C. R. Mecanique 330 (2002) 535–541

Étude de la décohésion fibre-matrice dans les arcs composites circulaires

Kamyar Madani

LPMTM, Institut Galilée, Université Paris-Nord, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 18 avril 2002 ; accepté après révision le 10 juin 2002

Note présentée par Huy Duong Bui.

Résumé On considère un arc constitué d'un composite renforcé par adjonction d'une fibre. L'une des extrémités est encastrée, tandis que sur l'autre la fibre est soumise à un chargement de type déplacements ou forces imposés. En effectuant dans le cadre de l'élasticité linéaire une analyse asymptotique basée sur les paramètres d'élancement et de chargement, nous étudions par l'intermédiaire d'un critère énergétique, la décohésion fibre-matrice résultant des déplacements inextensionnels de la ligne moyenne. Nous montrons en particulier que pour ces types de chargements, l'amorçage se fait de façon brutale sur une longueur d'ordre 1. ***Pour citer cet article : K. Madani, C. R. Mecanique 330 (2002) 535–541.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

endommagement / élasticité / arc composite / décohésion / développements asymptotiques

A study of fiber debonding in circular composite arches

Abstract In the framework of linear elasticity, we consider a composite arch constituted by a matrix and a fiber reinforcing the structure. This arch is clamped at one extremity, while at the other the fibre is subject to either prescribed displacements or forces. By making an asymptotic analysis based on the slenderness and loading parameters, we study by means of an energy criterion the fiber-matrix debonding, resulting from the inextensional displacements of the medium line. We show in particular that for these specific loading types, the debonding occurs brutally and the critical length of initiation is of order 1. ***To cite this article: K. Madani, C. R. Mecanique 330 (2002) 535–541.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

damage / elasticity / composite arche / debonding / asymptotic expansions

Abridged English version

We consider a slender elastic body whose reference configuration in $\mathbb{R}^3$ corresponds to a circular composite arch, with a curvature radius R. The diameter of the cross section $\widehat{S}$ is denoted d and the ratio $\epsilon = d/R$ is considered as a small parameter. Any point $\hat{x}$ of the arch is represented by means of the cylindrical coordinates $(\hat{r}, \hat{z}, \theta)$, which are associated to the dimensionless ones $(r = (\hat{r} - R)/d, z = \hat{z}/d, \theta)$ so that the reference domain is independent of ϵ, $\Omega = \{(r, z, \theta) \mid (r, z) \in S, 0 \leqslant \theta < L\}$, where L is the dimensionless length of the arch; assumed to be of order 1. The associated orthonormal basis is denoted by $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\theta)$. The arch is reinfoced by a fiber, with cross section S_f and diameter d_f, which is centered

Adresse e-mail : kamyar.madani@lpmtm.univ-paris13.fr (K. Madani).

S1631-0721(02)01497-3/FLA

into the matrix of section S_m and external diameter $d_m = d$. Both the fiber and the matrix are assumed to be made of linear homogeneous isotropic materials with Young moduli E_f and E_m, respectively. Poisson's coefficients ν_f and ν_m are equal. The arch is clamped on its section $S \times \{L\}$, while at the other end, on the fiber section $S_f \times \{0\}$, are prescribed a longitudinal displacement $-td$ (*case D*) or a force characterized by its work $-td^2R$ (*case F*), where t plays the role of the loading parameter. The system is free of body forces while the lateral surface and the extremity $S_m \times \{0\}$ are not submitted to surface forces. Considering then only debonding from the loaded extremity, we denote by $I_\ell = \{(r,z,\theta) \in I,\ 0 \leqslant \theta < \ell\}$ the debonded part of the interface of length ℓ, and by $\Omega_\ell = \Omega \setminus I_\ell$ the refering domain to the arches in "the craked configuration ℓ". Fiber and matrix are assumed not to be in contact on the damaged part of the interface.

We introduce also a dimensionless displacement $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ and the associated linearized strain $\varepsilon(\mathbf{v})$ (see (1)). After that the total energy of the arch, in a crack state characterized by ℓ, can be written: $\mathcal{E} = Rd^2(t^2E^\epsilon(\ell) + \kappa\ell)$, where $\kappa\ell$ represents Griffith's dimensionless surface energy and $E^\epsilon(\ell)$ corresponds to either the dimensionless elastic energy (*case D*) or the potential energy (*case F*). According to the case, it is determined by Eqs. (2) or (3). The object of this study is to seek a accurate approximation of the debonding evolution. In order to do this, we use the least energy principle (see [3]) which consists to seek $\ell(t)$ as the minimizer of total energy $\mathcal{E}$ (see (4)).

The 1-D approximation is based on the asymptotic limit of the elastic energy, which is obtained in the previous study (see [4,5]). It results that, at the first order, the elastic energy is the radial bending one: $\frac{1}{2}\int_0^L EI_r\mathcal{L}'(V_\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$ where $\mathcal{L}(V_\theta) = (V_\theta + V_\theta'')$ and I_r denotes the geometric moment of the cross section. After resolution of the problems (7) and (8), the expressions of the bulk and potential energies are given respectively by (9) and (10). By means of these results, we obtain the general solution of the debonding problem, which is given by (13). It shows that, when the load reaches a value t_e^0, a debonding zone of length ℓ_e^0 suddenly appears, where t_e^0 and the associated load ℓ_e^0 are solutions of (11). Afterwards for $t > t_e^0$, the debondig evolution becomes progressive until total debonding of the interface, which is obtained when the load attains the critical value t_r^0.

The previous results are applied to the arches with circular cross section and successive lenghts $L = \pi$ and $3\pi/2$. In the prescibed displacements case (*case D*), Table 1 shows the variations of ℓ_e^0 versus the geometrical parameter V_f (for $E_m/E_f = 0.1$) and the ratio E_m/E_f (for $V_f = 0.25$). The boxes with $*$ correspond to the cases where the debonding appears suddenly along the whole interface, which occurs for the approximate load $t_r^0 = (-\kappa L/(E^0(L) - E^0(0)))^{1/2}$. In the case of prescribed forces (*case F*), the numerical studies provides $\ell_e^0 = 4.297$, and when $L = 3\pi/2$, we give in (14) the explicit expression of the solution.

Finally we conclude on the necessity to take into consideration the order of magnitude of medium lines curvature for the study of fiber debonding.

1. Présentation du problème 3-D

On considère un corps élastique élancé, dont la configuration de référence naturelle dans $\mathbb{R}^3$, correspond à un arc composite circulaire de rayon de courbure constant R. On note d le diamètre de la section droite $\widehat{S}$ (diamètre du cercle circonscrit) et le rapport $\epsilon = d/R$, comme étant le petit paramètre lié à l'élancement. Un point quelconque de l'arc $\hat{x}$ est repéré à l'aide de ses coordonnées cylindriques $(\hat{r}, \hat{z}, \theta)$ que l'on adimensionnalise $(r = (\hat{r} - R)/d, z = \hat{z}/d, \theta)$ afin de travailler sur un domaine indépendant de ϵ, $\Omega = \{(r,z,\theta) \mid (r,z) \in S, 0 \leqslant \theta < L\}$, où L est un paramètre d'ordre 1 représentant la longueur de l'arc. La base orthonormée associée est notée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\theta)$. L'arc composite est constitué d'une armature, de section droite S_f et de diamètre d_f, centrée à l'intérieur d'une matrice de section S_m et de diamètre extérieur $d_m = d$. Fibre et matrice sont linéairement élastiques, homogènes, isotropes, et de modules d'Young respectifs E_f et E_m. Pour simplifier la présentation et les expressions, nous supposons que d'une part, les coefficients de Poisson sont identiques ($\nu_f = \nu_m$) et que d'autre part la section droite $S = S_m \cup S_f$ possède $r = 0$ et $z = 0$ comme axes de symétrie. L'arc est encastré sur sa section terminale $S \times \{L\}$ alors qu'à l'autre extrémité, sur la fibre est appliqué un chargement de type traction, résultant des déplacements ou des efforts imposés sur $S_f \times \{0\}$. Ainsi le premier cas de chargement (*cas D*) correspond au déplacement longitudinal $-td$, et le second (*cas F*) aux efforts caractérisés par leur travail $-td^2R$; où t croît depuis 0 et joue le rôle du paramètre de chargement. Les forces volumiques sont nulles, la surface latérale et l'extrémité $S_m \times \{0\}$ de la matrice sont libres.

On se restreint à l'étude des fissures localisées à l'interface I de tenacité k_0, en supposant que celle-ci est beaucoup plus fragile que les matériaux utilisés. En n'envisageant que des décohésions progressant depuis l'extrémité chargée, on note $I_\ell = \{(r,z,\theta) \in I,\ 0 \leqslant \theta < \ell\}$ l'interface décollée d'une longueur ℓ et on désigne par $\Omega_\ell = \Omega \setminus I_\ell$ le domaine occupé par l'arc fissuré. On suppose en outre qu'aux endroits où il y a décohésion, fibre et matrice ne sont plus en contact.

Moyennant une adimensionnalisation des déplacements : $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = d(v_r\mathbf{e}_r + v_z\mathbf{e}_z + v_\theta\mathbf{e}_\theta)$ et des déformations linéarisées : $\varepsilon(\mathbf{v}) = \varepsilon^0(\mathbf{v}) + (\epsilon/(1+\epsilon r))\,\varepsilon^1(\mathbf{v})$,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0(\mathbf{v}) = v_{r,r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + v_{z,z}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + (v_{r,z} + v_{z,r})\mathbf{e}_r \otimes_s \mathbf{e}_z + v_{\theta,r}\mathbf{e}_r \otimes_s \mathbf{e}_\theta + v_{\theta,z}\mathbf{e}_z \otimes_s \mathbf{e}_\theta,\\
&\varepsilon^1(\mathbf{v}) = (v_{\theta,\theta} + v_r)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + (v_{r,\theta} - v_\theta)\mathbf{e}_r \otimes_s \mathbf{e}_\theta + v_{z,\theta}\mathbf{e}_z \otimes_s \mathbf{e}_\theta,
\end{aligned} \tag{1}$$

l'énergie totale de l'arc dans un état de fissuration caractérisé par $\ell(t)$ peut s'écrire : $\mathcal{E} = Rd^2(t^2E^\epsilon(\ell) + \kappa\ell)$ où $\kappa\ell$ est l'énergie de surface adimensionnalisée ($\kappa = 2k_0d_f/d^2$ est une quantité caractéristique de la structure). Quant au terme $E^\epsilon(\ell)$, dans le cas des déplacements imposés, il correspond à l'énergie élastique adimensionnalisée, déterminée par la résolution du problème d'équilibre :

$$E_D^\epsilon(\ell) = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{C}_D(\ell)} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell} \big(\lambda\big(Tr\,\varepsilon(\mathbf{v})\big)^2 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\varepsilon(\mathbf{v})\big)(1+\epsilon r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

dans l'espace des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{C}_D(\ell) = \big\{\mathbf{v} = (v_r, v_z, v_\theta) \in \mathbf{H}^1(\Omega_\ell, \mathbb{R}^3)/\ \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \mathbf{S}\times\{L\} \text{ et } v_\theta = -1 \text{ sur } \mathbf{S}_f \times \{0\}\big\}$$

et dans le cas des forces imposées, il représente l'énergie potentielle adimensionnalisée, déduite de la résolution sur l'espace des déplacements cinématiquement admissibles,

$$\mathcal{C}_F(\ell) = \big\{\mathbf{v} = (v_r, v_z, v_\theta) \in \mathbf{H}^1(\Omega_\ell, \mathbb{R}^3)/\mathbf{v} = 0 \text{ sur } \mathbf{S}\times\{L\}\big\},$$

du problème variationnel :

$$E_F^\epsilon(\ell) = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{C}_F(\ell)} \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_\ell} \big(\lambda\big(Tr\,\varepsilon(\mathbf{v})\big)^2 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\varepsilon(\mathbf{v})\big)(1+\epsilon r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z - \mathbf{f}^\epsilon(\mathbf{v})\right), \tag{3}$$

où $\mathbf{f}^\epsilon$ correspond au potentiel adimensionnalisé des efforts appliqués.

L'objectif de cette étude est de construire une solution (approchée) du problème, d'amorçage et d'évolution de la décohésion, représentant aussi bien le caractère progressif que brutal du phénomène. Or il est bien établi que le critère classique, basé sur le taux de restitution d'énergie G (cf. [1]), ne parvient pas seul à satisfaire toutes les conditions du problème. Une solution consiste à compléter ses lacunes par d'autres critères (cf. [2]) ou encore à opter pour une démarche nouvelle, qui dans le cas de cette étude, est basée sur le principe de moindre énergie (cf. [3]). Ce dernier consiste à déterminer la solution du problème de décohésion comme la fonction minimisant l'énergie totale $\mathcal{E}$, autrement dit :

$$\text{chercher } \ell^\epsilon(t) \text{ tel que } t^2E^\epsilon(\ell^\epsilon(t)) + \kappa\ell^\epsilon(t) \leqslant t^2E^\epsilon(\ell) + \kappa\ell, \quad \forall\ell \in [0, L]. \tag{4}$$

En procédant ainsi, on constate que le caractère progressif ou brutal de la décohésion dépend de façon essentielle de la convexité ou de la concavité de $\overline{E}^\epsilon : \ell \to E^\epsilon(\ell)$. Il est montré dans [3], que du fait de l'absence de singularité forte dans la solution du problème élastique posé sur l'arc sain, l'amorçage de la décohésion est nécessairement brutal. Ainsi pour un chargement t_e^ϵ, une décohésion de longueur finie ℓ_e^ϵ

doit apparaître. La charge d'initiation t_e^ϵ et la longueur d'amorçage ℓ_e^ϵ vérifient les relations suivantes :

$$t_{e^2}^\epsilon E^{\epsilon\,\prime}\big(\ell_e^\epsilon\big) + \kappa = 0, \qquad E^\epsilon\big(\ell_e^\epsilon\big) - E^\epsilon(0) = \ell_e^\epsilon E^{\epsilon\,\prime}\big(\ell_e^\epsilon\big). \tag{5}$$

On reconnaît dans la première relation le critère classique de Griffith et dans la seconde celle déduite de la condition de saut lors d'une fissuration brutale (cf. [2,3]).

2. L'approximation 1-D

Pour déterminer une approximation de la solution, nous cherchons d'abord une estimation de l'énergie élastique par l'intermédiaire des méthodes asymptotiques. Elles fournissent comme première approximation de l'énergie, celle correspondant à des théories unidimensionelles d'arcs. Pour les materiaux homogènes et isotropes, les principaux modèles sont développés dans des travaux antérieurs (cf. [4, 5]). Dans le cadre de cette étude nous rappelons simplement quelques résultats utiles par la suite. Il en découle que les déplacements à l'équilibre $\mathbf{v}^\epsilon$, sont au premier ordre de type inextensionnels : $\mathbf{v}^0 = -V_\theta'(\theta)\mathbf{e}_r + V_z(\theta)\mathbf{e}_z + V_\theta(\theta)\mathbf{e}_\theta$. On y note également lorsque le chargement imposé est de type traction, que l'expression de l'énergie élastique à l'ordre principal se réduit à celle de l'énergie de flexion radiale : $\frac{1}{2}\int_0^L EI_r\mathcal{L}'(V_\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$; $\mathcal{L}(V) = (V + V'')$ pour tout V cinématiquement admissible et I_r désigne le moment d'inertie géométrique par rapport à l'axe $r = 0$.

En reproduisant une démarche analogue pour les arcs composites fissurés, on trouve qu'à l'ordre principal les déplacements inextensionnels (longitudinaux) sont de la forme :

$$V_\theta(\theta) = \begin{cases} v_m(\theta) = v_f(\theta) & \forall x = (r,z,\theta) \in \Omega_\ell \,/\, \theta \geqslant \ell \text{ et } (r,z) \in S \\ v_m(\theta) & \forall x = (r,z,\theta) \in \Omega_\ell \,/\, \theta \leqslant \ell \text{ et } (r,z) \in S_m \\ v_f(\theta) = v_m(\theta) + \Delta(\theta) & \forall x = (r,z,\theta) \in \Omega_\ell \,/\, \theta \leqslant \ell \text{ et } (r,z) \in S_f. \end{cases} \tag{6}$$

Quant à l'énergie élastique, on constate qu' au premier ordre son expression se décompose en deux termes similaires : $\frac{1}{2}\int_0^L (E_f I_r^f \mathcal{L}'(v_f)^2 + E_m I_r^m \mathcal{L}'(v_m)^2)\,\mathrm{d}\theta$, le premier correspond à l'énergie de flexion radiale de la fibre et le second à celle de la matrice.

En introduisant les résultats précédents dans les équations d'équilibre (2) et (3), on est amené pour le cas des déplacements imposés à déterminer dans l'espace :

$$\mathcal{C}_D^3(\ell) = \big\{(v_f, v_m) \in H^3(0,L)^2 / v_f = v_f' = v_f'' = 0 \text{ sur } S \times \{L\},$$
$$v_f(0) = -1 \text{ et } (v_f - v_m)(\theta) \neq 0 \text{ pour } \theta \in I_\ell\big\},$$

la solution du problème de minimisation suivante :

$$\min_{(v_f,v_m)\in\mathcal{C}_D^3(\ell)} \left\{\frac{1}{2}\int_0^L \big(E_f I_r^f \mathcal{L}'(v_f)^2 + E_m I_r^m \mathcal{L}'(v_m)^2\big)\,\mathrm{d}\theta\right\}, \tag{7}$$

et dans le cas des forces imposées, à chercher parmi les éléments de :

$$\mathcal{C}_F^3(\ell) = \big\{(v_f, v_m) \in H^3(0,L)^2 / v_f = v_f' = v_f'' = 0 \text{ sur } S \times \{L\} \text{ et } (v_f - v_m)(\theta) \neq 0 \text{ pour } \theta \in I_\ell\big\},$$

celui qui réalise le minimum d'énergie potentielle :

$$\min_{(v_f,v_m)\in\mathcal{C}_F^3(\ell)} \left\{\frac{1}{2}\int_0^L \big(E_f I_r^f \mathcal{L}'(v_f)^2 + E_m I_r^m \mathcal{L}'(v_m)^2\big)\,\mathrm{d}\theta + \langle S_f\rangle(v_f)(0)\right\}, \tag{8}$$

où $\langle S_f\rangle$ correspond à l'aire de la section droite de l'armature.

Les solutions des problèmes précédents fournissent les expressions de l'énergie élastique et potentielle à l'équilibre qui sont respectivement de la forme :

$$E_D^{\epsilon}(\ell) \simeq E_D^0(\ell) = \frac{(E_f I_r^f + E_m I_r^m)}{4} \frac{\left(3L + \sin L\,(\cos L - 4) + \frac{E_m I_r^m}{E_f I_r^f}\,(3\ell + \sin\ell\,(\cos\ell - 4))\right)}{\left(L - \sin L + \frac{E_m I_r^m}{E_f I_r^f}(\ell - \sin\ell)\right)^2}, \tag{9}$$

$$E_F^{\epsilon}(\ell) \simeq E_F^0(\ell) = -\frac{\langle S_f\rangle^2}{4(E_f I_r^f + E_m I_r^m)}\left(3L + \sin L(\cos L - 4) + \frac{E_m I_r^m}{E_f I_r^f}\left(3\ell + \sin\ell(\cos\ell - 4)\right)\right). \tag{10}$$

2.1. Solution du problème de décohésion

L'étude de $\overline{E}^0 : \ell \to E^0(\ell)$ indique que pour le modèle limite, les résultats sont conformes aux prédictions de [3]. En effet comme $\overline{E}^0$ est décroissante et $\overline{E}^{0\prime}(0) = 0$, elle est nécessairement concave au voisinage de $\ell = 0$. Il en résulte que pour un chargement t_e^0, la décohésion s'initie brutalement sur une longueur ℓ_e^0, où t_e^0 et ℓ_e^0 vérifient les relations déduites de (5) :

$$t_e^{02} E^{0\prime}\left(\ell_e^0\right) + \kappa = 0, \qquad E^0\left(\ell_e^0\right) - E^0(0) = \ell_e^0\, E^{0\prime}\left(\ell_e^0\right). \tag{11}$$

Au delà, $t > t_e^0$, $\overline{E}^0$ devient convexe – donc la décohésion progressive – jusqu'à la rupture totale de liaison fibre-matrice, qui aura lieu pour une valeur critique de chargement t_r^0. Ainsi la solution générale du problème d'évolution de la décohésion :

$$\text{chercher } \ell^0(t) \text{ tel que } t^2 E^0\left(\ell^0(t)\right) + \kappa\ell^0(t) \leqslant t^2 E^0(\ell) + \kappa\ell, \quad \forall \ell \in [0, L], \tag{12}$$

peut s'écrire dans les deux cas sous la forme (cf. [3]) :

$$\ell^0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_e^0 \quad \text{avec } t_e^0 = \sqrt{-\dfrac{\kappa}{E^{0\prime}(\ell_e^0)}} \\ 0 \text{ ou } \ell_e^0 & \text{si } t = t_e^0 \\ E^{0\prime -1}\left(-\dfrac{\kappa}{t^2}\right) & \text{si } t_e^0 < t < t_r^0 \quad \text{avec } t_r^0 = \sqrt{-\dfrac{\kappa}{E^{0\prime}(L)}} \\ L & \text{si } t = t_r^0 \end{cases} \tag{13}$$

Ces résultats se distinguent de ceux des poutres droites par le comportement de $\overline{E}^0$ au voisinage de $\ell = 0$. Dans ce cas du fait de la convexité de $\overline{E}^0$, il faut affiner l'approximation de l'énergie élastique par des termes correcteurs de couche limite, pour déterminer l'ordre de grandeur de ℓ_e^{ϵ}. On trouve alors que la longueur d'amorçage est d'ordre $\sqrt{\epsilon}$ (cf. [6]).

3. Résultats numériques

L'étude numérique est effectuée pour des arcs à section circulaire et de longueurs successives $L = \pi$ et $3\pi/2$. Pour chaque type de chargements les résultats obtenus concernent essentiellement la longueur d'amorçage ℓ_e^0 et l'influence des différents paramètres sur sa valeur.

- **Cas D :** *Déplacements imposés*

Les valeurs de ℓ_e^0, déterminées en fonction de celles de la fraction volumique V_f du renfort ($E_m/E_f = 0{,}1$) et différents rapports des modules d'Young E_m/E_f ($V_f = 0{,}25$), sont présentées dans le tableau suivant (Tableau 1).

Les cases munies du signe $*$ correspondent aux valeurs de l_e^0 où la décohésion s'initie brutalement et instantanément le long de l'interface complète, lorsque le chargement atteint sa valeur critique $t_r^0 = \sqrt{-\kappa L/(E^0(L) - E^0(0))}$.

Les résultats précédents révèlent l'importance du rôle de renfort dans l'amorçage de la décohésion. En effet on constate, lorsque la rigidité à la traction E_f ou la fraction volumique V_f du renfort augmente, que la longueur d'amorçage devient plus grande.

Tableau 1. Valeurs de l_e^0 en fonction de V_f et E_f/E_m.

Table 1. *Values of* l_e^0 *versus* V_f *and* E_f/E_m.

E_m/E_f		0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	0,8	1
$V_f = 0{,}25$	$L = \pi$	1,79	1,46	1,105	0,89	0,71	0,525	0,45	0,42
	$L = 3\pi/2$	2,13	1,75	1,33	1,075	0,86	0,64	0,55	0,51
V_f		0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81
$E_m/E_f = 0{,}1$	$L = \pi$	0,66	1,12	1,595	2,07	2,54	π_*	π_*	π_*
	$L = 3\pi/2$	0,81	1,35	1,905	2,45	3,13	4,39	4,69	$3\pi/2_*$

- **Cas F :** *Forces imposées*

Pour ce type de chargement la solution du problème de décohésion peut être obtenue explicitement :

$$\ell^0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_e^0 \\ 0 \text{ ou } \ell_e^0 & \text{si } t = t_e^0 \\ 2\pi - \operatorname{Arc\,cos}\left(1 - \dfrac{1}{t\langle S_f\rangle}\sqrt{2\kappa\left(E_f I_r^f + E_m I_r^m\right)\dfrac{(E_f I_r^f)}{(E_m I_r^m)}}\right) & \text{si } t_e^0 < t < t_r^0 \\ L & \text{si } t = t_r^0 \end{cases} \tag{14}$$

où

$$t_e^0 = \frac{1/(1-\cos\ell_e^0)}{\langle S_f\rangle}\sqrt{2\kappa\left(E_f I_r^f + E_m I_r^m\right)\frac{(E_f I_r^f)}{(E_m I_r^m)}}, \quad \text{et}$$

$$t_r^0 = \frac{1/(1-\cos L)}{\langle S_f\rangle}\sqrt{2\kappa\left(E_f I_r^f + E_m I_r^m\right)\frac{(E_f I_r^f)}{(E_m I_r^m)}}.$$

Dans ce cas les calculs aboutissent à une seule valeur de $\ell_e^0 = 4.297$, qui implique comme précédemment lorsque $L = \pi$, une décohésion brutale et totale de toute l'interface pour une valeur critique du chargement :

$$t_r^0 = \frac{\sqrt{2/3}}{\langle S_f\rangle}\sqrt{2\kappa\left(E_f I_r^f + E_m I_r^m\right)\frac{(E_f I_r^f)}{(E_m I_r^m)}}. \tag{15}$$

4. Conclusion

Les résultats numériques fournissent pour tous les cas de chargements, une estimation au premier ordre de la longueur d'amorçage ℓ_e^ϵ qui est, rappelons le, une conséquence de l'approximation de l'énergie élastique. Or selon une étude réalisée sur la classification des arcs en fonction de l'ordre de grandeur de la courbure de la ligne moyenne (cf. [4]), l'approximation précédente correspond au cas des arcs dits « fortement courbés ». Dès lors se pose le problème de l'estimation de ℓ_e^ϵ pour d'autres classes d'arcs. Concernant les arcs « très faiblement courbés », comme à l'ordre principal l'expression de leur énergie élastique est identique à celle des poutres droites (cf. [4,6]), on peut conjecturer que l'ordre de grandeur de ℓ_e^ϵ sera différent de 1.

Les remarques précédentes confirment l'importance du rôle joué par la courbure de ligne moyenne et la nécessité de prendre en compte son ordre de grandeur dans l'étude de la décohésion fibre-matrice.

Pour citer cet article : K. Madani, C. R. Mecanique 330 (2002) 535–541

Références bibliographiques

[1] A.-A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A (1920) 163–198.
[2] Z. Hashin, Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis, J. Mech. Phys. Solids 44 (7) (1996) 1129–1145.
[3] G. Francfort, J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids 46 (8) (1998) 1319–1342.
[4] K. Madani, Des modèles d'arcs élastiques suivant l'ordre de la courbure et les types de chargement, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb 328 (2000) 841–846.
[5] J.-J. Marigo, K. Madani, Quelques modèles d'anneaux élastiques suivant les types de chargement, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb 326 (1998) 805–810.
[6] F. Bilteryst, J.-J. Marigo, Amorçage de la décohésion dans l'essai d'arrachement, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb 327 (1999) 977–983.