C. R. Mecanique 330 (2002) 623–626

Méthode d'homogénéisation auto-cohérente en calcul à la rupture

Sylvain Turgeman, Benaceur Guessab

Laboratoire sols, solides, structures (UMR 5521), domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

Reçu le 3 avril 2002 ; accepté après révision le 16 juillet 2002

Note présentée par Jean Salençon.

Résumé On s'intéresse au problème de la détermination du domaine de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire. On utilise le concept d'auto-cohérence en considérant un matériau de comparaison qui soit de la même nature que les constituants du matériau hétérogène, c'est-à-dire non linéaire. On déduit que les estimations du domaine de résistance recherché sont les solutions d'équations d'auto-cohérence et l'on précise le processus de leur obtention. ***Pour citer cet article : S. Turgeman, B. Guessab, C. R. Mecanique 330 (2002) 623–626.***

rhéologie / calcul à la rupture / modèle auto-cohérent / homogénéisation / matériaux hétérogènes

Self-consistent homogeneization method in yield design

Abstract This work is aimed towards determining the macroscopic strength criterion of a heterogeneous material with a random microstructure. We use the self-consistent concept by considering a reference material, which is of same nature as the constituents of the heterogeneous material. We deduce that the estimates of the macroscopic strength domain are the solutions to self-consistent equations and we give their derivation procedure. ***To cite this article: S. Turgeman, B. Guessab, C. R. Mecanique 330 (2002) 623–626.***

rheology / yield design / self-consistent model / homogeneization / heterogeneous materials

1. Introduction

On considère, dans le cadre théorique du calcul à la rupture [1], le problème de la détermination du domaine de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire. L'hypothèse de la périodicité permet d'élaborer une théorie bien fondée, capable d'intégrer toutes les informations microstructurales disponibles [2–4]. Dans le cas où la microstructure est aléatoire, la complexité du problème est toute autre et se traduit par des méthodes de résolution multiples, généralement basées sur une extension du modèle auto-cohérent en élasticité (la bibliographie étant très conséquente, nous renvoyons à [5,6] pour une présentation exhaustive). La méthode développée ici, basée également sur l'idée d'auto-

Adresse e-mail : sylvain.turgeman@hmg.inpg.fr (S. Turgeman).

S1631-0721(02)01508-5/FLA

cohérence, se caractérise (comme dans [7] pour le cas de matériaux poreux) par l'utilisation d'un milieu de comparaison qui est directement non linéaire.

2. Caractérisation du domaine de résistance macroscopique G_h

On considère un matériau hétérogène M occupant un volume représentatif Ω_M, constitué de r phases de domaines de résistance G_j $(j = 1, \ldots, r)$, pouvant être caractérisé macroscopiquement par un domaine de résistance G_h que l'on cherche à déterminer. On note C_R l'ensemble des convexes fermés de $\mathbb{R}^9_S$ contenant 0 et inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon R. On suppose pour simplifier que $\xi G (= \{G_j,\ j = 1, \ldots, r\}) \subset C_R$.

Soit $\omega(c)$ un petit volume (sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre c et de diamètre constant δ_ω par exemple, δ_ω de l'ordre de la dimension d'une ou de quelques hétérogénéités de M). On suppose que la microstructure observée dans $\omega(c)$ quand c parcourt Ω_M appartient à un ensemble fini ξm de p microstructures m_k, auxquelles on attribue des coefficients de pondération ρ_k $(k = 1, \ldots, p)$. On réalise des échantillons E de volume Ω en plongeant dans un matériau homogène $M(G_0)$ (la matrice), de domaine de résistance $G_0 \in C_R$, N inclusions. Ces inclusions de même volume ω, sont centrées en des points c_j $(j = 1, \ldots, N)$ de Ω et on note :

$$\delta(E) = \min\bigl(2\|x - c_j\|, \|c_j - c_k\|,\ x \in \partial\Omega,\ j = 1, \ldots, N,\ k = 1, \ldots, N,\ j \neq k\bigr)\ (\geqslant \delta_\omega) \tag{1}$$

Les échantillons E constituent un ensemble ξE. Le volume Ω, le nombre N d'inclusions de volume total $\omega' = N\omega$ et leur positionnement dans Ω sont variables d'un élément E à un autre. On considère les deux cas suivants :

1$^{\text{er}}$ *cas* : les inclusions sont constituées du matériau homogène $M(G_h)$ de domaine de résistance G_h ; le domaine de résistance en un point x de l'échantillon E (noté alors E_h) est $\varphi(x) = G_h$ si x se situe dans une inclusion, $\phi(x) = G_0$ sinon.

2$^{\text{e}}$ *cas* : les inclusions sont hétérogènes, la microstructure de chacune d'elles étant dans ξm, le nombre de microstructures identiques à m_k étant proportionnel à ρ_k $(k = 1, \ldots, p)$; le domaine de résistance en un point x d'un échantillon E est noté encore $\varphi(x)$ et on a $\varphi(x) \in \xi G \cup \{G_0\}$.

On détermine les ensembles $K_\sigma(E)$ et $K_v(E)$ constitués de chargements dits cohérents, c'est-à-dire résultant de champs de contraintes σ et de vitesses de déformation d (dérivant de champs de vitesses de déplacement v) « cohérents » (la moyenne de ces champs dans le volume occupé par les inclusions est égale à celle dans le volume occupé par la matrice cf. (2a), (3a)) :

$$K_\sigma(E) = \bigl\{S \in \mathbb{R}^9_S \mid \exists\sigma \text{ sur } \Omega;\ \operatorname{div}\sigma = 0;\ \sigma(x)\cdot n(x) = S\cdot n(x)\ \forall x \in \partial\Omega; \tag{2}$$

$$\langle\sigma\rangle_{\omega'} = S \text{ (2a)},\ \sigma(x) \in \varphi(x)\ \forall x \in \Omega\bigr\}$$

$$K_v(E) = \bigl\{S \in \mathbb{R}^9_S \mid \forall D \in \mathbb{R}^9_S,\ \|D\| = 1,\ S\cdot D \leqslant \min\bigl(\bigl\langle \Pi\bigl(x, d(x)\bigr)\bigr\rangle_\Omega,\ d \in U_D\bigr)\bigr\} \tag{3}$$

avec $n(x)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x, $\Pi(x, d(x)) = \max(\sigma\cdot d(x), \sigma \in \varphi(x))$ et $U_D = \{d \mid \langle d\rangle_{\omega'} = D$ (3a) ; $v = D\cdot x,\ \forall x \in \partial\Omega\}$.

Les chargements de $K_\sigma(E)$ sont inclus dans l'ensemble des chargements potentiellement supportables (P.S.) de E soumis à sa frontière à une sollicitation uniforme en contrainte $S\cdot n(x)$; les chargements de $K_v(E)$ contiennent les chargements P.S. de E soumis à sa frontière à une sollicitation linéaire en vitesse de déplacement.

L'intérêt de considérer ces chargements cohérents est que l'on peut alors, lorsque l'on utilise les échantillons E_h, obtenir des conditions suffisantes pour situer G_0 par rapport à G_h : ainsi, on montre que s'il existe $\delta_0 \geqslant \delta_\omega$ tel que $K_\sigma(E_h) \supset G_0$ pour E_h tel que $\delta(E_h) = \delta_0$ alors $G_0 \subset G_h$; s'il existe $\delta_0 \geqslant \delta_\omega$ tel que $K_v(E_h) \subset G_0$ pour E_h tel que $\delta(E_h) = \delta_0$ alors $G_0 \supset G_h$. Cependant $K_\sigma(E_h)$ et $K_v(E_h)$ ne sont pas accessibles (G_h étant inconnu), contrairement à $K_\sigma(E)$ et $K_v(E)$. Ceci nous conduit à substituer dans les conditions suffisantes précédentes E_h par E et à examiner le domaine de validité des propriétés $P_\sigma(\delta_0)$ et $P_v(\delta_0)$ qui en résultent :

$$P_\sigma(\delta_0):\big(\exists\delta_0 \geqslant \delta_\omega \mid K_\sigma(E) \supset G_0\ \forall E \text{ tel que } \delta(E)=\delta_0\big) \ \Rightarrow\ G_0 \subset G_h \tag{4}$$

$$P_v(\delta_0):\big(\exists\delta_0 \geqslant \delta_\omega \mid K_v(E) \subset G_0\ \forall E \text{ tel que } \delta(E)=\delta_0\big) \ \Rightarrow\ G_0 \supset G_h \tag{5}$$

On montre que les propriétés $P_\sigma(\delta_0)$ et $P_v(\delta_0)$ sont vraies pour $\delta_0=\delta_\omega$; qu'elles sont vraies pour δ_0 si elles sont vraies pour $\delta_0' \geqslant \delta_0$ et qu'elles sont donc vraies sur un intervalle $[\delta_\omega,\delta_i]$. La borne supérieure δ_i pourrait être approchée si l'on disposait d'une définition opératoire de G_h. Inversement, fixer δ_i revient à situer G_h : c'est le problème que l'on cherche à résoudre dans Section 3.

3. Bornes auto-cohérentes de G_h

On considère dans ξE la relation d'équivalence $\perp$ suivante : deux éléments E_1 et E_2 de ξE sont équivalents si leur matrice est constituée du même matériau $M(G_0)$ et si $\delta(E_1)=\delta(E_2)$. On note $(G_0, {}^\bullet\delta_0)$ les éléments de $\xi E/\perp$ et on détermine des approches $K_S(G_0,\delta_0)$ de $K_\sigma(E)$ et $K_C(G_0,\delta_0)$ de $K_v(E)$, ne dépendant que de la classe d'équivalence de E. A cet effet on forme p systèmes mécaniques B_k $(k=1,\dots,p)$ de même volume V homothétique de ω (homothétie de centre celui de ω et de rapport $\delta_0/\delta_\omega \geqslant 1$). Le matériau constitutif de B_k est $M(G_0)$ dans $V'=V\backslash\omega$, conforme à la microstructure m_k dans ω $(k=1,\dots,p)$.

On note $\Psi_k(x)$ le domaine de résistance au point $x\in V$ du système B_k et $\Pi_k(d(x))=\max(\sigma\cdot d(x), \sigma\in\Psi_k(x))$.

On définit les convexes :

$$K_S(G_0,\delta_0)=\Bigg\{S\in\mathbb{R}^9_S \mid \big(\exists\sigma_k \text{ sur } V, \operatorname{div}\sigma_k=0, \sigma_k(x)\cdot n(x)=S\cdot n(x)\ \forall x\in\partial V,$$
$$\sigma_k(x)\in\Psi_k(x)\ \forall x\in V\big)\ (k=1,\dots,p) \text{ et } \sum_{k=1}^{p}\rho_k\langle\sigma_k\rangle_\omega=S\Bigg\} \tag{6}$$

$$K_C(G_0,\delta_0)=\Bigg\{S\in\mathbb{R}^9_S \mid \forall D\in\mathbb{R}^9_S,\ \|D\|=1,$$
$$S\cdot D\leqslant \min\left[\max\left(\sum_{k=1}^{p}\rho_k\big\langle\Pi_k\big(d_k(x)\big)\big\rangle_V, \Pi_G(D)\right),\ (d_k)_{k=1,\dots,p}\in U_D^p\right]\Bigg\} \tag{7}$$

avec

$$U_D^p=\Bigg\{(d_k \text{ dérivant de } v_k \text{ sur } V)_{k=1,\dots,p};\ v_k(x)=D\cdot x \text{ sur } \partial V\ (\forall k=1,\dots,p) \text{ et } \sum_{k=1}^{p}\rho_k\langle d_k\rangle_\omega=D\Bigg\}$$

Ces convexes sont tels que :

$$\forall E\in\big(G_0,{}^\bullet\delta_0\big),\qquad K_S(G_0,\delta_0)\subset K_\sigma(E)\quad\text{et}\quad K_v(E)\subset K_C(G_0,\delta_0)$$

On résout les équations d'auto-cohérence suivantes pour δ_0 fixé ($\geqslant\delta_\omega$) :

$$K_S(G_0,\delta_0)=G_0\quad\text{(8a)},\qquad K_C(G_0,\delta_0)=G_0\quad\text{(8b)} \tag{8}$$

On montre que (8a) admet une solution $G_S^+(\delta_0)\in C_R$ qui contient toutes les autres et qui est la limite de la suite $(\widetilde{G}_i(\delta_0))_{i\in\mathbb{N}}$ avec $\widetilde{G}_0(\delta_0)=G_u$ (G_u : union convexe des éléments de ξG) ; $\widetilde{G}_{i+1}(\delta_0)=K_S(\widetilde{G}_i(\delta_0),$

$\delta_0)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. De même, (8b) admet une solution $G_C^-(\delta_0) \in C_R$ contenue dans toutes les autres et qui est la limite de la suite $(\widetilde{G}'_i(\delta_0))_{i\in\mathbb{N}}$ avec $\widetilde{G}'_0(\delta_0) = \{0\}$; $\widetilde{G}'_{i+1}(\delta_0) = K_C(\widetilde{G}'_i(\delta_0), \delta_0)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. On a de plus $G_S^+(\delta_\omega)$ et $G_C^-(\delta_\omega)$ égales aux bornes de Reuss et Voigt généralisées et :

$$\forall \delta_1 \geqslant \delta_2 : G_S^+(\delta_1) \supset G_S^+(\delta_2), \qquad G_C^-(\delta_1) \subset G_C^-(\delta_2) \tag{9}$$

Il s'ensuit : $\forall G_0$ tel que $G_0 = K_S(G_0, \delta_0)$ on a $G_0 \subset K_\sigma(E)$, $\forall E \in (G_0, {}^\bullet\delta_0)$ d'où $G_0 \subset G_h$ si $\delta_0 \leqslant \delta_i$ (cf. (4)) ; par conséquent $G_S^+(\delta_0) \subset G_h$, $\forall \delta_0 \in [\delta_\omega, \delta_i]$.

De même, $\forall G_0$ tel que $G_0 = K_C(G_0, \delta_0)$ on a $G_0 \supset K_v(E)$, $\forall E \in (G_0, {}^\bullet\delta_0)$ d'où $G_0 \supset G_h$ si $\delta_0 \leqslant \delta_i$ (cf. (5)) ; par conséquent $G_C^-(\delta_0) \supset G_h$, $\forall \delta_0 \in [\delta_\omega, \delta_i]$.

On obtient donc les bornes auto-cohérentes rigoureuses de G_h suivantes : $G_S^+(\delta_0) \subset G_h \subset G_C^-(\delta_0)$ pour tout $\delta_0 \in [\delta_\omega, \delta_i]$ (les meilleures bornes correspondent à $\delta_0 = \delta_i$) ainsi qu'un majorant de δ_i : $\delta_i \leqslant \delta_h$, δ_h étant la plus grande valeur de δ_0 telle que $G_S^+(\delta_0) \subset G_C^-(\delta_0)$.

4. Conjecture et conclusion

Les estimations de G_h dépendent de la valeur de δ_i. On conjecture que δ_i varie de manière monotone entre sa valeur minimale δ_ω et le majorant δ_h en fonction des informations microstructurales utilisées pour représenter le matériau hétérogène M. Ainsi dans le cas où M est caractérisé par une information minimale (limitée aux domaines de résistance et aux fractions volumiques des matériaux constitutifs de M) on pose $\delta_i = \delta_\omega$. La méthode proposée fournit alors les bornes de Reuss G_R et de Voigt G_V. Ainsi pour un milieu poreux caractérisé exclusivement par les domaines de résistance $(G_1 \neq \{0\}, G_2 = \{0\})$ et les fractions volumiques de ses phases, on obtient que $G_S^+(\delta) = G_2 (= G_R)$, $\forall \delta \geqslant \delta_\omega$, $G_C^-(\delta_\omega) = G_V$, $G_C^-(\delta) = G_2$, $\forall \delta \geqslant \delta_\omega$.

Il s'ensuit que δ_h est infini et fixer δ_i à une valeur strictement positive conduirait à $G_h = G_R$. La résolution des équations d'auto-cohérence dans un cas moins grossier, nécessaire pour analyser la conjecture sur la position de δ_i, passe par le développement de programmes numériques, en cours de réalisation.

Références bibliographiques

[1] J. Salençon, Calcul à la rupture et analyse limite, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

[2] P. de Buhan, J. Salençon, Determination of a macroscopic yield criterion for a multilayered material, C.N.R.S., Coll. on Failure criteria for structural media, Grenoble, 1983.

[3] P. Suquet, Analyse limite et homogénéisation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1983) 1355–1358.

[4] P. de Buhan, Critère de rupture macroscopique d'un matériau renforcé par des armatures, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 296 (1985) 933–936.

[5] M. Bornert, P. Suquet, Propriétés non linéaires des composites : Approches par les potentiels, in : M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini (Eds.), Homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Vol. 2, Hermes Science, Paris, 2001.

[6] A. Zaoui, Plasticité : Approches en champ moyen, in : M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini (Eds.), Homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Vol. 2, Hermes Science, Paris, 2001.

[7] J.B. Leblond, G. Perrin, A self-consistent approach to coalescence of cavities in inhomogeneously voided ductile solids, J. Mech. Phys. Solids 47 (1999) 1823–1841.