

Singularités de la rhéologie de l'air humide saturé et diffusion moléculaire dans les milieux nuageux

Pierre-Antoine Bois

Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441, UFR de mathématiques, Bât. M3, U.S.T.L., 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 10 juin 2002 ; accepté le 25 juin 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé

Sous des hypothèses réalistes, on propose un formalisme thermodynamique fournissant pour l'air humide saturé (milieux nuageux) une loi de Fick généralisée qui conduit à une rhéologie double diffusive avec effet Dufour. On compare les équations à celles que l'on obtient pour l'air humide non saturé (l'effet Dufour disparaît dans ce dernier cas et l'effet double diffusif devient négligeable également si l'on se trouve en modélisation Boussinesq). On montre sur l'exemple de la convection nuageuse quelques conséquences de cette diffusion. *Pour citer cet article : P.A. Bois, C. R. Mecanique 330 (2002) 627–632.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / rhéologie / fluides complexes / air humide / air nuageux / double diffusion

Singularities in the rheology of saturated humid air, and molecular diffusion in clouds

Abstract

Under realistic assumptions, we propose a thermodynamical formalism providing, for the moist-saturated air (cloudy air), a generalized Fick's law. This Fick's law leads to a double diffusive rheology with Dufour effect. The form taken by the energy equation is slightly different from the classical form used in convection problems. We compare the equations with those of the convection in moist unsaturated air (the Dufour effect and all double diffusive effects disappear in this case). As application we demonstrate some consequences of this diffusion in cloudy convection. *To cite this article: P.A. Bois, C. R. Mecanique 330 (2002) 627–632.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / rheology / heterogeneous fluids / moist air / cloudy air / double diffusion

Abridged English version

Atmospheric convection is mainly due to the diffusion of water vapor in the air. In saturated-moist air (cloudy air), which is a ternary mixture and an aerosol, different laws of diffusion are currently used in the literature [1–4] with empirical justifications. These various laws do not lead to the same practical phenomena: in particular, Bretherton [1] does not find double diffusion in cloudy convection, while Bois and Kubicki [5,6], using a molecular diffusion law suggested by Deardorff [3] and Bougeault [4], exhibit double diffusive phenomena with Dufour effect. The justification of Bougeault's paper is the neglecting of the diffusion velocity of the liquid phase.

Adresse e-mail : pbois@pop.univ-lille1.fr (P.-A. Bois).

In the present paper, we first deduce from the saturation relation, a relation $\rho = \rho(q_v, T)$ between density, concentration of water vapor and temperature: relation (5) for arbitrary equations of state, and relation (14) in the realistic case of polytropic gases. Then, rheology and thermodynamical principles are used to construct an available form of the dissipation (relation (8)). By applying the Onsager hypothesis, we get a generalized Fick's law (9) for the molecular diffusion. The associated Fourier law (10) for the heat diffusion exhibits a Dufour effect. For weak concentration of total water in the medium, approximated forms of these laws are written: the equation of molecular diffusion takes the same forms as the Fick's law used by Bougeault, and exhibits a linear behaviour with respect to the water vapor concentration. A simplified form of the heat diffusion in the energy equation is also derived, the Dufour effect being also proportional to the water vapor concentration. The energy equation with Dufour effect is the same already used in Kubicki and Bois's papers. Note that it is not required to neglect the diffusion of the liquid water to find these equations, the most important assumption being that, despite the saturation, the water concentration in the medium remains weak and its order of magnitude is taken as a small parameter in the equations governing the problem.

The preceding equations are matched with those obtained in the unsaturated case: it is shown that, in the latter case, the Dufour effect disappears. In this case, the Schmidt number and the Prandtl number are almost equal, so that the influence of the double diffusion also disappears.

As application, we demonstrate an original property of a linearized convection problem set using these equations: this problem is that of Rayleigh–Bénard cloudy convection. Contrary to the case of a medium without Dufour effect, the degeneracy of the static instability is an oscillatory régime, while stationary solutions are due to the molecular diffusion.

1. Les lois usuelles de la diffusion moléculaire pour l'air nuageux

La convection atmosphérique est due en grande partie à la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air. Lorsqu'il s'agit d'air clair (mélange « air sec-vapeur d'eau »), le milieu est un mélange inerte de deux gaz et la loi classiquement utilisée pour la diffusion mutuelle des constituants est la loi de Fick. Toutefois, cette loi est trop rudimentaire pour des milieux compressibles, et encore plus s'ils sont non inertes. L'air nuageux (mélange « air sec-vapeur d'eau-eau liquide ») est un mélange ternaire non inerte (il y a des échanges de masse entre les constituants) et un aérosol (l'un des constituants n'est pas un gaz véritable). Les lois de diffusion le concernant sont moins connues et lorsque l'on explore la littérature concernant ce milieu, on constate qu'il n'y a pas accord entre les auteurs. La loi la plus anciennement utilisée est la même loi de diffusion de Fick que pour un mélange inerte. Depuis une vingtaine d'années, des alternatives ont été proposées à cette description afin de prendre en compte les propriétés particulières du milieu (état de saturation, faible densité du gaz devant l'eau liquide, faible concentration d'eau totale etc.). La justification de ces choix, souvent empirique, prend en compte des hypothèses parfois superflues et, de plus, conduit à des écritures non concordantes de l'équation de l'énergie. L'objet de cette Note est, d'abord, de proposer un formalisme justifiant la loi que l'on doit écrire et, ensuite, d'en montrer une conséquence pratique.

Sous des conditions satisfaites dans un nuage non-précipitant, la phase continue équivalente au milieu liquide peut être décrite comme un gaz parfait de constante caractéristique nulle. La diffusion dans le milieu est alors celle d'un mélange de trois gaz, dont deux (la vapeur d'eau et l'eau liquide) sont en échange de masse : cet échange de masse suit la loi de Clausius–Clapeyron. Désignons par q_v, q_L, q_g les concentrations massiques de vapeur d'eau, d'eau liquide et d'air sec, par q_w la concentration d'eau totale : $q_w = q_v + q_L$: plus généralement les indices g, v, L, w concernent l'air sec, la vapeur d'eau, l'eau liquide et l'eau totale. Une relation de saturation $q_v = Q_s(\rho, T)$ est constamment satisfaite. La fonction de saturation $Q_s(\rho, T)$ ne dépend que du matériau (ici : la vapeur d'eau) constituant la phase saturée.

La description cinématique et thermodynamique du milieu est complétée par la donnée d'une loi phénoménologique exprimant les vitesses de diffusion des constituants en fonction des concentrations et, éventuellement, d'autres paramètres intervenant dans la dissipation. Désignons par $\mathbf{v}_v, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_g$ les vitesses

de diffusion de chaque constituant dans le mélange. On a les relations

$$q_v + q_L + q_g = q_g + q_w = 1, \quad \rho_v \mathbf{v}_v + \rho_L \mathbf{v}_L + \rho_g \mathbf{v}_g = 0 \quad (1)$$

Les deux lois usuellement rencontrées dans la littérature sont les suivantes :

(i) Deux milieux sont mélangés et non-interagissants : l'air sec et l'eau totale (liquide + vapeur). On suppose que la diffusion de l'air sec dans le mélange s'opère par une loi de Fick pour un mélange binaire {air + eau}, de sorte que la vitesse de diffusion s'écrit

$$\rho_g \mathbf{v}_g = D \nabla q_w \quad (2)$$

où D est le coefficient de diffusion. Cette loi de diffusion a été utilisée, notamment, par Bretherton [1] pour étudier la condensation et la vaporisation de l'eau entre un nuage et l'air clair environnant. Bretherton constate que, compte tenu que le nombre de Prandtl et le nombre de Schmidt sont à peu près égaux (il les choisit égaux à 1), la double diffusion n'a aucune incidence sur la convection. Cette conclusion rejoint celle de la diffusion de vapeur d'eau en air clair [2].

(ii) Une approximation plus fine est la suivante : compte tenu de la grande inertie des gouttes liquides devant celle des gaz, la vitesse de diffusion de la phase liquide est négligée. En revanche chacun des deux gaz se diffuse dans le mélange gazeux suivant la loi de Fick. Compte tenu de ce que $q_v \ll q_g$ et de ce que $q_g \approx 1$, une expression approchée de cette loi s'écrit

$$\rho_g \mathbf{v}_g = D \nabla q_v \quad (3)$$

La loi de diffusion (3) a été adoptée par Deardorff [3], Bougeault [4] pour l'étude de problèmes de turbulence atmosphérique, puis par Kubicki et Bois [5,6] pour un problème de convection nuageuse. On se propose, dans ce qui suit, d'établir une loi théorique de diffusion dont la loi (3) puisse être, sous certaines conditions, une approximation.

2. Thermodynamique de l'air humide saturé

Avec les notations précédentes et compte tenu que les potentiels chimiques par unité de masse g_L et g_v sont égaux dans le milieu saturé, la formule de Gibbs–Duhem dans le mélange s'écrit

$$de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{\alpha=g,v,L} g_\alpha dq_\alpha = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + (g_g - g_v) dq_g \quad (4)$$

(e , s , énergie interne massique et entropie massique). D'après (4), la thermodynamique du milieu est connue à travers trois variables : $e = e(s, \rho, q_g)$. La formule de Clausius–Clapeyron s'écrit (voir [7]) $dp_v = L_v \rho_v dT/T$, où L_v désigne la chaleur latente de vaporisation de l'eau. Compte tenu d'une part de la loi d'état $p_v = p_v(\rho_v, T)$ pour la vapeur d'eau, et d'autre part de ce que L_v est une fonction connue de T , on peut réécrire cette relation sous forme intégrée

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{G(T)}{G(\Theta_0)} \cdot \frac{q_0}{q_v} = \frac{H(T)}{q_v}, \quad H(T) = \frac{q_0 G(T)}{G(\Theta_0)} \quad (5)$$

où $G(T)$ est une fonction de T seul, connue lorsque l'on connaît la loi d'état $p_v(\rho_v, T)$, les valeurs q_0 , ρ_0 , Θ_0 caractérisant un état de référence du milieu. La relation (5) définit la fonction $Q_s(\rho, T)$.

3. Rhéologie du milieu et loi de diffusion

Le mouvement du milieu est défini par sa vitesse barycentrique \mathbf{u} , elle-même définie à partir des vitesses \mathbf{u}_g , \mathbf{u}_v , \mathbf{u}_L des constituants par la relation

$$\rho \mathbf{u} = \rho_g \mathbf{u}_g + \rho_v \mathbf{u}_v + \rho_L \mathbf{u}_L \quad (6)$$

Ecrivons les lois de conservation et le deuxième principe de la thermodynamique. La loi de bilan des masses pour chaque constituant s'écrit

$$\rho \frac{dq_\alpha}{dt} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \hat{\rho}_\alpha, \quad \alpha = g, v, L \quad (7)$$

où $\hat{\rho}_\alpha$ désigne le taux de supplément de masse volumique reçu par le constituant α .

Une seule des trois lois (7) est une loi de conservation, celle pour laquelle $\alpha = g$. Compte tenu de l'égalité $\hat{\rho}_v + \hat{\rho}_L = 0$, la conservation de la masse dans le mouvement barycentrique du milieu prend la forme classique de l'équation de continuité.

Si l'on se limite à un milieu dans lequel les vitesses de diffusion restent faibles (voir [8] ou [9]), la dissipation dans le milieu, soit Φ , peut ensuite s'écrire après quelques calculs

$$\Phi = \tau_{ij} D_{ij} - \frac{\mathbf{q}' \cdot \nabla T}{T} - \rho_g \mathbf{v}_g \cdot \nabla_T (g_g - g_v) = \Phi_v + \Phi_t + \Phi_d, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q} - \rho_g \mathbf{v}_g (h_g - h_v) \quad (8)$$

On a désigné dans (8) par \mathbf{q} le vecteur-flux de chaleur. D_{ij} est le tenseur des taux de déformations, τ_{ij} est la partie dissipative du tenseur des contraintes, les h_α désignent les enthalpies spécifiques des constituants. La notation ∇_T désigne un gradient pris à température constante. La relation (8) présente Φ comme une somme de trois formes bilinéaires indépendantes de variables duales :

- (i) la dissipation visqueuse Φ_v (variables τ_{ij} et D_{ij});
- (ii) la dissipation thermique (variables \mathbf{q}' et ∇T);
- (iii) la dissipation par diffusion moléculaire Φ_d [variables \mathbf{v}_g et $\nabla_T (g_g - g_v)$].

Le second principe impose que la dissipation totale soit positive pour tout processus thermodynamique admissible. Cela est réalisé sous les hypothèses d'Onsager. Outre la loi de comportement de fluide newtonien, on obtient deux autres lois :

$$\rho_g \mathbf{v}_g = -C \nabla_T (g_g - g_v) = -C \frac{\partial}{\partial q_g} (g_g - g_v)_{T, q_v} \nabla q_g - C \frac{\partial}{\partial q_v} (g_g - g_v)_{T, q_g} \nabla q_v \quad (9)$$

$$\mathbf{q}' = -k \nabla T \iff \mathbf{q} = -k \nabla T - C (h_g - h_v) \nabla_T (g_g - g_v) \quad (10)$$

où C est un coefficient scalaire. L'égalité (9) montre qu'un seul coefficient de diffusion (ici : C) est nécessaire pour décrire la diffusion moléculaire, mais celle-ci dépend linéairement de deux gradients de concentration. L'égalité (10) (loi de Fourier généralisée) montre que la diffusion de chaleur s'opère avec un effet Dufour (conduction de chaleur due aux gradients de concentration).

Supposons alors que la concentration d'eau soit faible, d'ordre de grandeur $q_0 \ll 1$. On a alors $q_v = O(q_0)$, $q_L = O(q_0)$, $1 - q_g = O(q_0)$. Dans (9) le facteur de ∇q_g est d'ordre 1, tandis que le facteur de ∇q_v est d'ordre q_0^{-1} , les deux gradients ∇q_g et ∇q_v se trouvant tous deux du même ordre de grandeur q_0 . Ainsi les formes approchées de (9) et (10) sont dans ce cas

$$\rho_g \mathbf{v}_g \approx D \nabla q_v, \quad D = -C \frac{\partial}{\partial q_v} (g_g - g_v)_{T, q_g}, \quad \mathbf{q} \approx -k \nabla T + D (h_g - h_v) \nabla q_v \quad (11)$$

Les formules (11) justifient l'approximation (3). Dans la loi de Fourier, l'effet Dufour subsiste sous forme simplifiée. L'équation de diffusion associée à (11) s'écrit en définitive :

$$\rho \frac{dq_g}{dt} + D \Delta q_v = 0 \quad (12)$$

Supposons que l'air sec et la vapeur d'eau sont des gaz parfaits à chaleurs spécifiques constantes : le mélange est lui-même un mélange de trois gaz parfaits. On a ainsi

$$p_g = R_g \rho_g T, \quad p_v = R_v \rho_v T, \quad L_v = L_{v0} + (c_{pv} - c_L)(T - \Theta_0) = h_v - h_L \quad (13)$$

où c_{pv} et c_L sont les chaleurs spécifiques à pression constante, R_g et R_v sont les constantes des gaz parfaits pour l'air sec et la vapeur d'eau. Les formules (5), (9) et (11) s'écrivent

$$\rho = \rho_0 \frac{q_0 \Theta_0^\alpha}{q_v T^\alpha} \exp \left\{ (\Lambda_0 + \alpha - 1) \left[1 - \frac{\Theta_0}{T} \right] \right\}, \quad \Lambda_0 = \frac{L_0}{R_v \Theta_0}, \quad \alpha = 1 - \frac{c_{pv} - c_L}{R_v} \quad (14)$$

$$\rho_g \mathbf{v}_g = -C \left(\frac{R_g T}{q_g} \nabla q_g - \frac{R_g T}{q_v} \nabla q_v \right) \approx D \nabla q_v, \quad D = \frac{C R_g T}{q_v} \quad (15)$$

4. L'équation de l'énergie dans le milieu saturé

Nous supposons toujours que les gaz sont des gaz parfaits. La forme générale de l'équation de l'énergie pour le milieu considéré est

$$\rho \left[c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \sum_{\alpha=g,v,L} h_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} \right] = \tau_{ij} D_{ij} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q \quad (16)$$

où Q est la densité massique de source de chaleur dans le milieu, c_p la chaleur spécifique à pression constante. L'introduction dans (16) des lois de comportement (9) et (10) fournit l'équation

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + L_v \frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} D_{ij} + \frac{k}{\rho} \Delta T + \frac{L_v}{\rho} \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) + \frac{1}{\rho} \rho_g \mathbf{v}_g \cdot \nabla (h_g - h_v) + Q \quad (17)$$

où $\rho_g \mathbf{v}_g$ est donné par (15). L'équation de l'énergie comporte ainsi un double effet Dufour, relativement aux deux concentrations q_v et q_g . Supposons alors les concentrations d'eau faibles. Supposons en outre constant le coefficient D défini en (15). La relation (17) se simplifie en

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + L_v \frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} D_{ij} + \frac{k}{\rho} \Delta T + L_v \frac{D}{\rho} \Delta q_v + \frac{D}{\rho} \nabla q_v \cdot \nabla (h_g - h_v) + Q \quad (18)$$

Les relations (17) et (18) peuvent prendre encore d'autres formes simplifiées en fonction d'hypothèses additionnelles, par exemple supposer constants les coefficients des deux gradients de concentration. Dans un problème de convection peu profonde, on fait en sus l'approximation de Boussinesq et le fait que l'on se place à une altitude à peu près constante devant l'échelle atmosphérique permet de supposer constants ces facteurs ainsi que L_v .

5. Comparaison aux équations en milieu insaturé (air clair)

Dans un air humide insaturé, deux constituants seulement sont en présence, de concentrations q_v et q_g , et on a $q_v + q_g = 1$. La formule (8) reste valable, mais les grandeurs g_g et g_v sont maintenant fonctions des variables indépendantes ρ , T , q_v . Les relations (9), (15) et (17) sont remplacées par

$$\rho_g \mathbf{v}_g = -C \frac{\partial}{\partial \rho} (g_g - g_v)_{T,q_v} \nabla \rho - C \frac{\partial}{\partial q_v} (g_g - g_v)_{T,\rho} \nabla q_v \quad (19)$$

$$\rho_g \mathbf{v}_g = C \left[\frac{(R_v - R_g)T}{\rho} \nabla \rho + \left(\frac{R_v T}{q_v} + \frac{R_g T}{q_g} \right) \nabla q_v \right] \approx \frac{C R_v T}{q_v} \nabla q_v \quad (20)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} D_{ij} + \frac{k}{\rho} \Delta T + Q \quad (21)$$

La seconde formule (20) n'est valable que si la concentration d'eau est petite *et* si l'on est en modélisation Boussinesq. L'équation (21), valable dans tous les cas, est celle que l'on obtiendrait en fluide pur : l'effet Dufour disparaît donc dans ce cas.

6. Application à la convection nuageuse

Comme application des équations précédentes, intéressons-nous à la convection linéarisée d'un nuage dont l'épaisseur est petite devant l'échelle atmosphérique. L'étude peut être ramenée à celle d'un problème auxiliaire d'instabilité binaire double diffusive comportant à la fois un effet Soret et un effet Dufour (voir [5]). On désigne par Ra et Rh les facteurs de déstabilisation du problème : Ra est un nombre de Rayleigh classique et Rh un nombre de Rayleigh humide, proportionnel au gradient d'eau totale dans le milieu. Par une analyse en modes normaux, la composante verticale w de la vitesse peut être recherchée sous la forme $w = W(z) \exp\{\sigma t - i(kx + hy)\}$ où A est un facteur d'amplitude constant et $K = (k^2 + h^2)^{1/2}$ est le nombre

d'onde. W vérifie l'équation

$$D^8 W + Re\sigma [(\Lambda_0\mu - 1)Pr + \tau Pr - 1] D^6 W - Re^2\sigma^2 [Pr(\Lambda_0\mu - 1 + \tau + \tau Pr)] D^4 W + (Re^3\sigma^3 Pr^2\tau - K^2\{Ra(\Lambda_0 - 1) - Rh[\mu(\Lambda_0 - 1) + \tau]\}) D^2 W = -Re\sigma K^2\tau Pr(Ra - Rh)W \quad (22)$$

où l'on a posé $D^2 = d^2/dz^2 - K^2$, $D^{2n} = (D^2)^n$. Dans l'équation (22) les coefficients de diffusion sont le nombre de Prandtl Pr et un nombre $\tau = S^*/(q_0 Pr)$ où S^* est le nombre de Schmidt, et où figure également l'intensité de concentration d'eau dans le milieu : dans la pratique, $Pr \approx 0,76$ et $S^* \approx 0,72$ pour un q_0 de l'ordre de 10^{-3} de sorte que le coefficient τ est de l'ordre de 10^3 . Les autres facteurs : Λ_0 (chaleur latente de vaporisation normalisée) et μ ne jouent pas de rôle dans ce problème.

L'équation (22) possède des solutions propres stationnaires lorsque $\tau^{-1} \neq 0$, qui disparaissent lorsque $\tau^{-1} = 0$ (l'ordre de l'équation (22) s'abaisse) : ces solutions sont donc tributaires de la diffusion moléculaire. Au contraire, les solutions oscillatoires (pour lesquelles $\sigma = i\omega$, ω réel) existent toujours, que τ^{-1} soit nul ou non nul. De plus, la fréquence ω tend vers 0 si l'on fait tendre vers l'infini le nombre de Reynolds, de sorte que les solutions oscillatoires tendent vers celles qui décriraient l'instabilité statique si le milieu était totalement non dissipatif. La principale conséquence des effets Soret et Dufour a donc été de provoquer des oscillations dans l'instabilité directement dégénérée de l'instabilité statique, tandis qu'apparaît une seconde instabilité, stationnaire, due à la diffusion moléculaire.

7. Conclusion

On a justifié la loi de diffusion (3) pour la diffusion moléculaire dans un milieu nuageux. Cette loi est applicable sous les hypothèses que : (i) le milieu est saturé (indispensable pour remplacer la variable ρ par la variable q_v) et : (ii) l'ordre de grandeur de la concentration d'eau est *petit*. On justifie ainsi, avec des hypothèses plus faibles, les équations utilisées par Deardorff puis Bougeault. L'hypothèse que la vitesse de diffusion des gouttes est faible devant la vitesse barycentrique du milieu, invoquée ordinairement pour justifier cette approximation, n'est pas utile. La diffusion moléculaire s'accompagne d'un effet Dufour dû essentiellement à l'existence d'un changement de phase dans le milieu. Cet effet disparaît si l'on suppose le mélange insaturé. Les équations de diffusion adoptées par Bretherton peuvent rester valables si l'on s'intéresse à un mouvement turbulent, les termes de diffusion étant alors tributaires du choix de modélisation des corrélations figurant dans les dérivées particulières des diverses grandeurs, avec des coefficients de diffusion qui sont des coefficients de dissipation turbulente : viscosité turbulente etc.

Références bibliographiques

- [1] C.S. Bretherton, J. Atm. Sci. 44 (1987) 1809–1827, J. Atm. Sci. 45 (1988) 2391–2409.
- [2] H.E. Huppert, J.S. Turner, J. Fluid Mech. 106 (1981) 299–329.
- [3] J. Deardorff, J. Atm. Sci. 37 (1980) 131–147.
- [4] P. Bougeault, J. Atm. Sci. 38 (1981) 2414–2428, 2429–2439.
- [5] A. Kubicki, P.A. Bois, C. R. Acad. Sci., Série Iib 328 (2000) 317–322.
- [6] P.A. Bois, A. Kubicki, in: G.A. Maugin, et al. (Eds.), Continuum Mechanics, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000, pp. 29–42.
- [7] M. Zemansky, Heat and Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [8] R.M. Bowen, in: Continuum Physics, Vol. III, Academic Press, New York, 1976, pp. 1–127.
- [9] P.A. Bois, Introduction à la Mécanique Théorique des Fluides, Ellipses, Paris, 2000.
- [10] P.A. Bois, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics 58 (1991) 35–59.