

# Analyse du phénomène de constriction thermique au sein d'un milieu cylindrique avec retournement à 180° des lignes de flux

Vincent Gatto, Jean Pierre Bardon, Yves Scudeller

Laboratoire de thermocinétique de l'ISITEM, UMR CNRS 6607, rue Christian Pauc La Chantrerie, BP 90604, Nantes, France

Reçu le 5 mars 2002 ; accepté après révision le 20 juin 2002

Note présentée par Georges Duvant.

## Résumé

Nous présentons le calcul analytique et l'analyse physique de la résistance thermique de constriction dans une configuration où les lignes de flux de chaleur subissent un retournement de  $\pi$ . La configuration considérée est un cylindre adiabatique excepté sur l'une de ses bases où trois conditions sont imposées à savoir : une densité de flux sur un disque centré (source), trois anneaux qui correspondent à deux surfaces isolées et une surface isotherme (puits). On étudie l'influence de la taille de la source et du puits ainsi que celle de l'épaisseur du cylindre sur la résistance de constriction. *Pour citer cet article : V. Gatto et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 615–621.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

transferts thermiques / constriction thermique / retournement

## Analyse of the thermal constriction phenomenon within a cylindrical medium with a 180° reversal of the flux lines

## Abstract

We present the analytical solution and a physical analysis of the thermal constriction resistance for a configuration in which the heat flux lines undergo a  $\pi$  reversal. The configuration considered is an adiabatic cylinder except one of its bases, where three boundary conditions are imposed: a circular heat source, three annular surfaces which correspond to two adiabatic surfaces and one isothermal surface (heat sink). We study the size influence of the source, of the heat sink, and of the cylinder thickness on the thermal constriction resistance. *To cite this article: V. Gatto et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 615–621.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

heat transfer / thermal constriction / reversal

## *Abridged English version*

Thermal constriction phenomena correspond to a deformation of the heat flux lines imposed by a singularity, of the geometry, of the boundary conditions, or nature of the domain [1–4]. We present the study of the thermal constriction resistance in an unusual and original configuration, which is a circular heat source set at the surface of an insulated cylindrical tube, the heat sink being placed in the same plane as the heat source (Fig. 1). In this configuration, the heat flux circulating from the heat source to the heat sink, undergoes a 180° reversal.

The temperature distribution (2) and the dimensionless thermal constriction resistance (7) is found with the truncated method series [5]. A study of convergence and precision with the number of terms  $N$  of the

---

Adresse e-mail : gatto.vincent@polytech.univ-nantes.fr (V. Gatto).

solution, shows that the solution does not varies much more than 1% around a average value after 2000 terms. The solution is in good accordance with that obtained from a numerical method.

A physical analysis in the special case corresponding to Fig. 2 shows that the thermal constriction resistance  $R_c^*$  is composed of two components  $R_a^*$  and  $R_d^*$  in series. These two components are bounded by the ratio of the surfaces of the heat source and the heat sink. This means that there is a isotherm surface  $S_i$  of temperature  $T_i^*$  which shares the resistance  $R_c^*$  in these two components. The component  $R_a^*$  represents the effects of constriction related to the variations of the section and to the reversal beginning of the upward heat flux tube between  $s_0$  and  $S_i$ , the component  $R_d^*$  represents the same effects in the downward part (end of reversal and variation of the section of the tube) between  $S_i$  and  $S_0$ .

Variation of the thermal constriction resistance  $R_c^*$  with the dimensionless parameters  $\varepsilon$  and  $\gamma$  (Figs. 1 and 2) (3) is studied. Results show that at  $\varepsilon$  fixed  $R_c^*$  decrease when  $\gamma$  increase, to reach ( $\gamma > \varepsilon$ ) a value threshold (Figs. 3 and 4). In this domain,  $\gamma > \varepsilon$ , the thermal constriction is independent of the thickness  $l$ , the heat flux lines freely carry out a half-turn. On the other hand, when  $\gamma$  decreases and  $\gamma < \varepsilon$ , heat flow is guided in the parallel direction to the insulated face and is confined in a reduce volume, which causes an increased thermal resistance  $R_c^*$ . Figs. 5 and 6 present the variation of the resistance  $R_c^*$  and of its two components with  $\varepsilon$  when  $\gamma$  is fixed. When the radius  $r_0$  increases ( $\varepsilon$ ), the resistance  $R_c^*$  initially decreases to reach a minimum at  $\varepsilon_0$ , and then increases when  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . The value of  $\varepsilon_0$  is up to  $1/\sqrt{2}$  and depends on  $\gamma$ .

## 1. Introduction

Les phénomènes de constriction thermique correspondent à une déformation des lignes de flux imposée par une singularité, de la géométrie (rétrécissement par exemple) ou/et des conditions aux frontières du domaine (frontière isolée imposant un changement de direction du flux de chaleur par exemple). On les caractérise par un paramètre que l'on appelle résistance de constriction ( $R_c$ ) et qui représente la perturbation positive ou négative de résistance apportée à la résistance du milieu par la singularité. De nombreuses études de  $R_c$  correspondants à différentes géométries [1] et/ou conditions aux frontières [2,3] ou encore à différentes propriétés physiques du domaine [4] dans lesquelles se développe la constriction ont été réalisées. L'une des plus courantes et qui représente une bonne entrée en matière pour la compréhension des phénomènes de constriction est celle d'un cylindrique d'épaisseur  $l$  et de section  $S$  isolée sur sa surface latérale. La section  $z = 0$  est également isolée, excepté sur un petit élément d'aire  $s_0$ , centré sur l'axe, et par lequel pénètre un flux de chaleur  $\phi$  uniforme, la section  $z = l$  est quant à elle isotherme. Dans cette configuration la résistance de constriction se définit comme  $R_c = (\bar{T}_0 - \bar{T})/\phi$ , où  $\bar{T}_0$  est la température moyenne sur  $s_0$  et  $\bar{T}$  celle sur toute la section  $S$  qui serait offerte en  $z = 0$  au passage de la chaleur en l'absence de singularité.

Nous présentons ici le calcul analytique de la résistance de constriction dans une configuration inhabituelle et originale où les lignes de flux de chaleur subissent un retournement de  $\pi$ . Il s'agit d'un cylindre de rayon  $r_e$  (Fig. 1) isolé sur sa surface latérale ainsi que sur la face  $z = l$ . Sur la section  $z = 0$  trois conditions sont imposées, à savoir : une densité de flux uniforme sur un disque centré de rayon  $r_0$ , deux surfaces isolées qui correspondent à deux anneaux centrés, respectivement de rayon intérieur et extérieur  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$ ,  $r_e$  et une surface isotherme qui correspond à un anneaux également centré de rayons  $r_1$ ,  $r_2$ . On définit ici la résistance de constriction  $R_c = (\bar{T}_0 - \bar{T})/\phi$  dans laquelle  $\bar{T}_0$  et  $\bar{T}$  sont les températures moyennes du disque de surface  $s_0$  et de l'anneau de section  $S_0$ . Après avoir donné l'expression de la résistance thermique dans le cas général, on analyse plus particulièrement les résultats obtenus avec la configuration la moins complexe, c'est-à-dire lorsque  $r_1 = r_0$  et  $r_2 = r_e$  (Fig. 2). En effet, dans cette situation de nouveaux et intéressants problèmes se posent concernant le phénomène de constriction et son établissement. En particulier quels rôles jouent l'épaisseur  $l$  du milieu avec la condition d'isolation en  $z = l$ . À partir de quelle épaisseur  $l$  l'influence de cette condition est-elle négligeable ? Comment évolue la résistance avec le rayon  $r_0$  (lorsque  $r_0$  croît la section par laquelle entre le flux de chaleur augmente

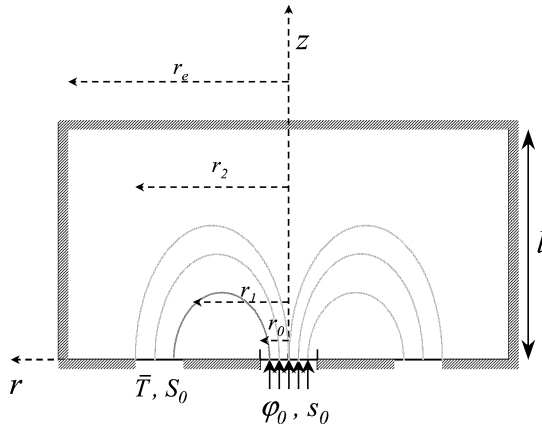


Figure 1. Constriction avec retournement.

Figure 1. Constriction with reversal.

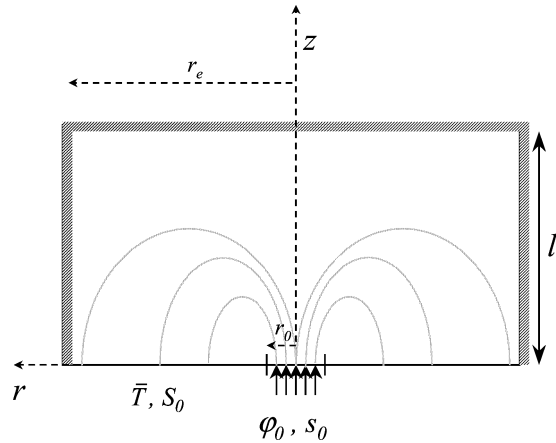


Figure 2. Constriction avec retournement,  $r_1 = r_0$  et  $r_2 = r_e$ .

Figure 2. Constriction with reversal,  $r_1 = r_0$  et  $r_2 = r_e$ .

mais la section par laquelle il sort se réduit). C'est pour répondre à ces questions, mais aussi en raison des applications industrielles qu'elle sous-tend, et notamment en micro-électronique pour l'optimisation de l'implantation de puce de puissance sur une carte que cette étude a été abordée.

## 2. Calcul du champ de température et de la résistance de constriction

Les équations qui gouvernent les transferts de chaleur dans la géométrie de la Fig. 1 s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1(a))$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad (1(b))$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} \varphi_0 & \text{pour } 0 \leq r \leq r_0 \\ 0 & \text{pour } r_0 \leq r \leq r_1 \\ 0 & \text{pour } r_2 \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (1(c))$$

$$T(r, 0) = 0 \quad \text{pour } r_1 \leq r \leq r_2 \quad (1(d))$$

Le champ de température solution de l'équation (1(a)) et des conditions aux limites (1(b)) est obtenu par la méthode des séries tronquées. Cette solution est donnée par :

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^N A_n J_0(u_n r^*) \frac{(e^{-u_n z^*} + e^{u_n(z^* - 2\gamma)})}{e^{-2u_n \gamma}} \quad (2)$$

avec les grandeurs adimensionnelles :

$$z^* = \frac{z}{r_e}, \quad r^* = \frac{r}{r_e}, \quad \varepsilon = \frac{r_0}{r_e}, \quad \varepsilon_1 = \frac{r_1}{r_e}, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{r_e}, \quad \gamma = \frac{l}{r_e} \quad (3)$$

$u_n$  est la racine de l'équation transcendante  $J_1(u_n) = 0$ .  $J_0$  et  $J_1$  étant les fonctions de Bessel de première espèce respectivement d'ordre 0 et d'ordre 1.

La non uniformité des conditions aux limites (1(c) et 1(d)) ne permet pas, pour déterminer les coefficients d'amplitudes  $A_n$ , l'utilisation des propriétés d'orthogonalité des fonctions de base  $J_0$  qui forment la solution. La méthode consiste pour calculer ces coefficients à résoudre un système linéaire [5]. Ce système

est obtenu en insérant tout d’abord la solution (2) dans (1(c)) qui exprime la condition en flux et (1(d)) qui exprime la condition en température. Puis, après avoir multiplié chaque équations obtenues par  $r J_0(u_k r^*)$ , celles-ci sont intégrées sur leur domaine respectif et finalement sommées pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^N \frac{A_n}{e^{-2u_n \gamma}} \left\{ u_n (e^{-2u_n \gamma} - 1) \int_0^{r_0} J_0(u_n r^*) J_0(u_k r^*) r \, dr + (e^{-2u_n \gamma} + 1) \int_{r_1}^{r_2} J_0(u_n r^*) J_0(u_k r^*) r \, dr \right\} = \frac{-\varphi_0 r_e}{\lambda} \int_0^{r_0} J_0(u_k r^*) r \, dr \quad (4)$$

Après simplification le système est donné par :

$$[\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{A}^*] = [\mathbf{Y}] \quad (5)$$

Les coefficients des vecteurs  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{Y}$  sont respectivement  $A_n^* = A_n \lambda / (\varphi_0 r_0 e^{-2\gamma u_n})$  et  $y_k = -J_1(u_k \varepsilon) / u_k$ . Les coefficients de la matrice  $\mathbf{C}$  sont quant à eux donnés par :

$$C_{n,k} = \left[ u_n (e^{-2u_n \gamma} - 1) - (1 + e^{-2u_n \gamma}) \right] \frac{r_e^2}{u_n^2 - u_k^2} \left[ u_n (\varepsilon_1 J_1(u_n \varepsilon_1) J_0(u_k \varepsilon_1) - \varepsilon_2 J_1(u_n \varepsilon_2) J_0(u_k \varepsilon_2)) - u_k (\varepsilon_1 J_1(u_k \varepsilon_1) J_0(u_n \varepsilon_1) - \varepsilon_2 J_1(u_k \varepsilon_2) J_0(u_n \varepsilon_2)) \right] \quad (6)$$

Il apparaît que la matrice  $\mathbf{C}$  est très mal conditionnée et cela d’autant plus que l’on augmente le nombre de termes de la solution (2). Pour résoudre ce problème et obtenir la solution du système linéaire (5), nous avons utilisé la méthode itérative du gradient conjugué, celle-ci semble très bien appropriée. Une étude de la convergence et de la précision au nombre de termes  $N$  montre que la solution de la résistance de constriction thermique  $R_c^*$  (7) ne varie plus que de 2 % autour d’une valeur moyenne à partir de 700 termes. Pour la justesse de l’analyse et des résultats, nous avons utilisé dans la présente étude 2000 termes, ce qui nous amène à une variation inférieure à 1 %. La solution analytique a également été comparée avec celle obtenue sur un code de calcul numérique aux Eléments Finis, l’écart constaté est de l’ordre de 2,5 %.

On déduit de cette solution, l’expression de la température moyenne  $\bar{T}_0$  du disque de rayon  $r_0$  et de la résistance de constriction entre ce disque et l’anneau de surface  $S$  à température  $T = 0$  soit  $R_c = \bar{T}_0 / \pi r_0^2 \varphi_0$ . En variable adimensionnée,  $R_c^* = \lambda R_c r_e$ ,  $\bar{T}_0^* = \lambda \bar{T}_0 / \varphi_0 r_0$ , on obtient la même expression pour ces deux grandeurs :

$$R_c^* = \frac{r_e \bar{T}_0^*}{\pi r_0} = \frac{2}{\varepsilon \pi} (A_0^* + \Sigma_N^*) \quad \text{où } \Sigma_N^* = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^*}{\varepsilon u_n} J_1(u_n \varepsilon) (1 + e^{-2u_n \gamma}) \quad (7)$$

### 3. Interprétation physique

La résistance thermique  $R_c^*$  entre la source (disque) et le puits de chaleur (anneau) est formée de deux termes, qui sont :

$$R_d^* = \frac{2}{\varepsilon \pi} A_0^* \quad \text{et} \quad R_a^* = \frac{2}{\varepsilon \pi} \Sigma_N^* \quad (8)$$

Pour donner une interprétation physique à ces deux termes il est intéressant de considérer la température moyenne  $\bar{T}(z_0)$  dans une section  $z = z_0$ . Le calcul donne  $\bar{T}(z_0) = 2A_0$ , valeur indépendante de  $z_0$ . Ceci implique que  $d\bar{T}/dz = 0$  et traduit bien le fait que le flux moyen qui traverse toute section est nul c’est à dire que le flux ascendant est égal au flux descendant, et plus particulièrement que chaque ligne de flux traversant dans un sens une section d’ordonnée  $z_0$ , retransverse cette même section à un autre endroit de celle-ci dans l’autre sens. Appliquons ce résultat en  $z = 0$  :  $\bar{T}(0) = (\pi r_0^2 \bar{T}_0) / (\pi r_e^2) = \varepsilon^2 \bar{T}_0$ , or  $\bar{T}_0 = 2[A_0 + \Sigma_N]$  ce qui nous amène à :

$$A_0^* = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \Sigma_N^* \quad \text{ou encore } \Sigma_N^* = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} A_0^* \quad (9)$$

Il en résulte que le rapport  $R_a^*/R_d^*$  est égal au rapport inverse des surfaces du disque et de l'anneau. Nous pouvons introduire une température intermédiaire  $T_i^*$  telle que :

$$\frac{R_a^*}{R_d^*} = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \frac{\bar{T}_0^* - T_i^*}{T_i^*} \quad (10)$$

En d'autres termes il existe une isotherme intermédiaire  $T_i^* = \varepsilon^2 \bar{T}_0^* = 2A_0^*$  qui partage la résistance de constriction  $R_c^*$  en ses deux composantes  $R_a^*$  et  $R_d^*$ . Il est remarquable que la valeur de l'isotherme ( $T_i^* = 2A_0^*$ ) coïncide avec la température moyenne dans toute section  $z = z_0$ . La résistance  $R_a^*$  représente les effets de constriction liés aux variations de section et au début de retournement dans la partie ascendante du tube de flux,  $R_d^*$  représente les mêmes effets dans la partie descendante (fin de retournement et variation de la section du tube). Compte tenu de la relation (9) on peut donner deux autres expressions de la résistance de constriction globale :

$$R_c^* = \frac{2}{\varepsilon^3 \pi} A_0^* \quad \text{et} \quad R_c^* = \frac{2}{\pi \varepsilon (1 - \varepsilon^2)} \sum_{n=1}^N \frac{A_n^*}{\varepsilon u_n} J_1(u_n \varepsilon) (1 + e^{-2u_n \gamma}) \quad (11)$$

#### 4. Analyse des résultats : Évolutions de la résistance de constriction globale et de ses deux composantes en fonction de $\gamma$ et $\varepsilon$

Nous nous limitons dans cette partie pour des raisons de concision à la géométrie correspondant à la Fig. 2 et pour laquelle  $\varepsilon = \varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2 = 1$ . Sur les Figs. 3 et 4, à rayon  $r_0 = \text{cst}$  ( $\varepsilon$  fixé), la résistance  $R_c^*$  décroît en fonction de  $\gamma$ , c'est à dire de l'épaisseur, pour atteindre lorsque  $\gamma > \gamma_0$ , une valeur seuil. Dans ce domaine  $\gamma > \gamma_0$ ,  $R_c^*$  est indépendante de l'épaisseur  $l$  et les lignes de flux sont totalement épanouies et réalisent librement un demi tour. Il apparaît sur les Figs. 3 et 4 que le seuil  $\gamma_0$  dépend de  $\varepsilon$ . En fixant pour seuil la valeur de  $\gamma$ , pour laquelle la résistance  $R_c^*$  est établie à 95 % de sa valeur  $R_c^*$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), on trouve  $\gamma_0 = \varepsilon$  ce qui correspond à une épaisseur seuil  $l_0 = r_0$ . Au delà de  $l_0$ ,  $R_c^*$  est pratiquement indépendante de l'épaisseur  $l$ . Lorsque l'épaisseur diminue ( $\gamma < \gamma_0$ ) il y a un confinement des lignes de flux dans un espace de plus en plus réduit et la condition d'isolation en  $z = l$  force les lignes de flux à avoir un parcours parallèle à cette face, il en résulte une augmentation de la résistance de constriction due à la proximité de

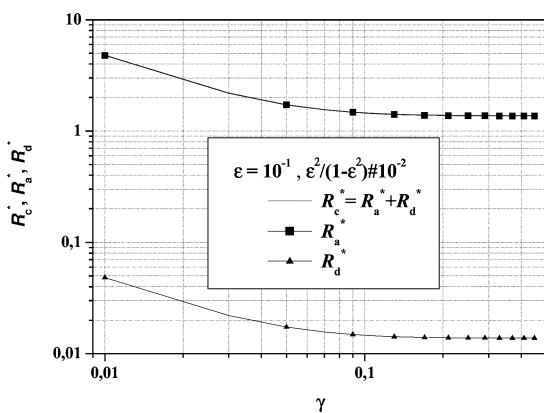


Figure 3. Évolution des résistances en fonction de  $\gamma$  à  $\varepsilon$  fixé ( $\varepsilon = 10^{-1}$ ).

Figure 3. Evolution of resistances according to  $\gamma$  and to  $\varepsilon$  fixed ( $\varepsilon = 10^{-1}$ ).

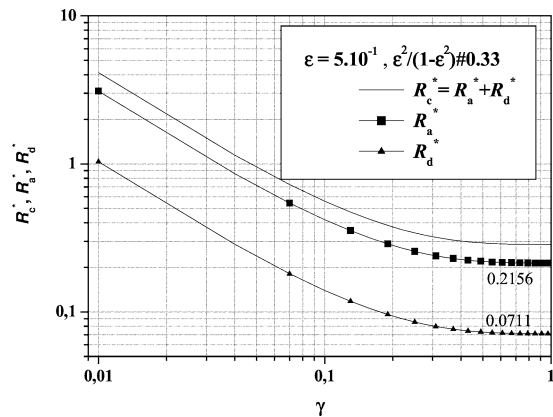
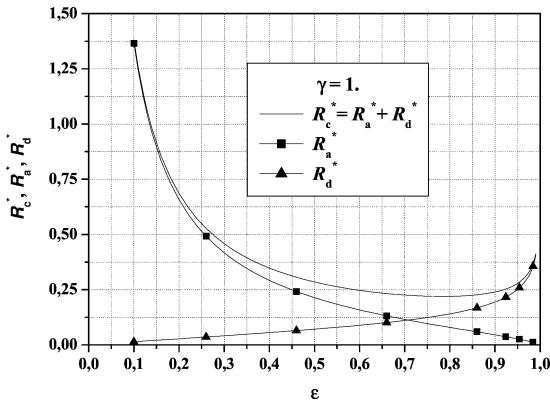


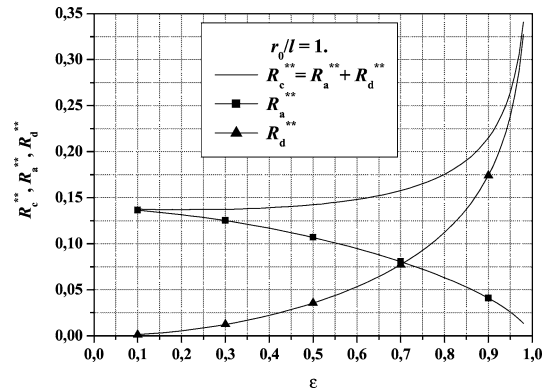
Figure 4. Évolution des résistances en fonction de  $\gamma$  à  $\varepsilon$  fixé ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$ ).

Figure 4. Evolution of resistances according to  $\gamma$  and to  $\varepsilon$  fixed ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$ ).



**Figure 5.** Évolution des résistances en fonction de  $\varepsilon$  à  $\gamma$  fixé ( $\gamma = 1$ ).

**Figure 5.** Evolution of resistances according to  $\varepsilon$  and to  $\gamma$  fixed ( $\gamma = 1$ ).



**Figure 6.** Évolution des résistances en fonction de  $\varepsilon$  à  $\gamma$  fixé ( $\gamma = 10^{-1}$ ).

**Figure 6.** Evolution of resistances according to  $\varepsilon$  and to  $\gamma$  fixed ( $\gamma = 10^{-1}$ ).

la paroi  $z = l$  et à la condition d'isolation sur celle-ci. On note dans le cas de la Fig. 3 que la composante  $R_a^*$  et la résistance  $R_c^*$  sont quasiment confondues en raison de la valeur de  $\varepsilon$ .

Pour avoir la relation (7) donnant  $R_c^*$ , nous avons adimensionnalisé la résistance de retournement  $R_c$  par  $r_e$ . Pour aller plus loin dans l'analyse de l'influence de  $\varepsilon$  sur  $R_c$ , nous allons introduire une autre expression, à savoir  $R_c^{**}$  (ainsi que  $R_a^{**}$  et  $R_d^{**}$ ) qui provient de l'adimensionnalisation de  $R_c$  par  $r_0$ . En effet lorsque  $R_c^*$  varie avec  $\varepsilon$ , il faut penser que c'est la dimension de la source ( $\pi r_0^2$ ) ainsi que celle du puit de chaleur ( $\pi \cdot (r_e^2 - r_0^2)$ ) qui varie à  $r_e$  constant. A l'inverse lorsque  $R_c^{**}$  varie avec  $\varepsilon$ , il faut penser que c'est uniquement la dimension du puit qui varie, celle de la source restant constante. Les résistances  $R_c^*$  et  $R_c^{**}$  apportent, l'une et l'autre des informations complémentaires et différentes sur le comportement de la résistance de retournement  $R_c$  avec  $\varepsilon$ .

Les Figs. 5 et 6 présentent les évolutions de la résistance de constriction  $R_c^*$  et de ses deux composantes  $R_a^*$  et  $R_d^*$  en fonction de  $\varepsilon$  pour une épaisseur  $l = \text{cst}$  ( $\gamma$  fixé). Lorsque  $\varepsilon$  augmente c'est à dire le rayon  $r_0$ , ceci entraîne une augmentation de la surface du disque et une diminution de la surface de l'anneau. On observe pour  $R_c^*$  deux domaines assez distincts. Dans le premier  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $R_c^*$  décroît fortement puis plus faiblement pour atteindre un minimum très aplati pour  $\varepsilon_0$  dépendant de  $\gamma$ . Dans le deuxième domaine  $\varepsilon_0 < \varepsilon < 1$  la résistance  $R_c^*$  augmente faiblement. Les deux composantes  $R_a^*$  et  $R_d^*$  ont des évolutions monotones et réciproques avec  $\varepsilon$ ,  $R_a^*$  diminue alors que  $R_d^*$  augmente. Il est remarquable que quel que soit  $\gamma$ , ces deux composantes deviennent égales pour  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$  c'est à dire lorsque les surfaces du disque et de l'anneau sont égales. Dans ce cas l'effet global de constriction est lié uniquement au retournement des lignes de flux de  $\pi$ . On peut noter que le minimum de  $R_c^*$  ne se produit pas exactement pour  $\varepsilon = 1/\sqrt{2} = 0,707$  mais un peu au delà, ce qui est certainement dû à la géométrie cylindrique du domaine. Tout ceci nous conforte dans les interprétations développées dans la Section 3 à savoir que  $R_a^*$  caractérise les effets de constriction dans la partie ascendante du flux ( $R_a^*$  diminue quand la section du tube de flux ascendant augmente) et  $R_d^*$  dans la partie descendante du flux ( $R_d^*$  augmente quand la section du tube de flux descendant diminue).

Les Figs. 7 et 8 présentent les évolutions de  $R_c^{**}$  avec  $\varepsilon$ . Fig. 7, nous sommes dans le cas où la résistance de retournement est indépendante de  $\gamma$ . Sur cette figure, on peut observer qu'il existe également une valeur seuil pour  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_0 = 0.5$ ) à partir de laquelle  $R_c^{**}$  ne varie pratiquement plus lorsque  $\varepsilon$  diminue (variation relative de  $R_c^{**}$  inférieure à 5 % pour  $0 < \varepsilon < 0.5$ ). A partir de cette valeur la condition d'isolation en  $r = r_e$  n'a plus d'influence sur  $R_c^{**}$  et nous pouvons déterminer la résistance de retournement dans le demi espace,  $4/(3\pi^2 r_0)$ . Il est remarquable que cette résistance est égale à la moitié de la résistance de constriction

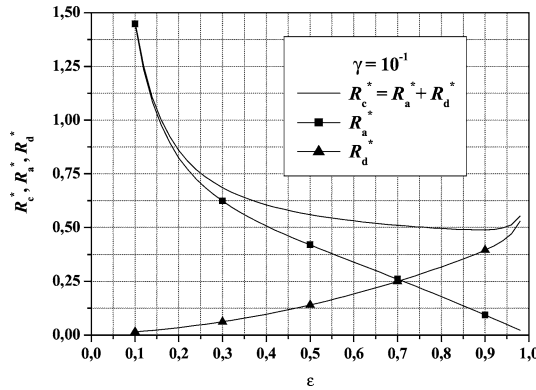


Figure 7. Évolution des résistances en fonction de  $\varepsilon$  pour  $r_0/l = 1$ .

Figure 7. Evolution of resistances according to  $\varepsilon$  for  $r_0/l = 1$ .

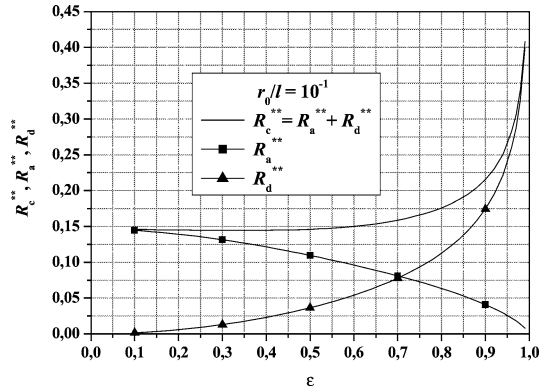


Figure 8. Évolution des résistances en fonction de  $\varepsilon$  pour  $r_0/l = 10^{-1}$ .

Figure 8. Evolution of resistances according to  $\varepsilon$  for  $r_0/l = 10^{-1}$ .

classique du demi espace, limité par un plan isolé, expecté sur un disque de rayon  $r_0$ . De plus, dans le cas du demi espace, à partir des deux valeurs seuils  $\gamma_0$  et  $\varepsilon_0$  (qui se traduisent par  $l = r_0$  et  $r_e = 2r_0$ ), il est possible d'affirmer que la constriction s'épanouie, dans une géométrie en forme de fontaine dans laquelle les lignes de flux réalisent approximativement un demi cercle centré en  $r_0$  et de rayon maximum  $r_0$ .

## 5. Conclusion

Le phénomène de constriction entre un disque de rayon  $r_0$  et un anneau concentrique constituant la section droite d'un cylindre isolé sur ces deux autres faces a été analysé. Dans cette géométrie très particulière, caractérisée par un retournement de  $\pi$  des lignes de flux, la résistance de constriction  $R_c^*$  peut se décomposer en deux résistances en série  $R_a^*$  et  $R_d^*$ . Celles-ci caractérisent respectivement les effets de constriction dans les parties centrale ascendante et annulaire descendante des lignes de flux. On a pu mettre en évidence que le rapport de ces deux résistances était égal au rapport inverse des surfaces du disque et de l'anneau. On a pu observer que les lignes de flux sont pleinement développées dès que l'épaisseur  $l$  est supérieure à  $r_0$  ( $\gamma > \varepsilon$ ) et que la résistance thermique de constriction  $R_c^*$  est alors indépendante de cette épaisseur. Pour des épaisseurs inférieures à  $r_0$  la résistance de constriction dépend de  $l$  et augmente lorsque  $l$  diminue. Enfin la résistance de constriction varie avec le rayon  $r_0$  du disque et atteint une valeur minimale pour  $r_0/r_e$  légèrement supérieure à  $1/\sqrt{2}$  et fonction de  $\gamma$ .

## Références bibliographiques

- [1] K. Negus, M.M. Yovanovich, J.V. Beck, On the nondimensionalization of the constriction resistance for semi-infinite heat flux tubes, J. Heat Transfer 111 (1989) 804–807.
- [2] M.M. Yovanovich, General expressions for circular constriction resistances for arbitrary flux distribution, in: A.M. Smith (Ed.), in: Progress in Astronautics and Aeronautics: Radiative Transfer and Thermal Control, Vol. 49, AIAA, New York, 1976, pp. 381–396.
- [3] K. Negus M.M. Yovanovich, J.C. Thompson, Thermal constriction resistance of circular contacts on coated surfaces: Effet of contact boundary conditions, AIAA Paper No. 851014, AIAA 20th Thermophysics Conference, Williamsburg, VA, 1985.
- [4] Ping Hui, H.S Tan, Y.S. Lye, Design of circular heat spreaders on semi-infinite heat sinks in microelectronics device applications, IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology, Part A 20 (4) (1997) 452–457.
- [5] P.J. Heggs, D.B. Ingham, M. Manzoor, The analysis of fin assembly heat transfer by a series truncation method, ASME 104 (1982) 210–212.