

# Présentation d'une méthode d'étude de la stabilité linéaire d'écoulements instationnaires

Michèle Siouffi<sup>a</sup>, Silvie Carrion<sup>b</sup>, Miloudi Wadih<sup>b</sup>

<sup>a</sup> UNIMECA, IRPHE, UMR CNRS 6594, 60, rue Frédéric Joliot Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

<sup>b</sup> LMSNM-L3M, FRE 2405, Universités d'Aix-Marseille, IMT la Jetée, technopôle de Château Gombert, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 12 février 2002 ; accepté après révision le 25 juillet 2002

Note présentée par Paul Clavin.

---

## Résumé

Une méthode permettant l'analyse de la stabilité linéaire d'écoulements instationnaires quelconques dans une conduite cylindrique est présentée. En se plaçant dans le cas d'une perturbation bidimensionnelle axisymétrique et d'un débit sinusoïdal, correspondant à un modèle d'écoulement qui a déjà fait l'objet d'études, la résolution numérique a fourni des résultats pertinents. *Pour citer cet article : M. Siouffi et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 641–645.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des fluides / écoulement instationnaire / stabilité linéaire / méthode de Galerkin**

## Presentation of a method for linear stability analysis of unsteady flow

## Abstract

We propose a linear stability analysis of unsteady viscous flow. We apply this method to an oscillatory pipe flow with an axisymmetric 2D perturbation which has received considerable attention. The numerical results are relevant. *To cite this article: M. Siouffi et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 641–645.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fluid mechanics / unsteady flow / linear stability / Galerkin method**

---

## *Abridged English version*

In spite of a large amount of work done on the stability of unsteady viscous flows, there are many unanswered questions, and the methods used are not satisfactory.

For example, critical Reynolds numbers found with the quasi-steady theory are lower than the experimentally observed values [2].

In the case of complex flows with start-up and shutdown, like blood flow in arteries, the results are not in accordance and the usual parameters are not suitable to represent these types of flow [1].

The general method presented here is applied to an axisymmetric sinusoidal flow in a cylindrical pipe, in order to determine the stability regions and compare the results with other studies.

---

Adresse e-mail : siouffi@unimeca.univ-mrs.fr (M. Siouffi).

This flow is governed by the system (1) with dimensionless variables in cylindrical coordinates. After linearization, we introduce a disturbance stream function with separated variables. The system (1) can be reduced to the form (2) for the disturbance flow.

Galerkin method gives a development on a set of functions, where time dependent coefficients are solutions of the first order differential system (3). For studying the stability of solutions of that system, we perform its numerical time integration by means of a fourth order Runge–Kutta scheme. With the criterion of strong stability on the norm of the perturbation (Fig. 1), we determine the stability curve (Fig. 2). The value found for the critical Reynolds number is close to the experimentally observed values [4,5] and to the value obtained by a direct simulation of transition in an oscillatory boundary layer [3].

### 1. Introduction

De nombreuses études concernant la stabilité des écoulements instationnaires ont été réalisées dans le cas de débits périodiques de forme sinusoïdale. Malgré la simplicité de ce type d'écoulement, de nombreuses questions subsistent et les méthodes utilisées ne sont pas satisfaisantes. En effet, la méthode quasi stationnaire, souvent employée, aboutit à des valeurs de nombres de Reynolds critiques plus faibles que celles déterminées expérimentalement.

Les études liées aux phénomènes plus complexes de mise en mouvement et d'arrêt du fluide, dans le but par exemple d'approfondir la compréhension du mécanisme se produisant à chaque cycle de l'écoulement artériel, n'ont toujours pas abouti à des résultats concordants. En effet, au cours d'un tel écoulement, diverses fréquences interviennent, et ne permettent pas alors de représenter le phénomène à l'aide des paramètres usuels ; de plus la durée de l'accélération de vitesse doit être prise en compte [1].

Afin d'étudier la stabilité d'un tel écoulement, nous présentons une méthode permettant d'analyser la stabilité linéaire d'écoulements instationnaires quelconques, testée dans le cas d'un débit sinusoïdal.

### 2. Présentation de la méthode

Nous considérons un tube cylindrique, de rayon  $R$ , de longueur infinie, à paroi rigide. Le fluide est supposé newtonien, incompressible et non pesant. Pour un débit volume de type

$Q(t) = Q_o \sin(\omega t)$ , des paramètres définis par :  $Re = Q_o / (\pi R \nu)$  et  $\Omega = R^2 \omega / \nu$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide et  $\omega$  la pulsation, et après avoir adimensionné les vitesses par  $Q_o / (\pi R^2)$ , les longueurs par  $R$  et le temps avec  $\omega$  en posant  $\tau = \omega t$ , les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \Omega \partial_\tau \mathbf{V} + Re \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -Re \nabla p + \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases} \quad (1)$$

Le repère choisi est cylindrique ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ).

L'écoulement de base étant unidimensionnel de vecteur vitesse  $\mathbf{V} = \bar{u} \mathbf{e}_z$ , une solution analytique de (1) est obtenue sous la forme :

$$\bar{u}(r, \tau) = \text{Partie Imaginaire} \left\{ e^{i\tau} \left( \frac{J_0(\sqrt{-i\Omega}r) - J_0(\sqrt{-i\Omega})}{J_2(\sqrt{-i\Omega})} \right) \right\}$$

où  $J_0$  et  $J_2$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre 0 et 2.

La vitesse de perturbation est supposée bidimensionnelle axisymétrique et le système (1) est linéarisé. Le problème étant non autonome, l'introduction d'une fonction de courant de perturbation telle que :

$$\Psi' = e^{i\alpha z} \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau) f_m(r) \quad \text{où } \alpha \text{ est le nombre d'onde de la perturbation}$$

permet d'écrire l'équation d'Orr–Sommerfeld sous la forme :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{dg_m(\tau)}{d\tau} K f_m(r) = \frac{1}{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau) \{ DK - i\alpha Re (\bar{u}K - L\bar{u}) \} f_m(r) \quad (2)$$

où  $D$ ,  $K$  et  $L$  sont des opérateurs définis par :

$$D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \alpha^2 \right), \quad K = \frac{1}{r} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \alpha^2 \right), \quad L = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)$$

L'utilisation de la méthode de Galerkin conduit à déterminer les fonctions  $f_m$  solutions de :

$$DK f_m = D^2 \frac{f_m}{r} = \mu_m^4 \frac{f_m}{r} = \mu_m^4 h_m \quad \text{et satisfaisant les conditions aux limites}$$

$$f_m(0) \text{ et } f'_m(0) \text{ finies, } f_m(1) = f'_m(1) = 0$$

On obtient alors :  $h_m = a_{1m} J_1(\nu_m r) + b_{1m} I_1(\lambda_m r)$  où :

- $J_1$  et  $I_1$  sont respectivement les fonctions de Bessel et de Bessel modifiée de 1<sup>ère</sup> espèce d'ordre 1,
- $\nu_m^2 = (\mu_m^2 - \alpha^2)$ ,  $\lambda_m^2 = (\mu_m^2 + \alpha^2)$ , avec  $\mu_m$  solution de l'équation caractéristique :  $\lambda_m J_1(\nu_m) I'_1(\lambda_m) - \nu_m J'_1(\nu_m) I_1(\lambda_m) = 0$ .

On limite la somme (2) aux  $N$  premiers termes, et en la projetant sur chacune des fonctions de base, on obtient un système différentiel de  $N$  équations complexes du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{G} \quad (3)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sont des matrices, d'éléments généraux respectifs :

$$A_{mn} = \frac{1}{\Omega} \int_0^1 (DK f_m) f_n \, dr$$

$$B_{mn} = \frac{i\alpha R_e}{\Omega} \int_0^1 ((L\bar{u}) f_m f_n - \bar{u}(K f_m) f_n) \, dr$$

$$C_{mn} = \int_0^1 (K f_m) f_n \, dr$$

et  $\mathbf{G}$  est le vecteur de composantes  $g_m$ .

On est ramené à l'étude de la stabilité des solutions de ce système.

### 3. Résultats

#### 3.1. Méthode de résolution

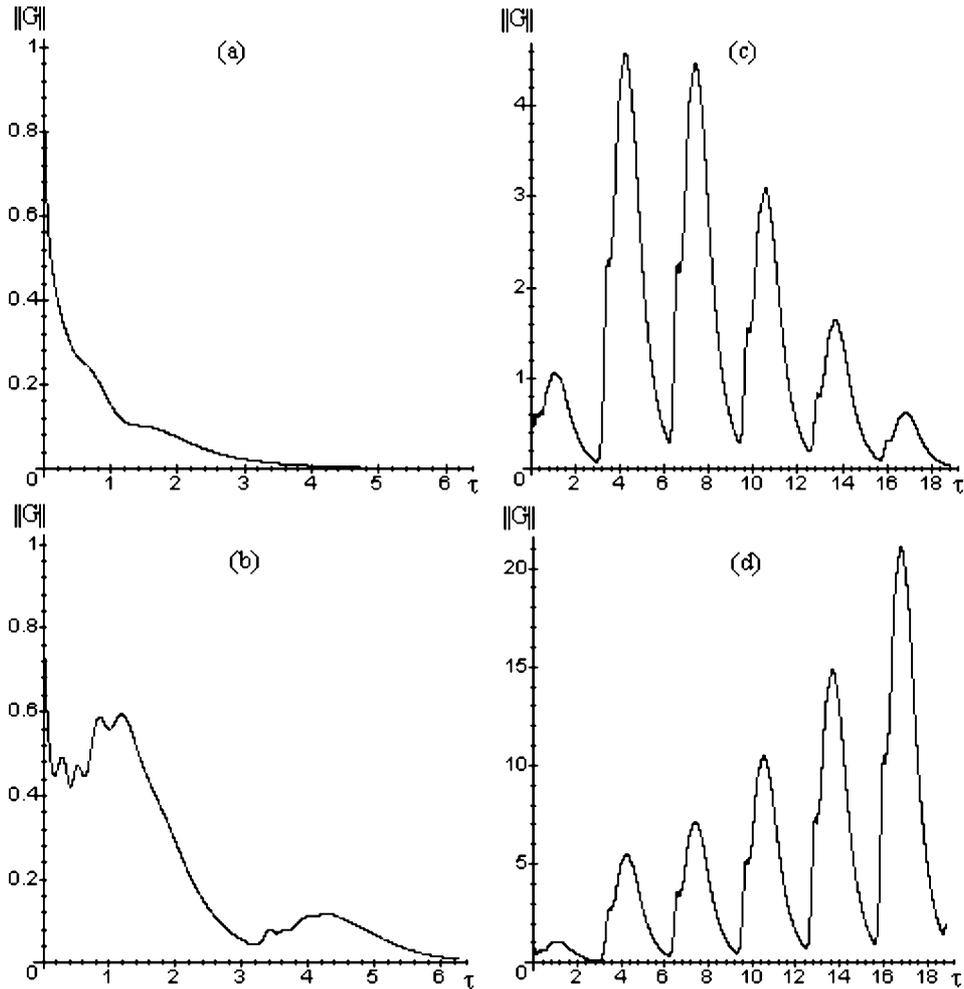
Pour les paramètres  $\Omega$ ,  $\alpha$ ,  $R_e$  et  $N$  fixés, on résoud numériquement le système (3) par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4, avec une condition initiale  $G(t=0) = (1/\sqrt{2N}, 1/\sqrt{2N}, \dots, 1/\sqrt{2N})$ . Pour  $\Omega = 100$  une étude de la convergence nous a conduit à prendre  $N = 25$ .

#### 3.2. Critère de stabilité

La résolution du système (3) étant faite pour une condition initiale, le résultat trouvé correspondra à une condition suffisante d'instabilité.

Pour un paramètre de fréquence  $\Omega$  fixé, la norme du vecteur  $G$  ( $\|G\|$ ) est calculée au cours du temps pour diverses valeurs du couple  $(\alpha, R_e)$ . L'évolution temporelle de cette norme peut être représentée suivant trois familles de courbes (Fig. 1). La famille 1(a) correspond à un critère de stabilité forte c'est à dire à une norme décroissante monotone ; les représentations 1(b) et 1(c) traduisent un critère de stabilité faible : une norme décroissante en moyenne sur une période 1(b) ou plusieurs périodes 1(c). Sur la figure 1(d) nous avons donné un exemple d'évolution de norme dans un cas d'instabilité.

La Fig. 2 représente la courbe de stabilité forte pour  $\Omega = 100$ . Le couple de valeurs critiques  $(\alpha_c, R_{ec})$  vaut dans ce cas (2,5, 3500).



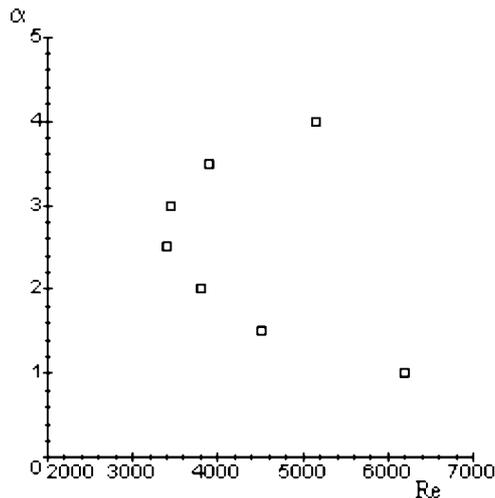
**Figure 1.** Evolution temporelle de  $\|G\|$  : stabilité forte (a), stabilité asymptotique sur 1 période (b), sur plusieurs périodes (c), instabilité (d).

**Figure 1.** Temporal evolution of  $\|G\|$ : strong stability (a), asymptotic stability over 1 period (b), over several periods (c), instability (d).

Il est aussi classique, dans l'étude de l'oscillation d'une couche de Stokes, de ramener les paramètres  $R_e$  et  $\Omega$  à l'épaisseur  $\delta_{st}$  de cette couche (avec  $\delta_{st} = \sqrt{2\nu/\omega}$ ) et par suite de poser  $R_{e\delta_{st}} = \frac{U_0\delta_{st}}{\nu} = R_e\sqrt{2/\Omega}$ . Nous obtenons ainsi une valeur critique 500 pour  $R_{e\delta_{st}}$ .

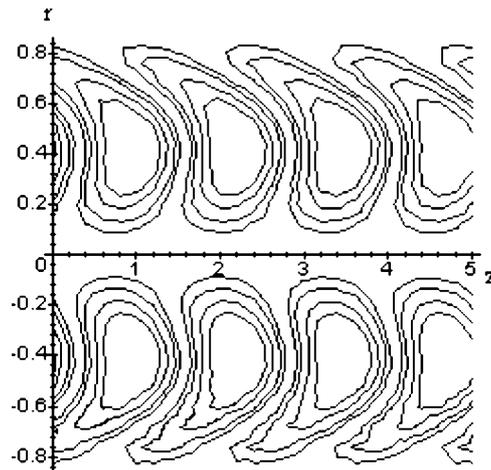
L'étude de la stabilité des écoulements à débit oscillant a fait l'objet de nombreux travaux théoriques, numériques et expérimentaux et on constate que les résultats théoriques et numériques diffèrent des résultats expérimentaux et peuvent aussi différer entre eux. Par exemple, une méthode quasi-stationnaire utilisée dans le cadre d'un écoulement identique au notre et effectuée par Das et Arakeri [2] conduit à une valeur critique de  $R_{e\delta_{st}}$  égale à 82 tandis que Vittori et Verzicco [3] obtiennent par simulation numérique d'un écoulement oscillant au dessus d'une paroi présentant de faibles ondulations, une valeur critique égale à 550.

Les résultats déduits de l'expérimentation sont situés dans un intervalle plus étroit et des valeurs comprises entre 500 et 550 sont couramment observées : Hino et al. [4] détectent des perturbations de vitesse pour  $R_{e\delta_{st}} = 550$ , Eckmann et Grothberg [5] observent des instabilités de la couche de Stokes à partir de  $R_{e\delta_{st}} = 500$ .



**Figure 2.** Courbe de stabilité pour  $\Omega = 100$ .

**Figure 2.** Stability curve for  $\Omega = 100$ .



**Figure 3.** Lignes de courant instantanées de perturbation pour  $\alpha = 2,5$ ,  $Re = 3300$ ,  $\tau = 1,6$ .

**Figure 3.** Instantaneous disturbance streamlines for  $\alpha = 2.5$ ,  $Re = 3300$ ,  $\tau = 1.6$ .

Ainsi la méthode présentée ici conduit à une valeur critique en accord avec des valeurs obtenues expérimentalement.

### 3.3. Écoulement de perturbation

Les lignes de courant instantanées de perturbation sont représentées près du maximum de débit, Fig. 3, pour des valeurs des paramètres proches de la transition. Nos résultats sont analogues à ceux obtenus en géométrie cartésienne par Vittori et al pour un écoulement de type sinusoïdal au dessus d'une paroi présentant des irrégularités.

### 4. Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'étude de la stabilité linéaire valable pour des écoulements instationnaires quelconques. Cette méthode, testée sur un écoulement à débit sinusoïdal, dans le cas d'une seule condition initiale, conduit à des résultats préliminaires concordant avec ceux obtenus par différents auteurs, particulièrement dans le cadre de l'expérimentation.

Une étude complète ainsi que l'application à des écoulements non périodiques sont en cours de réalisation.

### Références bibliographiques

- [1] A. Pascal-Mousselard, Étude des effets de la mise en mouvement d'un fluide sur les régimes instationnaires : Application aux écoulements cardiovasculaires, Doctorat de l'Université Aix-Marseille II, 1998.
- [2] D. Das, J. Arakeri, Transition of unsteady velocity profiles with reverse flow, J. Fluid Mech. 374 (1998) 251–283.
- [3] G. Vittori, R. Verzicco, Direct simulation of transition in an oscillatory boundary layer, J. Fluid Mech. 371 (1998) 207–232.
- [4] M. Hino, M. Sawamoto, S. Takasu, Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow, J. Fluid Mech. 75 (1976) 193–207.
- [5] D.M. Eckmann, J.B. Grotberg, Experiments on transition to turbulence in oscillatory pipe flow, J. Fluid Mech. 222 (1991) 329–350.