C. R. Mecanique 330 (2002) 543–548

Homogénéisation d'un milieu élastique fortement hétérogène

Mongi Mabrouk [a], Ahmed Boughammoura [b]

[a] **LMARC UMR 6608, 24, rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France**

[b] **I.P.E.I.Monastir, rue Ebn Eljazzar, 5019 Monastir, Tunisie**

Reçu le 27 mai 2002 ; accepté le 20 juin 2002

Note présentée par Georges Duvaut.

Résumé Nous considérons l'homogénéisation d'un problème d'élastostatique pour un milieu périodique fortement hétérogène formé de deux composantes ayant des tenseurs de modules d'élasticité comparables, séparés par un troisième milieu (couche molle) dont l'épaisseur est du même ordre ε que la taille de la cellule de base et dont le tenseur d'élasticité devient infiniment petit suivant une dépendance en ε^r, $r > 0$. Si $r \leqslant 2$, nous identifions le problème homogénéisé. Dans le cas $r > 2$, il nous faut supposer en plus qu'il n'y a pas de forces de volume dans le troisième milieu. ***Pour citer cet article : M. Mabrouk, A. Boughammoura, C. R. Mecanique 330 (2002) 543–548.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

milieux continus / élasticité / homogénéisation / convergence à double échelle

Homogenization of a strongly heteregeneous elastic medium

Abstract We consider the homogenization of an elastostatic problem in a strongly heterogeneous periodic medium made of two connected components having comparable tensors of elastic moduli, separated by a third medium (soft layer), the thickness of which is of the same order ε than the basic periodicity cell, and such that its elastic moduli tensor becomes infinitely small following a rate ε^r, $r > 0$. If $r \leqslant 2$, we identify the homogenized problem. Otherwise, we have to assume moreover that there are no volume forces in the third medium. ***To cite this article: M. Mabrouk, A. Boughammoura, C. R. Mecanique 330 (2002) 543–548.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

continuum mechanics / elasticity / homogenization / two-scale convergence

Abridged English version

In this work, we are interested in the homogenization of an elastostatic problem for a periodic medium made of two connected components exchanging efforts throughout a third connected component, separating them. More precisely, we are given the basic cube $Y =]0,1[^N$ of $\mathbb{R}^N$, $N = 3$, partitioned as $Y = Y_1 \cup S_{13} \cup Y_2 \cup S_{23} \cup Y_3$, where Y_1, Y_2, Y_3 are three connected open subsets such that $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \emptyset$ and where S_{ij} is the surface separating Y_i and Y_j. Without loss of generality, we assume that Y_3 has constant thickness. Let χ_1, χ_2, χ_3 be the characteristic functions of Y_1, Y_2, Y_3 and $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ their respective Lebesgue measures *supposed to be of the same order*. Y_1 and Y_2 are made of two media having finite positive definite fourth-rank tensors of elastic moduli $\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^2$ of order one. On the other hand, the material in Y_3 possesses

Adresses e-mail : mongi.mabrouk@univ-fcomte.fr (M. Mabrouk); ahmed.boughammoura@ipeigb.rnu.tn (A. Boughammoura).

S1631-0721(02)01498-5/FLA

a tensor of elasticity which approaches zero with a rate ε^r, $r > 0$. If we reproduce by periodicity the basic cell Y to the whole of $\mathbb{R}^N$, we get the three open sets E_1, E_2, E_3 *which we shall assume to be connected* and separated by the smooth surfaces S_{13}, S_{23}. The homothety of ratio ε gives us then the elementary cell $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, the three elementary subsets Y_i^ε and the three periodic connected open sets $E_i^\varepsilon = \varepsilon E_i$ separated by the surfaces S_{13}^ε, S_{23}^ε. Let then Ω be an open bounded connected subset of $\mathbb{R}^N$ with lipschitzian boundary $\partial\Omega$. We set $\Omega_i^\varepsilon = \Omega \cap E_i^\varepsilon$, $\Gamma_{ij}^\varepsilon = S_{ij}^\varepsilon \cap \Omega$. The sets Ω_i^ε are not necessarily connected.

For any displacement $u \in \mathbb{R}^N$ we define the stored mechanical energy of the material occupying Ω by $F^\varepsilon(u) = \int_\Omega A_\varepsilon(x) e(u(x)) e(u(x))\,\mathrm{d}x$, where $e(u) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}u + {}^t\,\mathrm{D}u)$ is the second-rank deformation tensor of u and $A_\varepsilon(x) = \chi_1(\frac{x}{\varepsilon})\mathbb{A}^1 + \chi_2(\frac{x}{\varepsilon})\mathbb{A}^2 + \varepsilon^r \chi_3(\frac{x}{\varepsilon})\mathbb{A}^3$ where the $\mathbb{A}^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, are fourth-rank stiffness tensors. They satisfy the usual symmetry and coerciveness properties. We consider in this work the static problem with a fixed boundary. In presence of given body forces $f^\varepsilon \in L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$, the displacement u^ε at equilibrium is the solution of the problem $\mathcal{P}^\varepsilon := \{-\operatorname{div}_x[A^\varepsilon(x) e(u)] = f^\varepsilon \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$.

For every $\varepsilon > 0$, this problem admits a unique weak solution u^ε belonging to the space $H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N]$. Our objective is to study the behavior of the sequence u^ε when $\varepsilon \to 0$. For this, we use the two-scale convergence method. Finally, let $f \in L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ be given.

PROPOSITION 0.1. – *For $\alpha = 1, 2$, let $A_\alpha^{\hom}$ be the fourth-rank symmetric, positive definite tensor defined by its entries $A_{\alpha ijkh}^{\hom} = \int_{Y_\alpha} \mathbb{A}_{ijmp}^\alpha [\mathrm{e}_{ymp}(w^{\alpha kh})(y) + \delta_{mp}^{kh}]\,\mathrm{d}y$, where $w^{\alpha kh}$ denotes the $2N^2$ vectors, unique solutions in $H_\sharp^1[Y_\alpha; \mathbb{R}^N]$ of the cell problems*

$$(Cell_\alpha)^{kh} := \begin{cases} -\operatorname{div}_y \mathbb{A}^\alpha \mathrm{e}_y(w^{\alpha kh})(y) = 0 & \textit{in } Y_\alpha \\ \mathbb{A}^\alpha[\mathrm{e}_y(w^{\alpha kh})(y) + \delta^{kh}] n(y) = 0 & \textit{on } \partial Y_\alpha \cap \partial Y_3 \end{cases} \tag{1}$$

and δ^{kh} is the second-rank tensor with components $\delta_{ij}^{kh} = \delta_{ik}\delta_{jh}$, where δ_{mp} are the Kronecker symbols. Then:

Case 1: $r < 2$, $f^\varepsilon = f$. *Then the sequence $\{u^\varepsilon\}$ converges weakly in $L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ to the unique solution $u \in H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N]$ of the homogenized problem*

$$-\operatorname{div}_x\left[\left(A_1^{\hom} + A_2^{\hom}\right)\mathrm{e}_x(u)(x)\right] = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{2}$$

Case 2: $r = 2$, $f^\varepsilon = f$. *There exist $(u_1, u_2) \in (H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N])^2$ such that the sequence $\{u^\varepsilon\}$ converges weakly in $L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ to the function $x \mapsto U(x)$ given by*:

$$U(x) = \left[(1-\theta_2)\mathbb{I} - \sum_{i=1}^N \left(e_i \otimes \int_{Y_3} \mu_i(y)\,\mathrm{d}y\right)\right] u_1(x) + \left[\theta_2 \mathbb{I} + \sum_{i=1}^N \left(e_i \otimes \int_{Y_3} \mu_i(y)\,\mathrm{d}y\right)\right] u_2(x)$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^N \left(e_i \otimes \int_{Y_3} \eta_i(y)\,\mathrm{d}y\right)\right] f(x)$$

where $\{e_i, i = 1, \ldots, N\}$ are the canonical basis of $\mathbb{R}^N$ and the vectors η_i, μ_i are the solutions of the $2N$ cell problems:

$$-\operatorname{div}_y\left[\mathbb{A}^3 \mathrm{e}_y(\eta_i)(y)\right] = \frac{1}{N} e_i \quad \textit{in } Y_3, \quad \eta_i(y) = 0 \quad \textit{on } \partial Y_1 \cap \partial Y_3, \quad \eta_i(y) = 0 \quad \textit{on } \partial Y_2 \cap \partial Y_3$$

$$-\operatorname{div}_y\left[\mathbb{A}^3 \mathrm{e}_y(\mu_i)(y)\right] = 0 \quad \textit{in } Y_3, \quad \mu_i(y) = 0 \quad \textit{on } \partial Y_1 \cap \partial Y_3, \quad \mu_i(y) = \frac{1}{N} e_i \quad \textit{on } \partial Y_2 \cap \partial Y_3$$

The displacements u_1, u_2 are the solutions of the coupled partial differential equations

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x A_1^{\hom} \mathrm{e}_x(u_1)(x) - \left[\sum_{i=1}^N \left(e_i \otimes \int_{S_{13}} \mathbb{A}^1 \mathrm{e}_y(\mu_i(y)) n(y)\right) \mathrm{d}S_y\right][u_2(x) - u_1(x)] \\ \quad = \left(\theta_1 \mathbb{I} - \sum_{i=1}^N e_i \otimes \int_{S_{13}} \mathbb{A}^1 \mathrm{e}_y(\eta_i(y) n(y))\,\mathrm{d}S_y\right) f(x) \quad \textit{in } \Omega \\ u_1 = 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x A_2^{\hom} \mathrm{e}_x(u_2)(x) - \left[\sum_{i=1}^N \left(e_i \otimes \int_{S_{23}} \mathbb{A}^2 \mathrm{e}_y(\mu_i(y)) n(y)\right) \mathrm{d}S_y\right][u_2(x) - u_1(x)] \\ \quad = \left(\theta_2 \mathbb{I} - \sum_{i=1}^N e_i \otimes \int_{S_{23}} \mathbb{A}^2 \mathrm{e}_y(\eta_i(y) n(y)\,\mathrm{d}S_y)\right) f(x) \quad \textit{in } \Omega \\ u_2 = 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Case 3: $r > 2$, $f^\varepsilon = (1 - \chi_3(\frac{\cdot}{\varepsilon}))f$. *Then, there exist* (u_1, u_2) *in* $(H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N])^2$ *such that*: $(\chi_1(\frac{x}{\varepsilon})u^\varepsilon(x), \chi_2(\frac{x}{\varepsilon})u^\varepsilon(x)) \xrightarrow{2s} (\theta_1 u_1(x), \theta_2 u_2(x))$ *and weakly in* $(L^2(\Omega))^2$, *where* u_1, u_2 *are the solution of the following system of uncoupled problems*

$$-\operatorname{div}_x \left[A_1^{\text{hom}} \mathrm{e}_x(u_1)(x)\right] = \theta_1 f(x) \quad \textit{in } \Omega, \quad u_1 = 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \tag{5}$$

$$-\operatorname{div}_x \left[A_2^{\text{hom}} \mathrm{e}_x(u_2)(x)\right] = \theta_2 f(x) \quad \textit{in } \Omega, \quad u_2 = 0 \quad \textit{on } \partial\Omega \tag{6}$$

If we set $v^\varepsilon = \varepsilon^{r/2} u^\varepsilon$, *we have* $(\chi_1(\frac{x}{\varepsilon})v^\varepsilon(x), \chi_2(\frac{x}{\varepsilon})v^\varepsilon(x)) \to (0, 0)$ *strongly in* $L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ *and* $v^\varepsilon(x) \to 0$ *weakly in* $H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N]$.

Moreover, we have always $(\|\chi_\alpha(\frac{\cdot}{\varepsilon})u^\varepsilon - u_\alpha\|_{L^2[\Omega_\alpha^\varepsilon; \mathbb{R}^N]} \to 0$.

The above homogenized problems are coercive and possess thus unique solutions. This implies that *the whole sequences converge* and not only subsequences. It should be notably stressed that *the limit U of the sequence u^ε does not verify in general any partial differential equation* (except in the case $r < 2$), and that the case 2, the most interesting, shows clearly a two-scale phenomenon, a macroscopic scale for the phases 1 and 2 and a microscopic scale for the third phase. The limit displacement fields coming from media 1 and 2 satisfy partial differential equations in the macroscopic variable x, while the third field satisfies a partial differential equation in the microscopic (hidden) variable y. The three fields are coupled and the third medium contributes to the global limit field U through the averaged term $\int_{Y_3} w(x, y)\,\mathrm{d}y$. Moreover, the case $r = 2$ is the only one where the energies ultimately stored by the three phases are of the same order.

1. Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'homogénéisation d'un problème d'élastostatique pour un milieu périodique à deux composantes séparés par un troisième corps de rigidité beaucoup plus faible. Plus précisément, on se donne le cube $Y =]0, 1[^N$ de $\mathbb{R}^N$, $N = 3$ et on suppose que $Y = Y_1 \cup S_{12} \cup Y_2 \cup S_{23} \cup Y_3$ où Y_1, Y_2, Y_3 sont trois ouverts connexes tels que $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \emptyset$ et où S_{ij} est la surface séparant Y_i et Y_j. On suppose, pour simplifier, que Y_3 est d'épaisseur constante. On note χ_1, χ_2, χ_3 les fonctions caractéristiques de Y_1, Y_2, Y_3 et par θ_1, θ_2, θ_3 leurs mesures de Lebesgue respectives *supposées être de même ordre*. Les parties Y_1 et Y_2 sont occuppées par deux matériaux élastiques linéaires de tenseurs de modules d'élasticité $\mathbb{A}^1$ et $\mathbb{A}^2$ finis, de même ordre de grandeur. Le matériau occupant Y_3 possède par contre des rigidités très faibles, avec une dépendance en ε^r, $r > 0$. Si nous reproduisons la cellule Y par périodicité, géométriquement et matériellement à $\mathbb{R}^N$, nous obtenons les trois ouverts E_1, E_2, E_3 *que nous supposons connexes* et séparés par les surfaces régulières S_{13}, S_{23}. Plus précisément, chaque ouvert E_i est la réunion des $\mathbb{Z}^N$-translatés de $Y_i \cup (\overline{Y_i} \cap \partial Y)$. L'homothétie de rapport ε nous donne alors la cellule élémentaire $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, les trois ouverts élémentaires Y_i^ε de même ordre de grandeur $\mathrm{O}(\varepsilon)$ et les *trois ouverts périodiques connexes* $E_i^\varepsilon = \varepsilon E_i$ séparés par les surfaces S_{13}^ε, S_{23}^ε. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné connexe, de bord $\partial\Omega$ lipschitzien. On note $\Omega_i^\varepsilon = \Omega \cap E_i^\varepsilon$, $\Gamma_{ij}^\varepsilon = S_{ij}^\varepsilon \cap \Omega$. Les ouverts Ω_i^ε ne sont pas forcément connexes puisque l'intersection de certaines cellules avec la frontière peut avoir plusieurs composantes connexes.

En présence d'une densité de forces volumiques $f^\varepsilon \in L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$, le champ des déplacements à l'équilibre u^ε est solution du problème $\mathcal{P}^\varepsilon := \{-\operatorname{div}_x[A^\varepsilon(x)e(u)] = f^\varepsilon \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. On se propose d'étudier la limite de la suite $\{u^\varepsilon,\ \varepsilon \to 0\}$. Le même problème avec des conditions mixtes sur le bord et dans le cas très particulier où Ω est une réunion de cellules de base, a été abordé par la méthode de l'énergie dans [1]. *Nous traitons ici le cas plus général d'un ouvert Ω quelconque et sans l'hypothèse d'absence de sources dans le milieu mou* (sauf pour $r > 2$). L'approche que nous utilisons est une combinaison des méthodes utilisées par Allaire [2] et Allaire et Murat [3]. Cette technique (cf. [3]) évite le recours, comme dans [1], à tout opérateur de prolongement qui, dans notre cas (cf. le travail [4] de Acerbi et al.), s'avère particulièrement difficile à construire. Les résultats que nous obtenons *dans le cas des conditions de*

Dirichlet semblent confirmer, en les généralisant substantiellement, ceux de [1] et en donnent une nouvelle justification.

On notera $C^{\infty}_{\sharp}(Y)$ l'espace des fonctions indéfiniment differentiables sur $\mathbb{R}^N$, périodiques, de période Y. Alors, $L^2_{\sharp}(Y)$ (respectivement $H^1_{\sharp}(Y)$) est le complété de $C^{\infty}_{\sharp}(Y)$ pour la norme $L^2(Y)$ (resp. $H^1(Y)$). On désignera génériquement par $n(y)$ la normale au point y. La règle de sommation des indices répétés est systématiquement utilisée. Si A est un tenseur du quatrième ordre et e est un tenseur du second ordre, nous notons Ae le tenseur de second ordre obtenu par contraction des deux derniers indices de A. On notera souvent $||.||_{\Omega}$ la norme de $L^2(\Omega)$.

DÉFINITION 1.1. – Une suite u_{ε} de $L^2(\Omega)$ est dite converger en double échelle vers une limite $u_0(x,y)$ appartenant à $L^2(\Omega \times Y)$, et on notera $u_{\varepsilon} \xrightarrow{2s} u_0$, si et seulement si, pour toute fonction $\psi(x,y) \in D[\Omega; C^{\infty}_{\sharp}]$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega} u_{\varepsilon}(x)\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\int_{Y} u_0(x,y)\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Soit $f \in L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ donnée. Le résultat essentiel de cette note est alors :

PROPOSITION 1.2. –

(i) *Cas* $0 < r < 2$, $f^{\varepsilon} = f$. *Il existe* $(u, v_1, v_2) \in H^1_0[\Omega; \mathbb{R}^N] \times L^2[\Omega; H^1_{\sharp}[Y_1; \mathbb{R}^N]/\mathbb{R}^N] \times L^2[\Omega; H^1_{\sharp}[Y_1; \mathbb{R}^N]/\mathbb{R}^N]$ *tels que* ($\alpha = 1,2$) :

1. *La suite* $\{u^{\varepsilon}, \varepsilon \to 0\}$ *converge dans* $L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ *faible vers* u.
2. $(\chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})u^{\varepsilon}(x), \chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{e}(u^{\varepsilon})(x)) \xrightarrow{2s} (\chi_{\alpha}(y)u(x), \chi_{\alpha}(y)[\mathrm{e}_x(u)(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)])$.
3. *Les fonctions* u, v_1, v_2 *sont solutions des problèmes homogénéisés* :

$$\operatorname{div}_x \int_{Y_1} \mathbb{A}^1\big[\mathrm{e}_x(u)(x) + \mathrm{e}_y(v_1)(x,y)\big]\,\mathrm{d}y - \operatorname{div}_x \int_{Y_2} \mathbb{A}^2\big[\mathrm{e}_x(u)(x) + \mathrm{e}_y(v_2)(x,y)\big]\,\mathrm{d}y = f(x) \quad \textit{dans } \Omega$$

$$-\operatorname{div}_y \mathbb{A}^{\alpha}\big[\mathrm{e}_x(u)(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)\big] = 0 \quad \textit{dans } \Omega \times Y_{\alpha}$$

$$\mathbb{A}^{\alpha}\big[\mathrm{e}_x(u)(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)\big]n(y) = 0 \quad \textit{sur } \Omega \times (\partial Y_{\alpha} \cap \partial Y_3)$$

(ii) *Cas* $r = 2$, $f^{\varepsilon} = f$. *Il existe* $(u_{\alpha}, v_{\alpha}, w)$, $\alpha = 1,2$, *tels que* : $u_{\alpha} \in H^1_0[\Omega; \mathbb{R}^N]$, $v_{\alpha} \in L^2(\Omega; H^1_{\sharp}[Y_{\alpha}; \mathbb{R}^N]/\mathbb{R}^N]$, $w \in L^2[\Omega; H^1_{\sharp}[Y_3; \mathbb{R}^N]]$ *et* :

1. *La suite* $\{u^{\varepsilon}\}$ *converge vers* $U(x) = (1-\theta_2)u_1(x) + \theta_2 u_2(x) + \int_{Y_3} w(x,y)\,\mathrm{d}y$ *dans* $L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ *faible.*
2. $(\chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})u^{\varepsilon}(x), \chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{e}(u^{\varepsilon})(x)) \xrightarrow{2s} (\chi_{\alpha}(y)u_{\alpha}(x), \chi_{\alpha}(y)[\mathrm{e}_x(u_{\alpha})(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)])$.
3. $(\chi_3(\frac{x}{\varepsilon})u^{\varepsilon}(x), \varepsilon\chi_3(\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{e}(u^{\varepsilon})(x)) \xrightarrow{2s} (\chi_3(y)w(x), \chi_3(y)\mathrm{e}_y(w)(x,y))$.
4. *Les fonctions* u_{α}, v_{α}, w *sont solutions des problèmes homogénéisés* ($\alpha = 1,2$) :

$$-\operatorname{div}_x \int_{Y_{\alpha}} \mathbb{A}^{\alpha}\big[\mathrm{e}_x(u_{\alpha})(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)\big]\,\mathrm{d}y = \theta_{\alpha} f(x) - \int_{\partial Y_{\alpha}\cap\partial Y_3} \mathbb{A}^{\alpha}\mathrm{e}_y(w)n_3\,\mathrm{d}S(y) \quad \textit{dans } \Omega$$

$$u_{\alpha} = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

$$-\operatorname{div}_y \mathbb{A}^{\alpha}\big[\mathrm{e}_x(u_{\alpha})(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)\big] = 0 \quad \textit{dans } \Omega \times Y_{\alpha}$$

$$\mathbb{A}^{\alpha}\big[\mathrm{e}_x(u_{\alpha})(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)\big]n(y) = 0 \quad \textit{sur } \Omega \times (\partial Y_{\alpha} \cap \partial Y_3)$$

$$-\operatorname{div}_y \big[\mathbb{A}^3\mathrm{e}(w)(x,y)\big] = f(x) \quad \textit{dans } \Omega \times Y_3, \quad w(x,y) = 0 \quad \textit{sur } \Omega \times (\partial Y_1 \cap \partial Y_3) \quad \textit{et}$$

$$w(x,y) = u_2(x) - u_1(x) \quad \textit{sur } \Omega \times (\partial Y_2 \cap \partial Y_3)$$

(iii) *Cas* $r > 2$, $f^{\varepsilon} = (1 - \chi_3(\frac{\cdot}{\varepsilon}))f$. *Alors, il existe* $(u_{\alpha}, v_{\alpha}) \in H^1_0[\Omega; \mathbb{R}^N] \times L^2[\Omega; H^1_{\sharp}[Y_{\alpha}; \mathbb{R}^N]/\mathbb{R}^N]$ *tels que* ($\alpha = 1,2$) :

1. $(\chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})u^{\varepsilon}(x),\ \chi_{\alpha}(\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{e}(u^{\varepsilon})(x)) \xrightarrow{2s} (\chi_{\alpha}(y)u_{\alpha}(x), \chi_{\alpha}(y)[\mathrm{e}_x(u_{\alpha})(x) + \mathrm{e}_y(v_{\alpha})(x,y)])$.

2. *Les fonctions u_1, u_2, v_1, v_2 sont solutions des problèmes homogénéisés* :

$$-\operatorname{div}_x \int_{Y_\alpha} \mathbb{A}^\alpha \left[\mathrm{e}_x(u_\alpha)(x) + \mathrm{e}_y(v_\alpha)(x,y)\right] \mathrm{d}y = \theta_\alpha f(x) \quad \textit{dans } \Omega, \quad u_\alpha = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega$$
$$-\operatorname{div}_y \mathbb{A}^\alpha \left[\mathrm{e}_x(u_\alpha)(x) + \mathrm{e}_y(v_\alpha)(x,y)\right] = 0 \quad \textit{dans } \Omega \times Y_\alpha$$
$$\mathbb{A}^\alpha \left[\mathrm{e}_x(u_\alpha)(x) + \mathrm{e}_y(v_\alpha)(x,y)\right] n(y) = 0 \quad \textit{sur } \Omega \times (\partial Y_\alpha \cap \partial Y_3)$$

Soit $v^\varepsilon = \varepsilon^{r/2} u^\varepsilon$. Alors, la suite v^ε converge vers zéro, fortement dans $L^2[\Omega;\mathbb{R}^N]$ et faiblement dans $H_0^1[\Omega;\mathbb{R}^N]$.
De plus, nous avons dans tous les cas les convergences « fortes » : $\|u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha\|_{L^2[\Omega_\alpha^\varepsilon;\mathbb{R}^N]} \to 0$.

Posant $v_\alpha(x,y) = e_{xkh}(u_\alpha(x)) w_\alpha^{kh}(y)$ où w_α^{kh} sont les solutions des problèmes cellulaires $(Cell_\alpha)^{kh}$, on peut découpler les problèmes ci-dessus et exprimer nos résultats sous la forme alternative de la Proposition 0.1.

Pour l'aspect énergétique, soient $E_\alpha^\varepsilon = \int_{\Omega_\alpha^\varepsilon} \mathbb{A}^\alpha e(u^\varepsilon) e(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x$ et $E_3^\varepsilon = \varepsilon^r \int_{\Omega_3^\varepsilon} \mathbb{A}^3 e(u^\varepsilon) e(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x$ les énergies de déformation enmagasinées par les trois phases respectivement. Il est alors aisé d'obtenir comme dans [2] et [5] :

PROPOSITION 1.3. – *Nous avons les distributions asymptotiques suivantes de l'énergie* :

(i) *Cas $r = 2$, $f^\varepsilon = f$. Alors*

$$E_\alpha^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} E_\alpha^\varepsilon = \int_\Omega \int_{Y_\alpha} \mathbb{A}^1 (e_x(u_\alpha(x)) + e_y(v_\alpha(x,y)))(e_x(u_\alpha(x)) + e_y(v_\alpha(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$E_3^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} E_3^\varepsilon = \int_\Omega \int_{Y_3} \mathbb{A}^3 e_y(w(x,y)) e_y(w(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(ii) *Cas $r < 2$, $f^\varepsilon = f$. Alors $\lim_{\varepsilon\to 0} E_\alpha^\varepsilon = E_\alpha^0$ avec $u_1 = u_2$, et $\lim_{\varepsilon\to 0} E_3^\varepsilon = 0$.*

(iii) *Cas $r > 2$, $f^\varepsilon = (1 - \chi_3(\frac{\cdot}{\varepsilon}))f$: nous avons le même résultat que précédemment mais avec $u_1 \neq u_2$.*

On voit en particulier que le cas $r = 2$ est le seul cas où les énergies stockées asymptotiquement sont du même ordre. On notera aussi qu'en général, *la limite U ne vérifie aucune équation aux dérivées partielles* et que la condition au bord est perdue à la limite. Le cas $r = 2$, le plus intéressant, montre nettement un phénomène de double échelle et de couplage, une échelle macroscopique pour les milieux 1 et 2 et une échelle microscopique pour le milieu 3 ($\chi_3(\frac{x}{\varepsilon})u^\varepsilon$ intervient par la fonction $\int_{Y_3} w(x,y)\,\mathrm{d}y$). Les résultats annoncés résultent des étapes 2 et 3 ci-dessous.

2. Estimations à priori

C'est l'étape la plus originale. On commence d'abord par un lemme fondamental qui généralise à l'élasticité le Lemme A.2 d'Allaire et Murat [3].

LEMME 2.1. – *Il existe une constante C indépendante de ε, telle que, pour toute fonction $v_\varepsilon \in H^1[\Omega_i^\varepsilon;\mathbb{R}^N]$, $i = 1,2,3$, vérifiant $v_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega_i^\varepsilon \cap \partial\Omega$, on ait* :

$$\|v_\varepsilon\|^2_{L^2[\Omega_i^\varepsilon;\mathbb{R}^N]} \leqslant C \left\|e(v_\varepsilon)\right\|^2_{L^2[\Omega_i^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}$$

La preuve de ce lemme est assez délicate. Donnons en l'esquisse. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, définissons les deux matrices

$$d''(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d(x) = \left(\mathbb{I}, d''(x)\right)$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice unité. Ces matrices apparaîssent naturellement dans la définition de l'espace des déplacements rigide $\mathcal{R}^N = \{u(x) = d(x)c : c \in \mathbb{R}^{2N}\}$.

La matrice $d_\Omega = \int_\Omega^t d(x)d(x)\,\mathrm{d}x$ de taille $2N \times 2N$ est symétrique et définie positive, donc inversible. Soit u un vecteur déplacement de Ω. On lui associe les vecteurs $F_\Omega(u) = \int_\Omega^t d(y)u(y)\,\mathrm{d}y$, $u_\Omega^0 = d_\Omega^{-1} F_\Omega(u)$, $\pi_\Omega(u)(x) = d(x)u_\Omega^0$. Ainsi $\pi_\Omega(u)$ est la projection de $u \in L^2[\Omega; \mathbb{R}^N]$ sur $\mathcal{R}^N$. Le lemme résulte alors des deux lemmes suivants :

LEMME 2.2. – *Il existe une constante positive C telle que, pour tout $u \in H^1[\Omega; \mathbb{R}^N]$:*

$$\left\| u - \pi_\Omega(u) \right\|_{L^2[\Omega;\mathbb{R}^N]} \leqslant C \left\| e(u) \right\|_{L^2[\Omega;\mathbb{R}^{N^2}]} \tag{7}$$

LEMME 2.3. – *Soient Y and Y' deux cellules de base contigües et soit $Z = Y \cup Y' \cup (\partial Y \cap \partial Y')$. Alors, il existe une constante positive c, qui dépend seulement de Y, telle que, pour tout $v \in H^1[Z; \mathbb{R}^N]$, on ait :* $|v_Y^0 - v_{Y'}^0| \leqslant c||e(v)||_{L^2[Z;\mathbb{R}^{N^2}]}$.

A partir du Lemme 2.1, on montre comme dans [3] et [5] les deux corollaires :

COROLLAIRE 2.4. – *Il existe une constante C indépendante de ε telle que, pour tout u dans $H_0^1[\Omega; \mathbb{R}^N]$ on ait* : $\|u\|^2_{L^2[\Omega;\mathbb{R}^N]} \leqslant C\|e(u)\|^2_{L^2[\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]} + C\varepsilon^2 \|e(u)\|^2_{L^2[\Omega_3^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}$.

COROLLAIRE 2.5. – (i) *Si $r \leqslant 2$, on a* : $(\|u^\varepsilon\|^2_{L^2[\Omega;\mathbb{R}^N]}, \|\,\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|^2_{L^2[\Omega_\alpha^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}, \varepsilon^r \|\,\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|^2_{L^2[\Omega_3^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}) \leqslant C$.
(ii) *Si $r > 2$, $f^\varepsilon = (1 - \chi_3(\frac{\cdot}{\varepsilon}))f$* : $(\|u^\varepsilon\|_{L^2[\Omega_\alpha^\varepsilon;\mathbb{R}^N]}, \|\,\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|_{L^2[\Omega_\alpha^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}, \varepsilon^{r/2}\|\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|_{L^2[\Omega_3^\varepsilon;\mathbb{R}^{N^2}]}) \leqslant C$.

3. Passages à la limite

Pour déterminer les problèmes homogénéisés, on opère comme dans [5] en utilisant les techniques de la convergence à double échelle.

4. Conclusion

Dans ce travail, nous avons réussi à déterminer le comportement asymptotique d'un milieu élastique fortement hétérogène, périodique, composé de deux matériaux de rigidités comparables séparés par une couche molle, dont la rigidité est en ε^r où ε est la taille de la cellule de périodicité. Nous avons montré que ce comportement est décrit par deux champs confondus, couplés ou découplés selon que r est inférieur, égal ou supérieur à 2. De plus, si $r < 2$, l'énergie élastique enmagasinée est plus importante dans les matériaux 1 et 2 , et à la limite aucune énergie de déformation n'est enmagasinée par le matériau 3. Certes, la rigidité du matériau est très faible à l'échelle microscopique, mais macroscopiquement il se comporte comme un matériau parfaitement rigide. Pour $r > 2$, *et en l'absence de forces de volume dans le troisième milieu*, les énergies enmagasinées sont comme au cas précédent ; mais maintenant le troisième milieu se comporte même à l'échelle macroscopique comme un milieu parfaitement mou. La valeur $r = 2$, la plus intéressante, est la seule qui donne des limites comparables pour les énergies $\|\,\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|^2_{\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon}$ et $\varepsilon^2 \|\,\mathrm{e}(u^\varepsilon)\|^2_{\Omega_3^\varepsilon}$. La couche molle est encore suffisamment rigide pour assurer entre les phases 1 et 2 une liaison de type rappel élastique $\left[\sum_{i=1}^N (e_i \otimes \int_{S_{\alpha 3}} \mathbb{A}^\alpha \mathrm{e}_y(\mu_i(y)) n(y)\,\mathrm{d}S_y\right] [u_\beta(x) - u_\alpha(x)]$, $\beta \neq \alpha$.

Références bibliographiques

[1] J.N. Pernin, E. Jacquet, Elasticity in highly heteregeneous composite medium: threshold phenomenon and homogenization, Int. J. Engrg. Sci. 39 (2001) 755–798.
[2] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal. 23 (6) (1992) 1482–1518.
[3] G. Allaire, F. Murat, Homogenization of the Neumann problem with non-isolated holes, Asymptotic Anal. 7 (1993) 81–95.
[4] E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, D. Percivale, An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains, Nonlinear Anal. 18 (5) (1992) 418–496.
[5] M. Mabrouk, H. Samadi, Homogenization of a heat transfer problem in a highly heteregeneous periodic medium, Int. J. Engrg. Sci. 40 (2002) 1233–1250.