \tag{17}$$

Le taux de fermeture de fissure, soit $\dot{c}$, vaut donc :

$$\dot{c} = c\dot{\varepsilon}_{33} = a\omega\underline{e}_3\cdot\left(\mathbb{I}-\mathbb{S}^s_\omega\right)^{-1} : \mathbb{C}^{s-1} : \dot{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\underline{e}_3 \tag{18}$$

Compte tenu de la définition (6) du tenseur $\mathbb{T}$ et par intégration de (18), la condition de fermeture, sous l'action d'une contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$, d'une fissure de rapport d'aspect ω_0 dans l'état naturel s'écrit

$$\omega_0 \leqslant \omega^f(\boldsymbol{\Sigma}) = -\underline{e}_3\cdot\left(\mathbb{T} : \mathbb{C}^{s-1} : \boldsymbol{\Sigma}\right)\cdot\underline{e}_3 \tag{19}$$

A titre d'illustration, on analyse la non linéarité du tenseur d'élasticité homogénéisé tangent dans un processus de chargement induisant une fermeture progressive des fissures. Comme précédemment, les fissures sont parallèles, de normale $\underline{e}_3$, de rayon a. La distribution des rapports d'aspects initiaux est décrite par la fonction $N(\omega_0)$ telle que $N(\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_0$ représente la densité de fissures dont le rapport d'aspect initial est situé entre ω_0 et $\omega_0+\mathrm{d}\omega_0$. On pose $\varepsilon(\omega_0) = N(\omega_0)a^3$. Le chargement macroscopique est une contrainte uniaxiale de compression $\boldsymbol{\Sigma} = -\Sigma\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$ ($\Sigma > 0$). Le critère de fermeture (19) prend la forme suivante :

$$\omega_0 \leqslant \omega^f(\Sigma) = \frac{4(1-\nu^{s2})}{\pi}\frac{\Sigma}{E^s} \tag{20}$$

Le critère (20) scinde la population des fissures en deux groupes de fissures respectivement ouvertes et fermées, dont les contributions à la dégradation des propriétés élastiques macroscopiques sont distinctes.

$$\mathbb{C}^{\text{hom}}(\Sigma) = \mathbb{C}^s - \frac{4\pi}{3}\mathbb{C}^s : \left(\mathbb{T}' \int_0^{\omega^f(\Sigma)} \varepsilon(\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_0 + \mathbb{T} \int_{\omega^f(\Sigma)}^{\omega_0^{\max}} \varepsilon(\omega_0)\,\mathrm{d}\omega_0\right) \tag{21}$$

où $\omega_0^{\max}$ désigne la borne supérieure de la distribution des rapports d'aspects. (21) fait apparaitre que la non linéarité n'est pas la conséquence de la variation du rapport d'aspect des fissures ouvertes mais réside dans la transition ouvert → fermé dont le seuil est défini par $\omega^f(\Sigma)$. En dérivant (21) par rapport à Σ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Sigma}\mathbb{C}^{\text{hom}}(\Sigma) = \frac{\varepsilon(\omega^f(\Sigma))}{K_0}\mathbb{C}^s : \left(\mathbb{T} - \mathbb{T}'\right) \tag{22}$$

On démontre que la fermeture des fissures n'affecte pas les modules de cisaillement $C_{1313}^{\text{hom}} = C_{2323}^{\text{hom}}$ qui restent constants. En revanche, les variations du module C_{3333}^{hom} sont régies par la relation

$$\frac{\mathrm{d}C_{3333}^{\text{hom}}}{\mathrm{d}\Sigma} = \frac{64(1-\nu^s)^4}{3\pi(1-2\nu^s)^2}\varepsilon\left(\omega^f(\Sigma)\right) \tag{23}$$

(23) indique que la connaissance expérimentale de la non linéarité permet d'identifier la fonction $\varepsilon(\omega_0)$ et de remonter ainsi à la distribution des rapports d'aspects initiaux.

Références bibliographiques

[1] J.-B. Leblond, Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips, European J. Mech. A Solids 19 (2000) 633–647.

[2] B. Budiansky, J.R. O'Connel, Elastic moduli of a cracked solid, Int. J. Solids Structures 12 (1976) 81–97.

[3] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.J. Marigo, Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons, J. Méc. Théor. Appl. 5 (1986) 471–513.

[4] V. Pensée, D. Kondo, Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésofissuration, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 329 (2001) 271–276.

[5] H. Horii, S. Nemat-Nasser, Overall moduli of solids with microcracks: load induced anisotropy, J. Mech. Phys. Solids 31 (1983) 155–171.

[6] S. Nemat-Nasser, H. Horii, Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1993.