

Approximation uniformément valable pour l'écoulement de Falkner–Skan

Sylvie Saintlos, Jacques Bretteville

Institut de mécanique des fluides de Toulouse, UMR 5502 INP/UPS-CNRS, allée du Pr. Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Reçu le 13 juillet 2001 ; accepté après révision le 16 juillet 2002

Note présentée par Sébastien Candel.

Résumé

On se propose d'établir une solution uniformément valable dans tout le domaine d'étude de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible sur plaque plane semi-infinie avec incidence. Cette solution est construite à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés au premier ordre et est comparée aux solutions de couche limite classique et potentielle à l'ordre un. Elle permet de proposer une meilleure approximation de l'écoulement de base, notamment pour le problème du bord d'attaque. La solution est établie jusqu'au second ordre pour l'écoulement sur plaque sans incidence. Ces solutions obtenues plus réalistes devraient être employées dans l'étude de la réceptivité et de la déstabilisation des couches limites. *Pour citer cet article : S. Saintlos, J. Bretteville, C. R. Mécanique 330 (2002) 673–682.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides numérique / couche limite laminaire / écoulement de Blasius / écoulement de Falkner–Skan / perturbation singulière

A uniformly valid approximation for a Falkner–Skan flow

Abstract

In the context of the laminar steady two-dimensional flow of an incompressible Newtonian fluid, we propose a uniformly valid approximation in the whole domain of the flow over a flat plate with incidence. The solution is built from the asymptotic method of matched expansions at order one and has been compared with the classical boundary layer solution and the potential solution. It allows a better approximation of basic flow near the leading edge of the flat plate. The solution has been established at order two for the flow without incidence. These more realistic solutions should be employed when analysing the receptivity and the ensuing destabilisation of boundary layers. *To cite this article: S. Saintlos, J. Bretteville, C. R. Mécanique 330 (2002) 673–682.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

computational fluid mechanics / laminar boundary layer / Blasius flow / Falkner–Skan flow / singular perturbation

Abridged English version

The fact that the potential solution cannot satisfy the no slip condition at the wall has led Prandtl to introduce the concept of a boundary layer [1]. Nevertheless, even if the solution of the classical boundary layer equations removes the problem of the singularity at the wall, allowing one to match the longitudinal velocity with that of the potential solution, it is not the same for the vertical component of the velocity. Writing asymptotic expansions at a higher order and the matching at the same order [2] for the transverse velocity between the domains of validity of the boundary layer and potential approximations allows proposing the uniformly valid solution in the entire domain valid at order one. This more accurate solution, also valid outside of the boundary layer, allows a better approximation of the velocity vector and pressure, in

Adresses e-mail : saintlos@imft.fr (S. Saintlos); brette@imft.fr (J. Bretteville).

particular, in the vicinity of the leading edge. The solution has been built from the irrotationality hypothesis of the potential flow at order one and the contribution at this order has been deduced from the asymptotic matching. The matching between the boundary layer and the potential region shows that the pressure term at order one is zero. Moreover, the search for a uniformly valid solution at order $Re^{-1/2}$ leads to a homogeneous solution for the problem of the boundary layer at the same order. At order $Re^{-1/2}$, the uniformly valid solution (8) has been written as a superposition of the solution of the boundary layer plus that of the potential flow, and by subtracting the matching terms at the same order. A uniformly valid solution of Eqs. (4) in the entire flow domain has been established for the pressure at order Re .

For the flow without incidence, a uniformly valid approximation (10) has also been established at order two, for the velocity, taking into account the exponential decrease of the vortex at the infinity which is compatible to the no rotational hypothesis at the outside of the boundary layer.

The solution (8) has been compared with the boundary layer solution and the potential flow. The results indicates clearly that for larger Reynolds numbers better comparisons are found with the boundary layer solution in the vicinity of the wall (Fig. 1). This solution (8) returns smoothly to the potential flow when the boundary layer variable is sufficiently large. Both possibilities to define a boundary layer thickness appear: on the one hand, it can be defined with a difference of one percent between the solution of the boundary layer equation and (8), or, on the other hand, it could be defined with the difference of one percent between this last and the potential solution. For the ‘Blasius’ flow and for Y large, the vertical velocity component tends less rapidly toward zero when the Reynolds numbers increases (Fig. 2). For the flow with incidence, the solution (8) is represented in Fig. 3 for a lower Reynolds number of 10^2 at the station $x = 1$ and for an angle of incidence equal to (-15°) . In the case without incidence (Fig. 4), the solution (8) has been compared with (10) and we note the exponential decrease of the solution (10) at the output of the boundary layer. Fig. 5, displaying the comparison between the longitudinal and vertical pressure gradient shows that it is necessary to take into account the vertical pressure gradient. Fig. 6 shows that the vertical pressure gradient is more important near the leading edge and increases with increasing incidence. Future work should be devoted to examine modal and non-modal stability results. Since the uniformly valid solution is particularly relevant near the leading edge, it should be important to study again nonmodal stability and to quantify the effect of this solution on optimal disturbances [8].

1. Introduction

Dans le cas d’un écoulement de fluide parfait en contact avec un obstacle, l’impossibilité de satisfaire la condition d’adhérence du fluide à la paroi pour la solution potentielle conduit Prandtl à introduire le concept de couche limite [1]. Néanmoins, si cette solution du problème de couche limite classique lève le problème de singularité à la paroi tout en permettant le raccord de la vitesse longitudinale avec celle de la solution potentielle, il n’en est pas de même pour la vitesse transversale. L’écriture des développements asymptotiques à l’ordre ultérieur et le raccordement au même ordre [2] de la vitesse transversale entre les zones de couche limite et potentielle permettent de proposer ainsi une approximation composite au premier ordre valable [3] dans tout le domaine. Cette solution plus précise permet une meilleure approximation du vecteur vitesse et de la pression au sein de tout l’écoulement. Elle est d’autant plus pertinente que l’on se rapproche du bord d’attaque. La prise en compte du second ordre dans le développement de la pression permet de quantifier le gradient de pression transversal dans la couche limite. Pour l’écoulement sur une plaque sans incidence, une solution uniformément valable à l’ordre deux est établie permettant de déterminer un vecteur tourbillon uniformément valable au même ordre qui met en évidence les effets non parallèles.

2. Formulation du problème

On considère l’écoulement stationnaire plan d’un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane semi-infinie faisant un angle φ par rapport à l’écoulement amont. Les équations adimensionnelles

s'écrivent :

$$\begin{aligned}\partial_x v_x + \partial_y v_y &= 0 \\ Re(v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x) &= -Re \partial_x p + \partial_{xx}^2 v_x + \partial_{yy}^2 v_x \\ Re(v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y) &= -Re \partial_y p + \partial_{xx}^2 v_y + \partial_{yy}^2 v_y\end{aligned}$$

où v_x et v_y désignent respectivement les composantes longitudinale et transversale de la vitesse, p la pression et Re le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement.

2.1. Écoulement potentiel

En introduisant le paramètre $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$, on recherche une solution des équations de Navier–Stokes sous la forme de développements asymptotiques réguliers par rapport au paramètre ε :

$$\begin{aligned}v_x(x, y) &= \tilde{u}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{u}_2(x, y) + o(\varepsilon^2) \\ v_y(x, y) &= \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{v}_2(x, y) + o(\varepsilon^2) \\ p(x, y) &= \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{p}_2(x, y) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

À l'ordre zéro en ε , nous obtenons les équations d'Euler :

$$\partial_x \tilde{u}_0 + \partial_y \tilde{v}_0 = 0, \quad \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{u}_0 = -\partial_x \tilde{p}_0, \quad \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{v}_0 = -\partial_y \tilde{p}_0$$

L'écoulement étant irrotationnel à l'infini amont, il demeure irrotationnel dans tout le domaine et la pression est déterminée à l'aide du théorème de Bernoulli.

En introduisant la fonction de courant $\tilde{\Psi}_0$, on recherche une solution telle que les demi-droites $y = -\operatorname{tg} \varphi x$ pour $x < 0$ et $y = 0$ pour $x > 0$ soient lignes de courant. La solution de ce problème est celle d'un écoulement potentiel autour d'un dièdre d'ouverture 2φ et s'écrit en fonction des variables polaires avec $n = \varphi/(\pi - \varphi)$:

$$\tilde{u}_0 = \rho^n \cos(n\theta), \quad \tilde{v}_0 = -\rho^n \sin(n\theta), \quad \tilde{p}_0 = -\frac{1}{2}\rho^{2n}$$

Cet écoulement n'est valable que pour des valeurs de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ bornées et pour $0 \leq \theta \leq \pi - \varphi$.

Le cas $n = 0$ correspond à l'écoulement sur plaque plane sans incidence, le cas $n = 1$ correspondant à un écoulement incident orthogonal à la plaque (écoulement de Hiemenz).

Les comportements de \tilde{u}_0 , \tilde{v}_0 , \tilde{p}_0 au voisinage de la plaque donnent :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(x, y) &= x^n - \frac{(n-1)n}{2} x^{n-2} y^2 + O(y^4) \\ \tilde{v}_0(x, y) &= -n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{3-n} y^3 + O(y^5) \\ \tilde{p}_0(x, y) &= -\frac{1}{2} x^{2n} - \frac{n}{2} x^{2n-2} y^2 + O(y^4)\end{aligned}$$

Cet écoulement potentiel ne satisfait pas les conditions d'adhérence du fluide à la paroi. Ceci nécessite l'introduction d'une couche limite visqueuse se développant au voisinage de la plaque, laquelle impose de prendre en compte les termes au premier ordre dans tout l'écoulement pour obtenir une solution uniformément valable.

A l'ordre un, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{u}_1 + \partial_y \tilde{v}_1 &= 0 \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{u}_1 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{u}_0 &= -\partial_x \tilde{p}_1 \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{v}_1 + \tilde{u}_1 \partial_x \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{v}_1 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{v}_0 &= -\partial_y \tilde{p}_1 \end{aligned}$$

De l'hypothèse d'irrotationnalité à l'ordre un, on en déduit que la solution à cet ordre est celle d'un écoulement potentiel et on a :

$$\tilde{p}_1 + \tilde{u}_0 \tilde{u}_1 + \tilde{v}_0 \tilde{v}_1 = 0 \tag{1}$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont déduites du raccord asymptotique et permettent de déterminer la quantité $\tilde{v}_1(x, 0)$ pour $x > 0$. Pour $x < 0$, il n'y a pas de couche limite et donc la demi droite $y = -\text{tg } \varphi x$ doit être ligne de courant et donc l'écoulement reste potentiel pour $x < 0$.

Au second ordre, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{u}_2 + \partial_y \tilde{v}_2 &= 0 \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2 \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{u}_2 + \tilde{v}_2 \partial_y \tilde{u}_0 &= -\partial_x \tilde{p}_2 - (\tilde{u}_1 \partial_x \tilde{u}_1 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{u}_1) \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{v}_2 + \tilde{u}_2 \partial_x \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{v}_2 + \tilde{v}_2 \partial_y \tilde{v}_0 &= -\partial_y \tilde{p}_2 - (\tilde{u}_1 \partial_x \tilde{v}_1 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{v}_1) \end{aligned}$$

L'hypothèse d'irrotationnalité à l'ordre deux, compatible avec les équations de Navier–Stokes puisque $\Delta \tilde{u}_0 = 0$ et $\Delta \tilde{v}_0 = 0$, conduit à :

$$\tilde{p}_2 + \tilde{u}_0 \tilde{u}_2 + \tilde{v}_0 \tilde{v}_2 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{v}_1^2) = 0 \tag{2}$$

2.2. Problème de couche limite

On pose $y = \varepsilon Y$ où Y est la variable de couche limite classique ainsi que les développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(x, Y) + \varepsilon U_1(x, Y) + \varepsilon^2 U_2(x, Y) + o(\varepsilon^2) \\ v_y &= \varepsilon [V_0(x, Y) + \varepsilon V_1(x, Y) + \varepsilon^2 V_2(x, Y) + o(\varepsilon^2)] \\ p &= P_0(x, Y) + \varepsilon P_1(x, Y) + \varepsilon^2 P_2(x, Y) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On obtient à l'ordre zéro en ε le problème de couche limite de Falkner–Skan :

$$\partial_x U_0 + \partial_Y V_0 = 0, \quad U_0 \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y U_0 = -\partial_x P_0 + \partial_{YY}^2 U_0, \quad \partial_Y P_0 = 0$$

qui a pour solution :

$$\begin{aligned} U_0(x, Y) &= x^n f'(\eta), & V_0(x, Y) &= -\frac{1}{2} x^{(n-1)/2} [(n+1)f(\eta) + (n-1)\eta f'(\eta)] \\ P_0(x, Y) &= P_0(x) = -\frac{1}{2} x^{2n} \end{aligned}$$

où f satisfait au problème :

$$f'''(\eta) + \frac{n+1}{2} f f'' + n(1-f'^2) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$$

avec $\eta = x^{(n-1)/2} Y$. Les comportements de $f(\eta)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ et $f(\eta)$ lorsque $\eta \rightarrow \infty$ s'écrivent :

$$f(\eta) = \frac{\lambda_n}{2} \eta^2 - \frac{n}{6} \eta^3 + O(\eta^5), \quad f(\eta) = \eta + v_n + \text{TST}$$

où TST désigne des termes exponentiellement petits.

A l'ordre un, le problème de couche limite s'écrit :

$$\partial_x U_1 + \partial_Y V_1 = 0, \quad U_0 \partial_x U_1 + U_1 \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y U_1 + V_1 \partial_Y U_0 = \partial_{YY}^2 U_1$$

avec $\partial_Y P_1 = 0$.

A l'ordre deux, on a :

$$\begin{aligned} \partial_x U_2 + \partial_Y V_2 &= 0 \\ U_0 \partial_x U_2 + U_2 \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y U_2 + V_2 \partial_Y U_0 &= -\partial_x P_2 + \partial_{xx}^2 U_0 + \partial_{YY}^2 U_2 \end{aligned} \quad (3)$$

et la pression P_2 satisfait l'équation (4) :

$$\partial_Y P_2 = \partial_{YY}^2 V_0 - U_0 \partial_x V_0 - V_0 \partial_Y V_0 \quad (4)$$

L'équation longitudinale du mouvement prend en compte la solution $U_1 = V_1 = 0$ qui sera obtenue au paragraphe 2.3.

2.3. Raccord entre la couche limite et l'écoulement potentiel

Le comportement de $f(\eta)$ quand $\eta \rightarrow \infty$ conduit à ceux des vitesses transversale et longitudinale dans la couche limite lorsque $Y \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} v_y(x, Y) &= -\varepsilon n x^{n-1} Y - \varepsilon \frac{(n+1)}{2} v_n x^{(n-1)/2} + \varepsilon^2 V_1(x, Y) + \varepsilon^3 V_2(x, Y) + o(\varepsilon^3) \\ v_x(x, Y) &= x^n + \varepsilon U_1(x, Y) + \varepsilon^2 U_2(x, Y) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ceux dans l'écoulement potentiel lorsque $y \rightarrow 0$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= -n x^{n-1} y + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{v}_2(x, y) + \varepsilon^3 \tilde{v}_3(x, y) + o(\varepsilon^3) \\ v_x(x, y) &= x^n + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) + \varepsilon^2 \tilde{u}_2(x, y) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Par conséquent, le raccord pour la vitesse transversale à l'ordre un donne :

$$\tilde{v}_1(x, y) = -\frac{(n+1)v_n}{2x^{(1-n)/2}}$$

et celui sur la vitesse longitudinale donne :

$$U_0(x, Y) = \tilde{u}_0(x, y) = x^n \quad \text{et} \quad U_1(x, Y) = \tilde{u}_1(x, y) = 0$$

On peut alors écrire la contribution à l'ordre un de la solution potentielle :

$$\tilde{u}_1 = \frac{(n+1)}{2} v_n \sin\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2}, \quad \tilde{v}_1 = -\frac{(n+1)}{2} v_n \cos\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2}$$

Le raccord sur la pression donne :

$$\tilde{p}_0(x, y) = P_0(x) = -\frac{1}{2} x^{2n}$$

D'après l'équation (1), on a :

$$\tilde{p}_1(x, y) = 0 \quad \text{car} \quad \tilde{v}_0(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_1(x, y) = 0$$

Puisque $\tilde{p}_1(x, y) = 0$, le raccord sur la pression conduit à $P_1(x) = 0$ puisque $\partial_Y P_1 = 0$.

Ainsi, les fonctions $U_1(x, Y)$ et $V_1(x, Y)$, solutions d'un problème linéaire homogène associé à des conditions aux limites homogènes sur U_1 en $Y = 0$ et $Y \rightarrow \infty$ et sur V_1 en $Y = 0$, sont identiquement nulles. Il est à remarquer que dans le cas d'un modèle de couplage fort [4], $\tilde{u}_1(x, 0)$ serait différent de zéro.

Du raccord de la vitesse transversale à l'ordre deux : $\tilde{v}_2(x, y)_{y \rightarrow 0} = V_1(x, Y)_{Y \rightarrow \infty} = 0$, on en déduit que $\tilde{v}_2(x, y) = 0$ est la solution de $\Delta \tilde{v}_2(x, y) = 0$.

Par ailleurs, $\tilde{v}_2(x, y)$ et $\tilde{u}_2(x, y)$ étant des fonctions harmoniques conjuguées, $\tilde{u}_2(x, y)$ est nulle partout. Il n'y a donc pas de contribution pour les vitesses sur la solution potentielle à l'ordre deux.

Compte tenu des résultats précédents, on déduit la pression :

$$\tilde{p}_2(x, y) = -\frac{(n+1)^2 v_n^2}{8(x^2 + y^2)^{(1-n)/2}} \quad \text{d'où} \quad \tilde{p}_2(x, y) = -\frac{(n+1)^2 v_n^2}{8x^{(1-n)}}_{y \rightarrow 0}$$

Le raccord sur la pression à l'ordre deux permet de préciser son comportement lorsque $y \rightarrow 0$:

$$p(x, y) = -\frac{1}{2}x^{2n} + \varepsilon^2 \left[-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 v_n x^{3(n-1)/2} Y - \frac{n}{2} x^{2(n-1)} Y^2 + \tilde{p}_2(x, y) \right] + o(\varepsilon^2)$$

A partir de l'équation (4) et du raccord de la pression à l'ordre deux, on déduit le comportement de P_2 lorsque $Y \rightarrow \infty$:

$$P_2(x, Y \rightarrow \infty) = -\frac{(n+1)^2}{4} v_n x^{3(n-1)/2} Y - \frac{n}{2} x^{2(n-1)} Y^2 - \frac{(n+1)^2}{8} x^{(n-1)} v_n^2$$

2.4. Solution de l'écoulement potentiel à l'ordre 1/Re

Les résultats précédents permettent d'écrire la solution de l'écoulement extérieur à l'ordre ε^2 :

$$\begin{aligned} v_x &= \rho^n \cos(n\theta) + \varepsilon \frac{(n+1)}{2} v_n \sin\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2} + o(\varepsilon^2) \\ v_y &= -\rho^n \sin(n\theta) - \varepsilon \frac{(n+1)}{2} v_n \cos\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2} + o(\varepsilon^2) \\ p &= -\frac{1}{2}\rho^{2n} - \varepsilon \frac{(n+1)}{2} v_n \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \rho^{(3n-1)/2} - \varepsilon^2 \frac{(n+1)^2}{8} v_n^2 \rho^{n-1} + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

2.5. Résolution du problème de couche limite à l'ordre deux

Les raccords asymptotiques pour les vitesses longitudinale et transversale donnent :

$$\begin{aligned} U_2(x, Y) &= -\frac{(n-1)}{2x} \left[\frac{(n+1)}{2x^{(1-n)/2}} v_n Y + \frac{n}{x^{(1-n)}} Y^2 \right] \\ V_2(x, Y) &= \frac{(n-1)}{2x^{(3+n)/2}} \left[\frac{(n+1)(n-3)}{8x^{(1-n)}} v_n Y^2 + \frac{n(n-2)}{3x^{3(1-n)/2}} Y^3 \right] + \tilde{v}_3(x, y)_{y \rightarrow 0} \end{aligned}$$

La pression $P_2(x, Y)$ dans la couche limite à l'ordre deux est déterminée à partir de (2) et du comportement de $P_2(x, Y)$ quand $Y \rightarrow \infty$ et indépendamment des vitesses U_2 et V_2 :

$$\begin{aligned} P_2(x, Y) &= x^{(n-1)} \left[n(1 - f'(\eta)) - \frac{(n-1)}{2} \eta f''(\eta) - \frac{n+1}{4} f^2(\eta) - \frac{n^2-1}{4} \eta f(\eta) f'(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)}{2} \int_{\infty}^{\eta} \xi (f'^2(\xi) - 1) d\xi + \frac{n(n-1)}{4} \eta^2 - \frac{n^2-1}{8} v_n^2 \right] \end{aligned}$$

La recherche de solutions semblables pour le système (3), (4) conduit à :

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{\log x}{x} \bar{U}_{21}(\eta) + \frac{1}{x} \bar{U}_2(\eta) + \sum_k x^{sk} \bar{U}_{2k}(\eta) \\ V_2 &= \frac{\log x}{x^{(n+3)/2}} \bar{V}_{21}(\eta) + \frac{1}{x^{(n+3)/2}} \bar{V}_2(\eta) + \sum_k x^{sk-(n+1)/2} \bar{V}_{2k}(\eta) \end{aligned}$$

La résolution du problème de couche limite au second ordre conduit, après avoir posé :

$$\begin{aligned}\bar{U}_{21}(\eta) &= f'_{21}(\eta), & \bar{U}_2(\eta) &= f'_2(\eta), & \bar{U}_{2k}(\eta) &= f'_{2k}(\eta) \\ \bar{V}_{21}(\eta) &= \frac{n+1}{2} f_{21}(\eta) - \frac{n-1}{2} \eta f'_{21}(\eta), & \bar{V}_2(\eta) &= \frac{n+1}{2} f_2(\eta) - \frac{n-1}{2} \eta f'_2(\eta) - f_{21}(\eta) \\ \bar{V}_{2k}(\eta) &= \left(\frac{n-1}{2} - s_k \right) f_{2k}(\eta) - \frac{n-1}{2} \eta f'_{2k}(\eta)\end{aligned}$$

à la résolution des équations différentielles (5), (6), (7) suivantes :

$$f'''_{21}(\eta) + \frac{n+1}{2} f(\eta) f''_{21}(\eta) - (n-1) f'(\eta) f'_{21}(\eta) - \frac{n+1}{2} f''(\eta) f_{21}(\eta) = 0 \quad (5)$$

avec les conditions aux limites : $f_{21}(\eta=0) = 0$, $f'_{21}(\eta=0) = 0$, $f'_{21}(\eta \rightarrow \infty) = 0$.

$f_{21}(\eta)$ est normalisée en posant $f'_{21}(\eta=0) = 1$.

L'équation (6) :

$$\begin{aligned}f'''_2(\eta) + \frac{n+1}{2} f(\eta) f''_2(\eta) - (n-1) f'(\eta) f'_2(\eta) - \frac{n+1}{2} f''(\eta) f_2(\eta) \\ = S(\eta) - C_1 (f'(\eta) f'_{21}(\eta) - f''(\eta) f_{21}(\eta))\end{aligned} \quad (6)$$

doit satisfaire les conditions aux limites :

$$f_2(\eta=0) = 0, \quad f'_2(\eta=0) = 0, \quad f'_2(\eta \rightarrow \infty) = -\frac{n-1}{2} \left(\frac{n+1}{2} v_n \eta + n \eta^2 \right)$$

La fonction $S(\eta)$ intervenant au second membre provient de la somme des termes $-\partial_x P_2$ et $\partial_{xx} U_0$.

Les équations (7) :

$$f'''_{2k}(\eta) + \frac{n+1}{2} f(\eta) f''_{2k}(\eta) - (s_k + n) f'(\eta) f'_{2k}(\eta) + \left(s_k - \frac{n-1}{2} \right) f''(\eta) f_{2k}(\eta) = 0 \quad (7)$$

doivent satisfaire les conditions aux limites : $f_{2k}(\eta=0) = 0$, $f'_{2k}(\eta=0) = 0$, $f'_{2k}(\eta \rightarrow \infty) = 0$ et s_k ($s_k \neq -1$) est la k ème valeur propre de (7).

On note que la solution $f_{21}(\eta) = 0$ ne convient pas [3] puisqu'elle conduit, pour $f_2(\eta)$ à une décroissance en $1/\eta$ pour η grand et donc à une solution physiquement inacceptable pour le vecteur tourbillon qui doit être identiquement nul en sortie de couche limite [9], ce qui nécessite une décroissance exponentielle. Libby et Fox [9] discutent, pour le problème de couche limite de Blasius, de la sélection des valeurs propres de (7) de telle sorte que le comportement de $f'_{2k}(\eta)$ quand $\eta \rightarrow \infty$ soit exponentiellement petit.

Si $f'_{21}(\eta \rightarrow \infty) = \text{TST}$ alors la solution de l'équation (6), du fait du second membre, ne peut conduire à une décroissance exponentielle pour n'importe quelle valeur de C_1 .

Pour le problème de Blasius, $s_1 = -1$ étant valeur propre de (7), la décroissance exponentielle de $f_{21}(\eta) = C_1 (f(\eta) - \eta f'(\eta))$ est satisfaite. On peut alors évaluer la constante C_1 numériquement de telle sorte que la décroissance exponentielle de $f_2(\eta)$ quand η est grand soit assurée.

Dans ces conditions, il est inutile de prendre en compte les autres valeurs propres pour la solution à cet ordre.

Pour le problème de Falkner–Skan, -1 n'étant pas valeur propre discrète de l'équation (7), $f_{21}(\eta)$ décroît algébriquement quand $\eta \rightarrow \infty$. Une décroissance exponentielle du tourbillon ne peut donc être assurée pour une incidence non nulle. Cela suggère que la recherche de solutions semblables pour l'écoulement sur plaque avec incidence est incompatible avec la prise en compte des effets non parallèles à cet ordre. Par conséquent, seule une solution pour la pression à l'ordre deux est établie pour une incidence quelconque.

2.6. Approximations uniformément valables

A l'ordre ε , l'approximation uniformément valable (8) dans tout le domaine s'écrit sous la forme de la superposition des solutions des problèmes de couche limite et d'écoulement potentiel à laquelle on retranche

le raccord asymptotique au même ordre :

$$\begin{aligned} v_{xuv_1} &= U_0(x, Y) + \tilde{u}_0(x, y) - \tilde{u}_0(x, 0) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) \\ v_{yuv_1} &= \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon [\tilde{v}_1(x, y) + V_0(x, Y) - \tilde{v}_1(x, 0) + nx^{n-1}Y] \\ p_{uv_1} &= \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) \end{aligned}$$

Cette approximation correspond à une solution composite au sens asymptotique dans les zones visqueuse et potentielle. Cette solution est également une approximation asymptotique à l'ordre ε , du système (9) appelé système d'équations uniformément valables :

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0, \quad v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x = -\partial_x p + \varepsilon^2 \partial_{yy}^2 v_x, \quad v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y = -\partial_y p$$

Pour l'écoulement sur plaque sans incidence, la solution uniformément valable (10) à l'ordre ε^2 dans tout le domaine s'écrit :

$$\begin{aligned} v_{xuv_2} &= U_0(x, Y) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) + \varepsilon^2 \frac{\log x}{x} f'_{21}(\eta) + \varepsilon^2 \frac{1}{x} \left[f'_2(\eta) - \frac{1}{4} v_0 \eta \right] \\ v_{yuv_2} &= \varepsilon [V_0(x, Y) - \tilde{v}_1(x, 0)] + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y) \\ p_{uv_2} &= \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) + \varepsilon^2 \left[\tilde{p}_2(x, y) + P_2(x, Y) - \tilde{p}_2(x, 0) + \frac{1}{4} x^{-3/2} v_0 Y \right] \end{aligned}$$

Cette solution est également une approximation asymptotique à l'ordre ε^2 , du système pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x v_x + \partial_y v_y &= 0, \quad v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x = -\partial_x p + \varepsilon^2 (\partial_{yy}^2 v_x + \partial_{xx}^2 v_x) \\ v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y &= -\partial_y p + \varepsilon^2 \partial_{yy}^2 v_y \end{aligned}$$

Une pression uniformément valable à l'ordre ε^2 peut néanmoins être obtenue quelque soit l'incidence :

$$p_{uv_2} = \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) + \varepsilon^2 \left[\tilde{p}_2(x, y) + P_2(x, Y) - \tilde{p}_2(x, 0) + \frac{(n+1)^2}{4} x^{3(n-1)/2} v_n Y + \frac{n}{2} x^{2(n-1)} Y^2 \right]$$

On remarque que dans le cas de l'écoulement de Hiemenz ($n = 1$), la solution de couche limite est bien solution uniformément valable à l'ordre ε^2 pour les composantes de la vitesse.

Certains auteurs qualifient alors les coordonnées cartésiennes d'optimales pour ce problème puisque le développement extérieur n'apporte aucune contribution supplémentaire à la solution uniformément valable [3,5].

3. Résultats

On se propose de comparer la solution uniformément valable avec celle de la couche limite classique et de la solution potentielle. Les vitesses longitudinale et transversale sont respectivement normalisées à partir des quantités $\mu_0(x)$ et $-(n+1)\varepsilon v_n / (2x^{(1-n)/2})$.

Naturellement, plus le nombre de Reynolds est élevé, respectivement 10^4 et 10^5 , meilleure est la comparaison au voisinage de la paroi entre la solution de couche limite et la solution uniformément valable (Fig. 1). On constate que cette dernière solution retourne continûment vers la solution potentielle lorsque la variable Y est suffisamment grande. Deux autres possibilités de définition d'une épaisseur de couche limite apparaissent : soit à partir d'un écart de plus de 1% entre les solutions de couche limite et uniformément valable, soit à partir d'un écart de moins de 1% entre cette dernière et la solution potentielle. Pour l'écoulement sur plaque plane sans incidence et pour Y grand, la vitesse transversale tend vers zéro d'autant moins vite que le nombre de Reynolds est élevé (Fig. 2).

Pour l'écoulement sur plaque plane avec incidence, on illustre la solution établie à l'ordre un pour un nombre de Reynolds plus modéré $Re = 10^2$ et $\varphi = -15^\circ$ en une abscisse $x = 1$ sur la Fig. 3.

Dans le cas sans incidence (Fig. 4), on compare les solutions uniformément valables aux ordres un et deux et on note la décroissance de la solution à l'ordre deux lorsque Y tend vers l'infini.

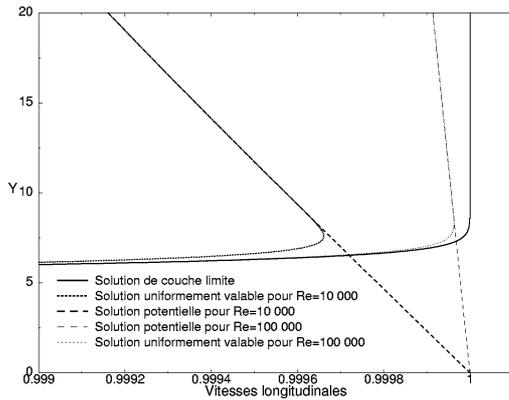


Figure 1. Vitesses longitudinales normalisées en fonction de Y pour $\varphi = 0^\circ$ en $x = 1$ et pour : $Re = 10^4, Re = 10^5$.

Figure 1. Normalized longitudinal velocities vs. Y for $\varphi = 0^\circ$ at $x = 1$ and for: $Re = 10^4, Re = 10^5$.

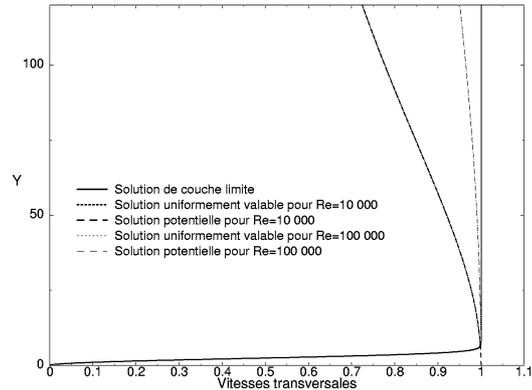


Figure 2. Vitesses transversales normalisées en fonction de Y pour $\varphi = 0^\circ$ en $x = 1$ et pour : $Re = 10^4, Re = 10^5$.

Figure 2. Normalized transverse velocities vs. Y for $\varphi = 0^\circ$ at $x = 1$ and for: $Re = 10^4, Re = 10^5$.

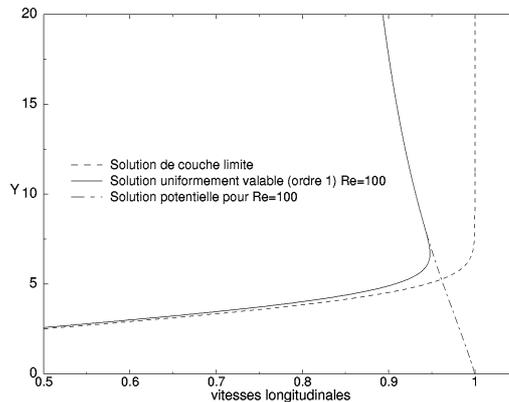


Figure 3. Vitesses longitudinales normalisées en fonction de Y pour $\varphi = -15^\circ$ en $x = 1$ et pour $Re = 10^2$.

Figure 3. Normalized longitudinal velocities vs. Y for $\varphi = -15^\circ$ at $x = 1$ and for $Re = 10^2$.

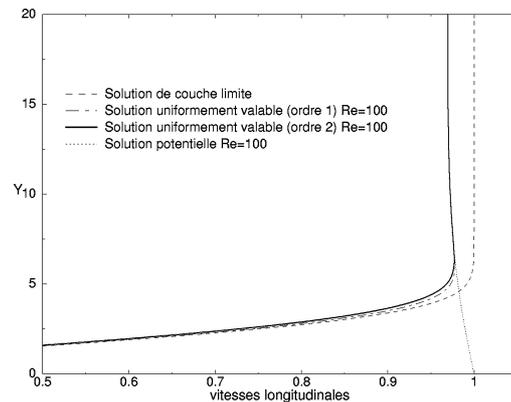


Figure 4. Vitesses longitudinales normalisées en fonction de Y pour $\varphi = 0^\circ$ en $x = 1$ et pour $Re = 10^2$.

Figure 4. Normalized longitudinal velocities vs. Y for $\varphi = 0^\circ$ at $x = 1$ and for $Re = 10^2$.

La Fig. 5 illustre la nécessité de prendre en compte le gradient de pression transversal $(\partial_y p)_{uv_2}$ par comparaison avec le gradient de pression longitudinal pour diverses incidences. Sur la Fig. 6, l'importance du gradient de pression transversal près du bord d'attaque est mise en évidence et ceci d'autant plus que l'incidence augmente en valeur absolue.

4. Conclusions et perspectives

Une solution uniformément valable du problème d'écoulement sur plaque plane en incidence est établie. La prise en compte de cette solution peut avoir, entre autre, des effets non négligeables dès lors que l'on se rapproche du bord d'attaque. On se propose d'étudier ultérieurement l'influence de cette solution sur les résultats de stabilité modale et non modale et de mettre en évidence son effet sur les perturbations optimales [8].

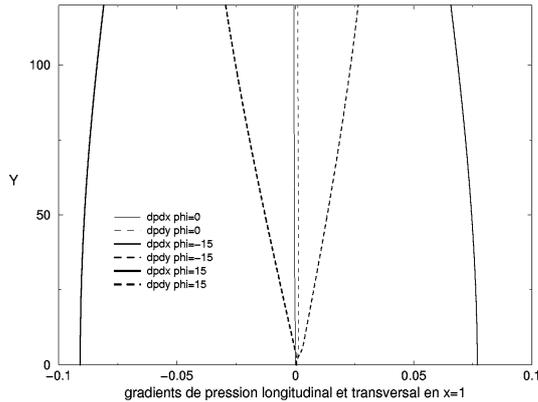


Figure 5. Gradients de pression longitudinal et transversal en fonction de Y pour $x = 1$ et $Re = 10^5$ et $\varphi = -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ$. — gradient de pression longitudinal ; - - - gradient de pression transversal.

Figure 5. Longitudinal and transverse pressure gradients vs. Y at $x = 1$ and $Re = 10^5$ and $\varphi = -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ$. — longitudinal pressure gradient; - - - transverse pressure gradient.

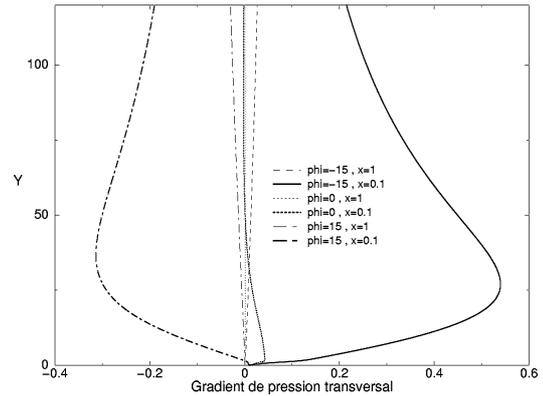


Figure 6. Gradient de pression transversal en fonction de Y pour $x = 0.1$ et $x = 1$ pour $Re = 10^5$ et $\varphi = -15^\circ, \varphi = 0^\circ, \varphi = 15^\circ$.

Figure 6. Transverse pressure gradient vs. Y at $x = 0.1$ and $x = 1$ for $Re = 10^5$ and $\varphi = -15^\circ, \varphi = 0^\circ, \varphi = 15^\circ$.

Références bibliographiques

- [1] L. Prandtl, Verh. Int. Kongr., 3rd, Hedelberg, 1904, pp. 484–491, Transl. NACA MEMO, n° 452, 1928.
- [2] J. Mauss, Analyse asymptotique singulière, in : Lecture Note in Advance Fluid Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] M. Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, in : Appl. Math. Mech., Academic Press, New York, 1964.
- [4] J. Cousteix, J. Mauss, J.P. Brazier, Approximations des équations de Navier–Stokes à grand nombre de Reynolds, Rapport Technique n°RT 4/03413 DMAE, 2001.
- [5] S. Kaplun, The role of coordinate systems in boundary-layer theory, Z. Angew. Math. Phys. 5 (1954) 111–135.
- [6] P.G. Drazin, W.H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [7] P.J. Schmid, D.S. Henningson, Stability and Transition in Shear Flows, in : Appl. Math. Sci., Vol. 142, Springer, 2001.
- [8] P. Luchini, Reynolds-number-independant instability of the boundary layer over a flat surface: Optimal perturbations, J. Fluid Mech. 404 (2000) 289–309.
- [9] P.A. Libby, H. Fox, Some perturbations solutions in laminar boundary-layer theory. Part 1, J. Fluid Mech. 17 (1963) 433–449.