

Instabilité et particularités de l'évolution d'une nappe tourbillonnaire

Vadim Pavlov^a, Daniel Buisine^a, Stéphane Decossin^b

^a UFR de mathématiques pures et appliquées, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

^b Laboratoire de mécanique de Lille, URA CNRS 1441 – Université de Lille 1, bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 29 janvier 2002 ; accepté après révision le 17 septembre 2002

Note présentée par Sébastien Candel.

Résumé

L'instabilité et les particularités de l'évolution d'une nappe tourbillonnaire sont étudiées. Nous considérons l'auto-organisation de tourbillons localisés (dans des écoulements bidimensionnels) en groupements de tourbillons, en structures sous forme de spirale et nous montrons que les états quasi-finiaux « n'oublent pas » les conditions initiales. Nous discutons la signification physique des résultats obtenus. *Pour citer cet article* : V. Pavlov et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 757–762.

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / instabilités / état d'équilibre / étude numérique

Instability and features of vortex sheet evolution

Abstract

The instability and the features of vortex sheet evolution are studied. We consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into clusters-like and spiral-like structures and show that quasi-final states do not 'forget' conditions of their initial origin. We discuss the physical significance of the obtained results. *To cite this article*: V. Pavlov et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 757–762.

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / instabilities / equilibrium state / numerical study

Abridged English version

Many theories have been proposed to study the evolution of hydrodynamic quasi-inviscid two-dimensional systems to a final equilibrium state. Some authors have used the methods of statistical mechanics [1]. However, in spite of different theories which were proposed on the problem of equilibrium, the explanation remains controversial. Concerning certain theories, argued criticisms have been emitted [2]. For this reason, direct experimental studies have a crucial role. However, even on the experimental level, the situation remains puzzling: obtained results tend to support different theories. The details of this discussion are presented in the work [3].

It is useful in this context to explore the direct numerical simulations of a simple model problem to establish some general results. We consider the self-organization of localized vortices (in two-dimensional flows) into cluster-like structures and we show that, in certain cases, the quasi-final states do not 'forget' conditions of their initial origin.

This study is based on the Hamiltonian approach applied to the mathematical model of point vortices (the general approach and the physical foundations have been developed in the works [4,5]). There are

Adresse e-mail : stephane.decossin@univ-lille1.fr (S. Decossin).

several advantages in the application of this approach: the laws of conservation are automatically fulfilled, the functional Poisson brackets are independent from the fields, etc. The Hamiltonian systems evolve according to the law (1). For a system of N identical point vortices confined in a circle (with a radius R), the Hamiltonian takes the form presented in Eq. (2).

We start by summarizing the experiment [6] which concerns the motion of a plasma in a strong magnetic field. This is interesting because of the well-known fact that the dynamics of an electron plasma confined by a strong external magnetic field exhibits similarities with two-dimensional inviscid and incompressible fluid. Indeed, the system is governed by isomorphic equations to the two-dimensional Euler hydrodynamical equations, where the electron concentration plays the role of the vorticity and the electric potential the role of stream function. These quantities can be used to test the predictions of different theories of two-dimensional inviscid fluid dynamics.

The study of the vortex configuration evolution for the system with associated initial conditions has been integrated numerically with a fourth-order Runge–Kutta scheme. The initial configuration has been chosen to reproduce the initial density of particles in the plasma experience (see Fig. 1). The calculation is initialized with a system of N identical ($\gamma_1 = \dots = \gamma_N$) vortices. A good quantitative consent is observed: the solution converges to the experimental observation when $N_i \gg 1$. After a time which corresponds to $\sim 10^2$ revolutions of the vortex distribution domain, a structure with a central vortex is formed (Fig. 2).

From the obtained distributions, one would be led to think that the distribution of vortices in quasi-final stage of its evolution is governed by statistical laws. However, supplementary observations refute this conclusion. To see this, one modifies slightly the initial configuration. Fig. 3 shows an evolution sequence of the vortex distribution for a system of $N \sim 10^3$ co-rotating vortices with such a modified initial configuration. In contrast with the previous case (Fig. 2), the system evolves to a uniformly rotating, pentagonal structure. No major change is observed for $t \gg 100$.

It is obvious from Fig. 3 that there is a deviation from the traditional concept of final statistical (quasi-homogeneous) equilibrium and observed quasi-final state illustrated in Figs. 2 and 3 at times $t > 100$. The vorticity distribution is determined by the history of the flow establishment [7], and this previous history is significantly nonlinear.

If the observed phenomenon (Fig. 3) is a ‘first order phase transition’, it had to lead to the spontaneous formation of vortex cells similar to crystal. Recall that some structures called ‘vortex crystals’ have recently been observed in the non-neutral plasma experiments [8].

1. Introduction

De nombreuses théories ont été proposées afin d’étudier l’évolution des systèmes hydrodynamiques bidimensionnels non-visqueux vers l’état final d’équilibre. Dans ce contexte, certains auteurs ont appliqué les méthodes de la mécanique statistique [1]. Toutefois, constatons qu’en dépit des nombreuses théories proposées, la situation reste encore très controversée. Concernant certaines approches, des critiques argumentées ont été émises [2]. Pour cette raison, les études expérimentales présentent un rôle crucial. Mais même du point de vue expérimental, la situation reste embarrassante : nombre de travaux tendent à soutenir des théories différentes. Les détails de cette discussion sont présentés dans le travail [3].

Intrigués par cette situation compliquée, nous choisissons d’appliquer une expérience numérique directe à un modèle simple permettant toutefois d’établir certaines lois générales. Nous considérons l’auto-organisation d’un très grand nombre de tourbillons localisés en groupements de tourbillons et nous montrons que, dans certains cas, le système « n’oublie pas » les conditions initiales.

Dans notre étude, la méthode utilisée est l’Approche Hamiltonienne appliquée au modèle mathématique des tourbillons ponctuels (l’approche générale et les fondements physiques ont été développés dans les travaux [4,5]). Il y a plusieurs avantages dans l’application de cette méthode : les lois de conservation sont respectées automatiquement, les crochets fonctionnels de Poisson ne dépendent pas des champs, etc.

Omettant les détails de l'analyse théorique [4,5], constatons seulement que notre système évolue selon la loi

$$\partial_t x_i^{(m)} = \{x_i^{(m)}, H\} \quad (1)$$

où $x^{(m)}(t)$ est la coordonnée du m -ième tourbillon et H l'énergie totale du système.

Soit un système de N tourbillons localisés à l'intérieur d'un domaine circulaire de rayon R , d'intensités identiques Γ/N . En respectant les conditions à la frontière, on peut montrer que l'Hamiltonien est donné par l'expression

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\pi N^2} \left\{ \sum_{i,j=1, i \neq j}^N -\ln\left(\frac{1}{R}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\right) + \sum_{i,j=1}^N \ln\left(\frac{1}{R}\left|\mathbf{x}_i - \frac{R^2}{|\mathbf{x}_j|^2}\mathbf{x}_j\right|\right) + \dots \right\} \quad (2)$$

La première partie de l'Hamiltonien décrit les « interactions » entre les tourbillons et la seconde partie les « interactions » entre les tourbillons et leurs images. Si $|\mathbf{x}_i| \ll R$, seul le terme $\sim \sum \ln|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ restera. Les conditions de l'expérience [6] permettent de ne pas considérer les termes omis.

2. Résultats numériques et discussions

Nous commençons par un rappel des résultats de l'expérience [6] dans laquelle on a étudié le mouvement de plasma dans un fort champ magnétique. Cette expérience est intéressante par le fait que la dynamique d'un plasma « chaud » d'électrons, dans un fort champ magnétique externe, montre des similarités avec un fluide bidimensionnel incompressible et non-visqueux. En effet, due à l'anisotropie dans la direction du champ, les électrons se meuvent pratiquement dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} . D'autre part, la viscosité du plasma « chaud » dans cette situation est pratiquement absente. Les équations sont donc isomorphiques aux équations hydrodynamiques bidimensionnelles sous forme Eulérienne, où la concentration joue le rôle de la vorticité et le potentiel électrique le rôle de la fonction de courant. Les résultats de cette expérience peuvent donc être utilisées afin de tester les prédictions des différentes théories de la dynamique des fluides bidimensionnels non-visqueux. La première étape a donc été d'exécuter une simulation numérique de l'expérience [6] à l'aide de notre modèle, puis de comparer les résultats de nos calculs avec les données expérimentales. La configuration initiale a été choisie afin de reproduire la densité initiale des particules dans l'expérience de plasma (voir Fig. 1). Nous avons initialisé le système de N tourbillons identiques ($\gamma_1 = \dots = \gamma_N$). Les expériences ont été réalisées avec différents N : $N_1 = 1,5 \cdot 10^2$, $N_1 = 5 \cdot 10^2$, $N_1 = 2 \cdot 10^3$. La distribution initiale des tourbillons a été donnée par une configuration symétrique axialement qui reproduit la distribution des particules dans l'expérience [6]. Les valeurs des paramètres du problème ( nergie, circulation) ont été les suivantes : $H \sim 10^{-6}$, $\Gamma = \sum_i \gamma_i = 1$. L'intensité d'un tourbillon a été définie par la formule $\gamma_i = \Gamma/N$.

L'étude de l'évolution de la configuration tourbillonnaire d'un système avec les conditions initiales associées a été faite numériquement à l'aide d'un schéma de Runge–Kutta à l'ordre 4. Le pas de temps est restreint par la condition $\Delta t < \Delta\theta / \sup(|\gamma_i|/R_{ij}^2)$, où $\Delta\theta$ est l'angle caractéristique entre deux tourbillons (i, j), $0,01 < \Delta\theta < 0,04$ radian. La conservation de l'énergie a été évaluée durant les calculs. L'énergie du système, H , est le paramètre le plus sensible aux erreurs numériques de simulation. L'analyse montre que l'Hamiltonien H subit des faibles variations avec une erreur : $|H - H_0|/|H_0| \leq 2 \cdot 10^{-5}$ (pour un processus d'itérations de $t = 0$   $t = 10^6 \Delta t$, qui correspond à 200 révolutions de la périphérie du domaine de la répartition tourbillonnaire). Toutes les autres intégrales du mouvement sont conservées automatiquement.

Les résultats des simulations numériques sont quantitativement en accords avec l'expérience de Huang et Driscoll (Fig. 1) lorsque $N_i \gg 1$: $N_3 > N_2 > N_1$.

La Fig. 2 montre une évolution en temps de la distribution pour un système de $N = 2 \cdot 10^3$ tourbillons corotatifs. L'instabilité de la configuration initiale a été observée très rapidement ($t \sim 1$) lors de la simulation. La perturbation génère évidemment une instabilité (instabilité de cisaillement de Kelvin–Helmholtz) qui croit exponentiellement en temps et provoque une forte évolution non-linéaire. La fragmentation de l'état initial ($t \sim 10$) et la « clusterisation » qui suivent sont nettement observées. Aux étapes $t \sim 32$, $t \sim 33,9$, la

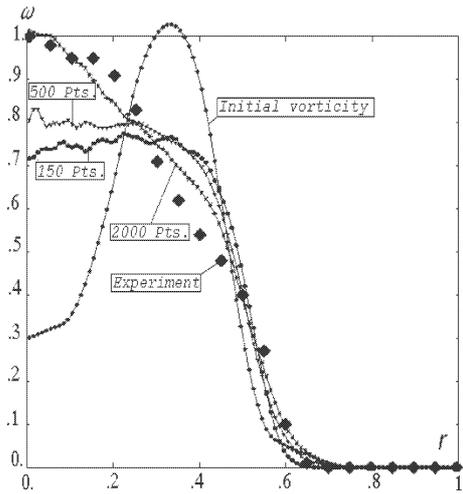


Figure 1. Distribution initiale de la concentration moyennée du fluide électronique de l'expérience de Huang–Driscoll et distributions finales pour l'expérience (symboles) ainsi que pour la simulation numérique (points) obtenues avec 150, 500 et 2000 tourbillons ponctuels.

Figure 1. Initial distribution of the averaged concentration of electronic fluid from experience of Huang–Driscoll and final distributions for the experience (symbols) and for numerical simulation (pts) obtained with 150, 500 and 2000 point vortices.

formation de structures cohérentes en spirale est observée. Après un temps correspondant à 10^2 révolutions du domaine de la distribution tourbillonnaire, on observe la formation d'un tourbillon central.

En observant les répartitions obtenues, on peut penser, à première vue, que les tourbillons évoluent vers l'état quasi-final unique dont la structure est gouvernée par les lois statistiques (parce que $N \gg 1$). Mais, les observations supplémentaires montrent une contradiction avec cette hypothèse : pour différentes distributions initiales axialement quasi-symétriques, le système n'évolue pas vers le même état final.

Modifions la configuration initiale. La Fig. 3 montre une séquence d'évolution de la distribution tourbillonnaire pour un système de $N \sim 10^3$ tourbillons co-rotatifs avec cette configuration initiale modifiée. Contrairement au cas précédent (Fig. 2), le système n'évolue pas vers un tourbillon unique : il évolue vers une structure pentagonale et nous n'avons pas observé de modifications significatives de l'état pour $t \gg 100$. Il est évident, à partir de la Fig. 3, que nous trouvons un désaccord entre le concept traditionnel de l'équilibre statistique final (quasi-homogène) et l'état quasi-final observé illustré par la Figs. 2 et 3 aux temps $t > 100$.

Batchelor [7] a indiqué que la distribution finale de vorticit e doit être arbitraire lorsque l'on considère le modèle d'un fluide non-visqueux car, selon lui, la distribution finale de vorticit e est déterminée par l'histoire de l'établissement de l'écoulement, et cette histoire inclut un effet significatif de non-linéarité. Un tel comportement du système, qui est régi par l'équation différentielle de mouvement (c'est-à-dire déterministe), peut être attribué à la structure particulière des équations. Celles-ci peuvent avoir la propriété, pour une certaine variété de paramètres et de variables, d'être singulièrement dépendantes des conditions initiales. Ceci veut dire que même un changement infinitésimal dans la condition initiale peut causer un changement fini dans les scénarios d'évolution et dans l'état final.

Comme les structures tourbillonnaires bidimensionnelles sont gouvernées par les « interactions » aux longues distances ($H_{ij} \sim \log r_{ij}$) et que les tourbillons ne se rapprochent pas à une distance très courte, le phénomène observé est similaire, en un certain sens, aux transitions de phase du premier ordre dans les systèmes physiques réels. Pour mettre en évidence ceci, nous rappelons que les transitions de phase du premier ordre requièrent une répulsion aux petites distances et une attraction aux grandes distances pour les structures élémentaires.

Si le phénomène observé (Fig. 3) est une « transition de phase du premier ordre », il entraîne une formation spontanée de cellules tourbillonnaires similaires à des réseaux cristallins (notons cependant, que les tourbillons quasi-ponctuels forment un système Hamiltonien particulier d  au fait qu'un tourbillon produit une vitesse, et non une accélération). Rappelons que des structures appelées, « les cristaux tourbillonnaires », ont été récemment observées dans des expériences de plasma non-neutres [8].

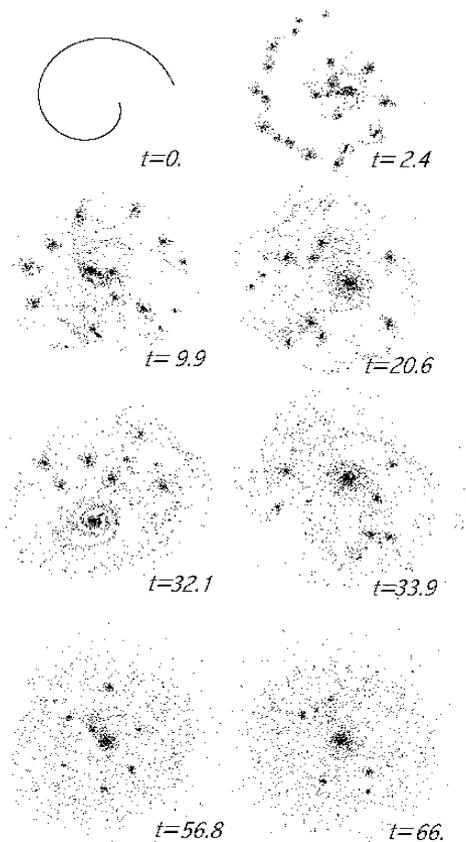


Figure 2. Évolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration en nappe tourbillonnaire sous forme de spirale avec une symétrie axiale perturbée. Les processus de fusion des petites structures et la formation de structures sous forme de spirale sont observées distinctement.

Figure 2. *Evolution of the system: sequence of states starting from a vortex-sheet spiral-like configuration with perturbed axial symmetry. The processes both of fusion of small structures and of formation of spiral-like structures are distinctly observed.*

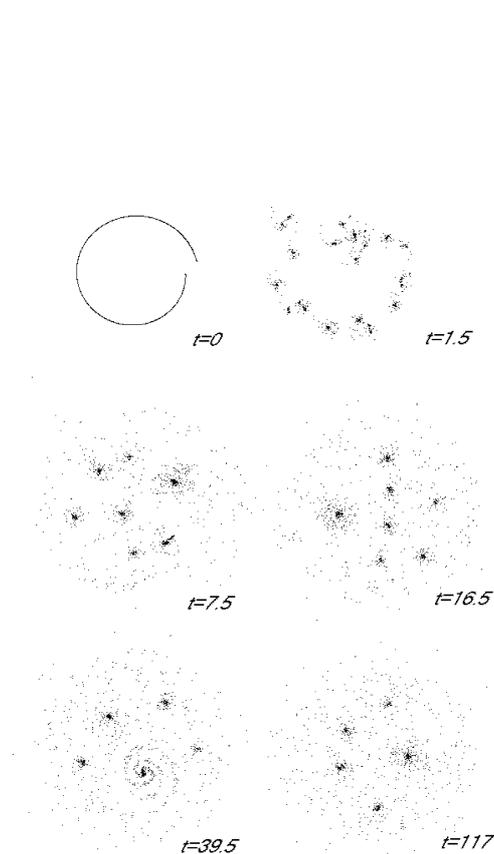


Figure 3. Évolution du système : séquence des états démarrant d'une configuration sous forme de nappe quasi-circulaire. Le système évolue vers une structure pentagonale tournante et uniforme qui oscille lentement proche de l'état d'équilibre. Nous avons observé que la structure pentagonale n'est pas dissipée avec le temps.

Figure 3. *Evolution of the system: sequence of states starting from an initial sheet-like quasi-circular configuration. The system evolves to a uniformly rotating, pentagonal structure which is slowly oscillating near the equilibrium state. We observed that the pentagonal structure is not dissipated in time.*

Références bibliographiques

- [1] (a) L. Onsager, Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento Suppl. 6 (1949) 279;
 (b) R. Robert, J. Sommeria, Relaxation towards a statistical equilibrium state in two-dimensional perfect fluid dynamics, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2776;
 (c) J. Miller, P.B. Weichman, M.C. Cross, Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, Phys. Rev. A 45 (4) (1992) 2328–2359;
 (d) V.L. Berdichevsky, Statistical mechanics of point vortices, Phys. Rev. E 51 (5) (1995) 4432–4452.

- [2] A.J. Chorin, Partition functions and equilibrium measures in two-dimensional and quasi-three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids* 8 (10) (1996) 2656–2660.
- [3] V. Pavlov, D. Buisine, S. Decossin, Whether the two-dimensional Eulerian turbulence evolves to a unique final state, *Phys. Fluids*, accepté.
- [4] (a) V. Goncharov, V. Pavlov, Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, *Eur. J. Mech. B Fluids* 16 (4) (1997) 509–555;
(b) V. Goncharov, V. Pavlov, On the Hamiltonian approach: Applications to geophysical flows, *Nonlinear Processes Geophys.* 5 (1998) 219–240;
(c) V. Pavlov, D. Buisine, V. Goncharov, Formation of vortex clusters on a sphere, *Nonlinear Processes Geophys.* 8 (2001) 9–19.
- [5] S. Decossin, V. Pavlov, Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons, *C. R. Acad. Sci. Paris* 329 (2001) 12.
- [6] X.-P. Huang, C.F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 2187.
- [7] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967, p. 537.
- [8] K.S. Fine, A.S. Cass, W.G. Flynn, C.F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3277.