

# Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps

Pierre Ladeveze, Anthony Nouy

LMT Cachan, 61, avenue du Président Wilson, 94230 Cachan, France

Reçu le 28 février 2002 ; accepté après révision le 1<sup>er</sup> juillet 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

---

## Résumé

Une nouvelle stratégie de calcul multi-échelle est proposée pour analyser les structures dont le comportement est décrit à une échelle fine tant en temps qu'en espace (par exemple : les structures composites). Au moins pour un certain nombre de questions, elle devrait se substituer avantageusement aux techniques standards d'homogénéisation et de réanalyse locale qui en général sont limitées au domaine spatial. Le but est ici de décrire les bases de cette approche. *Pour citer cet article : P. Ladeveze, A. Nouy, C. R. Mécanique 330 (2002) 683–689.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des solides numérique / homogénéisation / multiéchelle / décomposition de domaine**

## A multiscale computational method with time and space homogenization

## Abstract

A new multiscale computational strategy is proposed for the analysis of structures which are described at a refined level both in space and in time (for example, composite structures). For certain problems of interest, this new strategy can replace standard homogenization techniques (often coupled with local re-analysis) that are generally limited to the space domain. The aim herein is the description of the basis of the proposed approach. *To cite this article: P. Ladeveze, A. Nouy, C. R. Mécanique 330 (2002) 683–689.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**computational solid mechanics / homogenization / multiscale / domain decomposition**

---

## *Abridged English version*

When analysing heterogeneous structures, such as reinforced or composite structures, and when a refined solution is required, the computation must involve a fine discretization of the structure (at the micro-level). Since the constituents often exhibit very different mechanical characteristics, the resulting structure is highly heterogeneous and the local solution displays effects with a short length of variation. This situation leads to problems with a very large number of degrees of freedom for which the calculation cost is generally prohibitive when using classical FE codes. This note deals with the main challenge today which is to derive alternative computational strategies capable of solving such engineering problems. The goal is to lower drastically the calculation cost while trying at the same time to increase the robustness.

The theory of periodic media homogenization initiated by Sanchez-Palencia [16] is one such strategy, especially for linear problems. Further developments for associated computational approaches can be found in [7–9,15]. The macro-level solution yields the effective values of the unknowns; the micro-level

---

Adresses e-mail : pierre.ladeveze@lmt.ens-cachan.fr (P. Ladeveze); anthony.nouy@lmt.ens-cachan.fr (A. Nouy).

solution should be computed locally in term of the macro-level one. Apart from periodicity, the fundamental assumption is that the ratio of the small-scale length to the large-scale length has to be small. Boundary areas need a special treatment: the material cannot be homogenized there. Moreover, this theory is not really applicable directly to time-dependent nonlinear problems. Rather, the computational strategy is to reduce the solution of a nonlinear problem to a sequence of linear problems, each of which is then homogenized.

A recent first step [13,4] has been to introduce a new micro–macro computational strategy which includes an homogenization technique without having the drawbacks of the classical homogenization theory. It has been extended in [14] to contact problems with friction.

A further step is taken in this Note; what is called ‘micro’ or ‘macro’ does not depend only on the space domain but depends on both space and time. Relatively few works have been devoted to time-multiscale computational strategies (see [5,11]). The so-called multi-time-step methods and mixed method in time do not include any time-homogenization technique. Such a technique seems to exist only for periodic loading histories (see [6,10,1]). Here, we propose a new and general multiscale computational strategy which is a first attempt to include in a multiscale computational strategy an homogenization in both space and time. The ‘macro’ quantities are a kind of mean values both in space and time. This strategy, which can be seen as an extension of the previous one, is developed here for (visco)-plastic materials and possibly unilateral contacts with or without friction.

This multi-scale computational strategy with space and time homogenization is iterative and works over the entire space–time domain. It has a strong mechanical basis.

The first element is the splitting of the time–space domain. The structure is an assembly of simple constituents which are substructures and interfaces. For instance, a substructure may contain one or several cells of a composite structure. Each of these components possesses its own variables and equations. An interface transfers both a distribution of velocity and a distribution of force. The time interval studied is split into subintervals; the discontinuous Galerkin method is used to handle possible discontinuities [2]. This strategy is described here with its discretized framework because numerics are essential.

The unknowns at the interfaces (velocities, interforces) are split into the form

$$(\dot{\mathbf{W}}, \mathbf{F}) = (\dot{\mathbf{W}}^M, \mathbf{F}^M) + (\dot{\mathbf{W}}^m, \mathbf{F}^m)$$

where the subscript M characterizes the ‘macro’ quantities; ‘m’ is related to the additive ‘micro’ part. The only choice is the space containing the ‘macro’ quantities; precisely, they are determined by the mechanics-based projectors associated with the bilinear work form defined on the entire space-time domain.

The second element of the micro–macro strategy is the use of the so-called LATIN method, a non-incremental iterative computational strategy applied on the entire time interval studied [1]. The resultant micro–macro strategy converges for stable materials under standard assumptions. At each iteration, one has to solve a ‘macro’ problem, defined on the entire structure and the entire time interval, along with a family of independent linear problems, each defined on a substructure and its interfaces. These are ‘micro’ problems, whereas the ‘macro’ problem is related to the entire homogenized structure on both the time and the space. Several numerical examples illustrate the possibilities of the present approach.

The overall scheme is well-adapted to parallel-architecture computers. It can be considered as a mixed multilevel domain decomposition method.

---

## 1. Problème de référence

Sous les hypothèses, petites perturbations, régime isotherme, équilibre quasi-statique, on considère l'équilibre d'une structure qui occupe un domaine  $\Omega$ . Elle est soumise à tout instant  $t$  appartenant à l'intervalle d'étude  $[0, T]$  à des forces volumiques  $\underline{f}_d$  et à des forces surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ , le déplacement  $\underline{u}_d$  est imposé. Toutes les quantités indicées par « $d$ » sont des données; les déplacements, déformations, contraintes sont nulles à l'instant

$t = 0$ . On modélise la relation de comportement du milieu par variables internes. La déformation anélastique  $\varepsilon_p$  est distinguée des autres variables internes désignées par  $\mathbf{X}$ . La variable conjuguée de  $\mathbf{X}$  est notée  $\mathbf{Y}$ ; ainsi la dissipation est égale à  $\text{Tr}[\sigma \dot{\varepsilon}_p] - \mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{X}}$ . De l'énergie libre  $\rho \Psi(\varepsilon_e, \mathbf{X})$ , on obtient, sous l'hypothèse usuelle de découplage, une formulation dite « normale » [1] des équations d'état. La relation de comportement décrivant l'évolution de l'état se met sous la forme de l'équation différentielle (1).

### 1.1. Partitionnement du milieu en sous-structures et interfaces

Le premier élément de la stratégie multi-échelle est de modéliser la structure comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces [1]. Chaque constituant a ses propres variables et ses propres équations. Une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est soumise à l'action des interfaces voisines définie par une distribution d'effort  $\underline{\mathbf{F}}_E$  et de vitesse  $\underline{\dot{\mathbf{W}}}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre les sous-structures  $E$  et  $E'$  transfère à la fois la distribution de vitesse et la distribution d'effort de part et d'autre :  $\underline{\dot{\mathbf{W}}}_E, \underline{\dot{\mathbf{W}}}_{E'}$  et  $\underline{\mathbf{F}}_E, \underline{\mathbf{F}}_{E'}$ .

### 1.2. Approximation – Choix des espaces

On note  $\mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]}$  et  $\mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]}$  les espaces des déplacements  $\underline{\mathbf{W}}$  et inter-efforts  $\underline{\mathbf{F}}$  sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$ . Ces espaces seront pris compatibles avec la dualité force-vitesse  $(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{F}}) \in \mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} \times \mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} \rightarrow \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{W}}} dS dt$ , et la Propriété 1.1.

PROPOSITION 1.1. –

$$\left\{ \underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} ; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{W}}} dS dt = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{W}} \in \mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} \right\} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\left\{ \underline{\mathbf{W}} \in \mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} ; \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{W}}} dS dt = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]} \right\} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{0}}$$

En pratique, les interfaces sont discrétisées par éléments finis au niveau spatial. L'intervalle de temps  $[0, T]$  est partitionné en  $\mathcal{T}_h = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T\}$  de temps caractéristique  $T_m$ . Au niveau temporel, on envisagera des fonctions discontinues. On suivra la « méthode de Galerkin discontinue » très en vogue actuellement pour traiter les problèmes de dynamiques [2]. Introduisons  $\mathcal{Z}_r^{[0,T]}$  l'espace des fonctions polynomiales de degré  $r$  sur les sous-intervalles  $I_i = ]t_i, t_{i+1}]$  et discontinues aux piquets de temps  $t_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N\}$ . L'extension de la définition du travail est alors : pour  $(a, b) \in \mathcal{Z}_r^{[0,T]}$  et  $b(t_0^-) = 0$ ,

$$\int_{[0,T]} a \dot{b} dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} a \dot{b} dt + \sum_{i=0}^{N-1} a(t_i^+) (b(t_i^+) - b(t_i^-))$$

$(\sigma_E, \mathbf{Y}_E)$  et  $(\varepsilon_{pE}, \mathbf{X}_E)$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathbf{e}_{h,E}^{[0,T]}$  et  $\mathbf{f}_{h,E}^{[0,T]}$ , pris compatibles avec la forme bilinéaire « dissipation » sur  $E$ ,  $\int_{\Omega_E \times [0,T]} \{\text{Tr}[\sigma \dot{\varepsilon}_p] - \mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{X}}\} d\Omega dt$ . Au niveau spatial, il est raisonnable de suivre une discrétisation éléments finis standard. Au niveau temporel, si on utilise des espaces du type  $\mathcal{Z}_r^{[0,T]}$ , la dissipation est prise évidemment au sens précédent.

### 1.3. Reformulation du problème de référence

DÉFINITION 1.1. –  $\mathbf{s}_E = (\varepsilon_{pE}, \mathbf{X}_E, \underline{\mathbf{W}}_E, \sigma_E, \mathbf{Y}_E, \underline{\mathbf{F}}_E) \in \mathcal{S}_{h,E}^{[0,T]}$  est  $E$ -admissible s'il vérifie :

- les équations d'équilibre :  $(\sigma_E, \underline{\mathbf{F}}_E) \in \mathbf{F}_{h,E,ad}^{[0,T]}$  ;
- les équations de compatibilité :  $(\varepsilon_E, \underline{\mathbf{W}}_E) \in \mathbf{E}_{h,E,ad}^{[0,T]}$  ;
- les équations d'état :  $\varepsilon_E - \varepsilon_{pE} = \mathbf{K}^{-1} \sigma_E$ ,  $\mathbf{Y}_E = \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}_E$ , où le tenseur de Hooke  $\mathbf{K}$  et l'opérateur  $\mathbf{\Lambda}$  sont des caractéristiques du matériau ;
- les conditions initiales.

Les espaces  $\mathbf{F}_{h,E,ad}^{[0,T]}$  et  $\mathbf{E}_{h,E,ad}^{[0,T]}$  expriment respectivement l'équilibre et l'admissibilité cinématique de manière globale sur l'espace-temps  $\Omega_E \times [0, T]$ .

Le problème de référence peut être reformulé sous la forme : trouver  $\mathbf{s} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{s}_E$  avec  $\mathbf{s}_E \in \mathcal{S}_{h,E}^{[0,T]}$  qui vérifie les relations suivantes :

- $\mathbf{s}_E$  est E-admissible ;
- la relation de comportement du milieu décrivant l'évolution de l'état :

$$\int_{\Omega_E \times [0,T]} \left( \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{pE} \\ -\dot{\mathbf{X}}_E \end{bmatrix} - \mathbf{B} \left( \begin{bmatrix} \sigma_E \\ \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right) \right) \cdot \begin{bmatrix} \sigma^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} = 0 \quad \forall (\sigma^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{[0,T]} \quad (1)$$

où  $\mathbf{B}$  est un opérateur positif caractéristique du matériau ;

- le comportement des interfaces, les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$  étant des cas particuliers.

### 2. Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps $\Omega \times [0, T]$

En fait, le partitionnement macro/micro est effectué uniquement sur les interfaces. L'échelle « macro » est définie au niveau spatial par la longueur caractéristique des interfaces a priori beaucoup plus grande que l'échelle de la discrétisation. Au niveau temps, elle est associée à un découpage de l'intervalle d'étude  $\mathcal{T}_{h'} = \{t'_0 = 0, t'_1, \dots, t'_{N'} = T\}$  qui contient le découpage précédemment introduit  $\mathcal{T}_h$  et dont le temps caractéristique  $T_M$  est beaucoup plus grand que le temps caractéristique  $T_m$ .

Considérons l'interface  $\Gamma_{EE'}$  liant les sous-structures  $E$  et  $E'$  ; les espaces où sont recherchées les déplacements et interefforts « macro » constituent un choix, soit  $\mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T],M}$  et  $\mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T],M}$ . Ils sont pris compatibles avec la dualité force-vitesse et une propriété équivalente à 1.1 pour les espaces « macro ». Par exemple, on imposera que  $\underline{\mathbf{W}}^M$  et  $\underline{\mathbf{F}}^M$  soient affines sur  $\Gamma_{EE'}$  et qu'au niveau temporel ils soient du type  $\mathbf{Z}_p^{[0,T]}$  pour la grille  $\mathcal{T}_{h'}$ . La seule « contrainte » est que les déplacements de solide sur  $\partial\Omega_E$  puissent être décrits par des déplacements « macro ». L'idée suivie pour définir les parties « macro » est très physique ; ce sont des moyennes tant en espace qu'en temps. Précisément, nous introduisons les meilleures approximations au sens de la forme bilinéaire « travail » qui grâce à la propriété (1.1) pour les espaces « macro » sont définies de façon unique. Les parties micro sont alors :  $\underline{\mathbf{F}}^m = \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{F}}^M$  et  $\underline{\mathbf{W}}^m = \underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}^M$  et on a :

$$\int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{\mathbf{F}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{W}}} dS dt = \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} (\underline{\mathbf{F}}^M \cdot \dot{\underline{\mathbf{W}}}^M + \underline{\mathbf{F}}^m \cdot \dot{\underline{\mathbf{W}}}^m) dS dt \quad (2)$$

Étendu à l'ensemble des interfaces, le partitionnement précédent conduit aux espaces  $\mathcal{W}_h^{[0,T],M}$ ,  $\mathcal{W}_h^{[0,T],m}$ ,  $\mathcal{F}_h^{[0,T],M}$  et  $\mathcal{F}_h^{[0,T],m}$ . Une autre brique importante de la stratégie de calcul multiéchelle présentée ici est l'incorporation partielle a priori des conditions de transmission aux interfaces. L'intereffort « macro » seul est assujéti à vérifier systématiquement les conditions de transmission en effort, y compris les conditions aux limites, conditions qui restent inchangées pour des interfaces « contact unilatéral avec frottement ». L'espace correspondant est noté  $\mathcal{F}_{h,ad}^{[0,T],M}$ . Les autres espaces de travail restent inchangés.

### 3. Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace

La vérification a priori, certes partielle, des conditions de transmission aux interfaces conduit à des aménagements du problème de référence : trouver  $\mathbf{s} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{s}_E$  qui vérifie les relations suivantes :

$$\mathbf{A}_d \left\| \begin{array}{l} - \mathbf{s}_E \text{ est } E\text{-admissible, } E \in \mathbf{E} \\ - \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{\underline{\mathbf{F}}_E^M\} \in \mathcal{F}_{h,ad}^{[0,T],M} \end{array} \right\| \quad \mathbf{\Gamma} \left\| \begin{array}{l} - \text{ la relation de comportement du milieu} \\ \text{ décrivant l'évolution de l'état (1)} \\ - \text{ le comportement des interfaces} \end{array} \right.$$

$\Gamma$  regroupe des équations locales en variables d'espace et de temps éventuellement nonlinéaires.  $\mathbf{A}_d$  est un ensemble d'équations linéaires. Le partitionnement des équations permet d'appliquer la LATIN method [3,1] qui est une méthode générale de résolution de problèmes nonlinéaires, itérative et fonctionnant globalement sur l'espace-temps. Une itération comprend deux étapes.

### 3.1. Etape locale à l'itération $n$

La donnée est  $\mathbf{s}_n = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{s}_{E,n}$ . Le problème consiste, connaissant  $\mathbf{s}_n$ , à construire  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ . On se donne une direction de recherche  $\mathbf{E}^+$  que  $\Delta \widehat{\mathbf{s}} = (\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n)$  doit vérifier ; précisément, il faut satisfaire pour chaque sous-structure  $E$  et interface  $\Gamma_{EE'}$ ,

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -\Delta \hat{\mathbf{X}}_E \end{bmatrix} + \mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_E \\ \Delta \hat{\mathbf{Y}}_E \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} d\Omega dt = 0 \quad (3)$$

$$\forall \underline{\mathbf{F}}_E^* \in \mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]}, \quad \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{k} \Delta \hat{\mathbf{F}}_E - \Delta \hat{\mathbf{W}}_E \right\} \cdot \underline{\mathbf{F}}_E^* dS dt = 0 \quad (4)$$

$\mathbf{H}$  est un paramètre classique de la méthode ; c'est un opérateur symétrique défini positif.  $k$  est un autre paramètre qui s'interprète comme une rigidité « micro » de l'interface. L'étape locale décrite ici est standard [1] et ne pose pas de difficultés particulières. Les problèmes à résoudre sont locaux en variables d'espace et de temps ; ils sous-tendent un parallélisme « maximum ».

### 3.2. Etape linéaire à l'itération $n$

La donnée est  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$ . Le problème consiste, connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$ , à construire  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  qui regroupe des équations linéaires. On se donne une direction de recherche  $\mathbf{E}^-$  que  $\Delta \mathbf{s} = (\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$  doit vérifier ; précisément, il faut satisfaire pour chaque sous-structure  $E$ ,

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{Y}^*) \in \mathbf{f}_{h,E}^{[0,T]}, \quad \int_{\Omega_E \times [0,T]} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pE} \\ -\Delta \hat{\mathbf{X}}_E \end{bmatrix} - \mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}_E \\ \Delta \mathbf{Y}_E \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix} d\Omega dt = 0 \quad (5)$$

$$\forall \underline{\mathbf{F}}_E^* \in \mathcal{F}_h^{[0,T],m} \cup \mathcal{F}_{h,ad}^{[0,T],M}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial \Omega_E \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{k} \Delta \mathbf{F}_E + \Delta \mathbf{W}_E \right\} \cdot \underline{\mathbf{F}}_E^* dS dt = 0 \quad (6)$$

Il est aisé de montrer que le problème ainsi défini admet une solution unique si  $k > 0$  et si  $\mathbf{H}$  est un opérateur symétrique défini positif. Il se scinde en deux problèmes : un problème « micro » sur chaque sous-structure et sur chaque intervalle  $]t_i, t_{i+1}]$  avec  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  et un problème « macro » global sur  $\Omega \times [0, T]$ .

#### 3.2.1. Problème « micro » défini sur la sous-structure $E$ et sa frontière $\partial \Omega_E$ et sur $[0, T]$

En préliminaire, remarquons que la relation (6) associée à  $\underline{\mathbf{F}}^* \in \mathcal{F}_h^{[0,T],m}$  s'écrit encore :  $\forall \Gamma_{EE'}$ ,

$$\forall \underline{\mathbf{F}}_E^* \in \mathcal{F}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T]}, \quad \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \left\{ \frac{1}{k} \Delta \mathbf{F}_E + \Delta \mathbf{W}_E \right\} \cdot \underline{\mathbf{F}}_E^* dS dt = \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{\mathbf{W}}_E^M \cdot \underline{\mathbf{F}}_E^* dS dt \quad (7)$$

où le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\mathbf{W}}_E^M$  appartient à  $\mathcal{W}_{h,\Gamma_{EE'}}^{[0,T],M}$ . Le problème « micro » relatif à la sous-structure  $E$  s'écrit : trouver  $\mathbf{s}_E = (\varepsilon_{pE}, \mathbf{X}_E, \underline{\mathbf{W}}_E, \boldsymbol{\sigma}_E, \mathbf{Y}_E, \underline{\mathbf{F}}_E) \in \mathcal{S}_{h,E}^{[0,T]}$  qui vérifie les relations :

- $\mathbf{s}_E$  est  $E$ -admissible ;
- les directions de recherche (5) et (7).

Ce problème est naturellement linéaire ; il se ramène à la résolution d'un problème qui peut être formulé en déplacement et dont la résolution ne pose pas de difficultés particulières. Ce problème est en fait la version discrétisée d'une équation différentielle du premier ordre dont l'expression détaillée n'a pas d'intérêt ici. Ce qui importe est d'observer que la solution du problème « micro » relatif à la sous-structure  $E$  ne dépend que des données  $\underline{\mathbf{f}}_{d|\Omega_E}$  et  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$ , et de la valeur de  $\underline{\mathbf{W}}_E^M$  sur la frontière de  $E$  qui à ce stade est inconnue. Il

reste à noter également que la densité  $\underline{\mathbf{F}}_E^M$  sur la frontière de E est nécessairement en équilibre avec  $\underline{\mathbf{f}}_{d|\Omega_E}$  ; soit  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E}^{[0,T],M}$  l'espace correspondant pour la frontière de E. Il en résulte qu'il est loisible d'imposer à la résultante et au moment de  $\widetilde{\mathbf{W}}_E^M$  sur la frontière de E d'être nuls. L'espace correspondant est  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{[0,T],M}$ . On notera  $\overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{[0,T],M}$  l'espace des interefforts « macro » assurant les conditions de transmission et en équilibre avec  $\underline{\mathbf{f}}_{d|\Omega_E}$  sur chaque sous-structure E. On démontre :

PROPOSITION 3.1. – Si  $\mathbf{H}$  est un opérateur symétrique défini positif et si  $k > 0$ , le problème « micro » défini sur la sous-structure E et sa frontière admet une solution unique telle que

$$\underline{\mathbf{F}}_{E|\partial\Omega_E}^M = \mathbf{L}_E(\widetilde{\mathbf{W}}_{E|\partial\Omega_E}^M) + \widehat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}^M \quad (8)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{W}}_{E}^M \in \overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{[0,T],M}$  et où  $\widehat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}^M$  dépend de  $\underline{\mathbf{f}}_{d|\Omega_E}$  et  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$ .

$\mathbf{L}_E$  est un opérateur linéaire de  $\overline{\mathcal{W}}_{h,E}^{[0,T],M}$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{h,E}^{[0,T],M}$  dont la partie symétrique est définie positive. L'opérateur  $\mathbf{L}_E$  est calculé ; son coût est relativement faible car  $\widetilde{\mathbf{W}}_E^M$  sur la frontière de E dépend sur  $[0, T]$  de très peu de paramètres scalaires.  $\mathbf{L}_E$  matérialise le couplage entre les différentes échelles et peut être vu comme un opérateur de comportement homogénéisé en temps et en espace.

Les problèmes « micro » définis sur  $\Omega_E \times I_i$  avec  $E \in \mathbf{E}$  et  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  sont indépendants. Toutefois, pour chaque sous-structure E, le traitement doit être incrémental. Ils sous-tendent un parallélisme fort qui peut être aisément exploité sur les ordinateurs à architecture parallèle.

### 3.2.2. Problème « macro » défini sur $\Omega \times [0, T]$

De (8) et de la direction de descente « macro » (6) résulte le problème « macro » qui s'écrit : trouver  $\underline{\mathbf{F}}^M = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{\underline{\mathbf{F}}_E^M\} \in \overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{[0,T],M}$ , qui vérifie la relation suivante :

$$\forall \underline{\mathbf{F}}^{M*} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{\underline{\mathbf{F}}_E^{M*}\} \in \overline{\mathcal{F}}_{h,0}^{[0,T],M}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_E^{-1} (\underline{\mathbf{F}}_E^M - \widehat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}^M)) \cdot \underline{\mathbf{F}}_E^{M*} dS dt = 0 \quad (9)$$

où  $\overline{\mathcal{F}}_{h,0}^{[0,T],M}$  est l'espace  $\overline{\mathcal{F}}_{h,ad}^{[0,T],M}$  pour des données en effort nulles.

Il est aisé de montrer que le problème « macro » admet une et une seule solution. Par dualité, il est possible de remplacer (9) par une formulation en déplacement équivalente plus classique. Le problème « macro », une fois résolu, permet d'accéder à  $\widetilde{\mathbf{W}}_E^M$ . En utilisant à nouveau les problèmes « micro », la solution  $\mathbf{s}_{n+1}$  est complètement déterminée. Les grandeurs « macro » ne sont définies qu'aux interfaces ; en interprétant le milieu comme un milieu de Cosserat, il est possible de définir des contraintes, déformations, ..., « macro » sur la sous-structure E.

## 4. Convergence en performance

En suivant la démonstration de la convergence de la stratégie monoéchelle donnée dans [1], on peut démontrer que le processus itératif est convergent sous réserve des hypothèses usuelles sur le matériau dont la monotonie de l'opérateur  $\mathbf{B}$ .

Des essais numériques montrent l'indépendance de taux de convergence des quantités « macro » vis à vis de nombreux paramètres du problème : nombre de sous-structures, nombre d'intervalles de temps « macro ». On peut attribuer à cette méthode la qualité « d'extensibilité numérique » en espace et en temps, que la version mono-échelle ne satisfaisait pas.

## 5. Conclusion

Des gains en performance supplémentaires peuvent être introduits lors de la résolution des problèmes « micro » définis sur  $\Omega_E \times I_i$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ . En effet, ces problèmes, surtout si les sous-structures sont identiques ont la propriété remarquable d'être du même type. Aussi, des traitements

spécifiques peuvent être mis en place, comme l'introduction d'approximations du type « chargement radial », classiquement utilisées dans la LATIN method [1]. Le gain est là très important. Toujours dans cette étape linéaire, il est usuel et très efficace de prendre comme direction de descente  $\mathbf{H}$  le gradient de l'opérateur  $\mathbf{B}$  de la relation de comportement ou un opérateur qui lui est proche.

Un autre point est l'introduction d'une 3<sup>ème</sup> échelle, indispensable pour traiter la plupart des structures composites. Ce pont est aisé ; il suffit d'approximer le problème « macro » suivant la démarche [4].

La démarche multiéchelle, objet de cette note, s'interprète comme une méthode mixte de décomposition de domaine dont l'extensibilité a été montrée. De plus, elle tire partie, ce qui est inhabituel, du caractère local en variable d'espace et en variable de temps de la partie de la relation de comportement qui décrit l'évolution de l'état. Cette parallélisation très forte la rend très bien adaptée aux ordinateurs à architecture parallèle.

### Références bibliographiques

- [1] P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer-Verlag, 1999.
- [2] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, *Computational Differential Equations*, Cambridge, 1996.
- [3] P. Ladevèze, Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 300 (2) (1985) 41–44.
- [4] P. Ladevèze, O. Loiseau, D. Dureisseix, A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 52 (2001) 121–138.
- [5] T. Belytschko, P. Smolinski, W.K. Liu, Stability of multi-time step partitioned integrators for the first-order finite element systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 49 (1985) 281–297.
- [6] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, 1978.
- [7] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut, F. Léné, Homogenization and damage for composite structures, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 27 (1989) 285–298.
- [8] F. Feyel, J.-L. Chaboche,  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elasto-viscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 183 (2000) 417–455.
- [9] J. Fish, K. Sheck, M. Pandheeradi, M.S. Shepard, Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 148 (1997) 53–73.
- [10] G.A. Francfort, Homogenization and linear thermoelasticity, *SIAM J. Math. Anal.* 14 (1983) 696–708.
- [11] A. Gravouil, A. Combescure, Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 50 (2001) 199–225.
- [12] T. Guennouni, Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques : l'homogénéisation en temps, *Math. Modelling Numer. Anal.* 22 (3) (1988) 417–455.
- [13] P. Ladevèze, D. Dureisseix, A new micro macro computational strategy for structural analysis, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb 327 (1999) 1237–1244.
- [14] P. Ladevèze, A. Nouy, O. Loiseau, A multiscale computational approach for contact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2002), in press.
- [15] J.T. Oden, K. Vemaganti, N. Moes, Hierarchical modelling of heterogeneous solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 172 (1999) 2–25.
- [16] É. Sanchez-Palencia, Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes, *Internat. J. Engrg. Sci.* 12 (1974) 231–251.
- [17] M. Lefik, B.A. Schrefler, Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites using homogenisation theory with corrective terms, *Arch. Mech.* 52 (2) (2000) 203–223.