

# Identification of damage fields using kinematic measurements

Damien Claire<sup>a,b</sup>, François Hild<sup>b</sup>, Stéphane Roux<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire “surface du verre et interfaces”, UMR CNRS/Saint Gobain, 39, quai Lucien Lefranc, 93303 Aubervilliers cedex, France

<sup>b</sup> LMT-Cachan, ENS de Cachan, CNRS-UMR 8535, Université Paris 6, 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

Received 8 July 2002; accepted after revision 17 September 2002

Note presented by Huy Duong Bui.

---

**Abstract** It is proposed to determine damage fields on the surface of a material by using *only* full-field displacement measurements. A finite element approach is developed for which the unknown damage field is assumed to be piece-wise constant. Two examples are discussed in which the displacement field is either obtained by finite element analyses or measured by digital image correlation. *To cite this article: D. Claire et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 729–734.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**damage / identification / inverse problem / full-field measurements**

## Identification de champs d'endommagement à l'aide de mesures cinématiques

**Résumé** À partir de mesures de champs de déplacement *exclusivement*, il est proposé d'identifier des champs d'endommagement à la surface du matériau. Une formulation aux éléments finis est développée pour laquelle le champ d'endommagement est supposé constant par morceaux. Dans les deux exemples traités, le champ de déplacement est soit obtenu par un calcul aux éléments finis soit mesuré par corrélation d'images numériques. *Pour citer cet article: D. Claire et al., C. R. Mécanique 330 (2002) 729–734.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**endommagement / identification / problème inverse / mesures de champs**

---

### Version française abrégée

La mesure de champ de déplacement [1,2] ouvre la voie à l'identification de propriétés élastiques locales. Parmi les méthodes actuellement développées, citons le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement [3–6], la méthode des champs virtuels [7,8] ou l'écart à la réciprocité [9]. Une stratégie numérique aux éléments finis est développée pour résoudre ce problème et validée sur quelques cas. Ikehata [10] a montré l'unicité de cette démarche dans le cas d'une variable d'endommagement isotrope petite.

On considère un domaine  $\Omega$ . En l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre sont décrites par (1) où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Pour une loi de comportement élastique isotrope (les paramètres de Lamé initiaux sont  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ ) couplée à l'endommagement [11], l'équation (2) est écrite en fonction du tenseur des déformations infinitésimales  $\epsilon$  et d'une variable d'endommagement isotrope  $D$ .

---

*E-mail addresses:* claire@lmt.ens-cachan.fr (D. Claire); hild@lmt.ens-cachan.fr (F. Hild); stephane.roux@saint-gobain.com (S. Roux).

L'endommagement est considéré comme constant par sous-domaine. Les équations (3) sont écrites sur chaque bord (i.e., continuité du vecteur contrainte). Si l'on note  $\mathbf{e}_x$  la normale à l'interface entre deux éléments  $i$  et  $j$ , on obtient les équations (4), où  $[[\star]]$  correspond au saut d'une quantité  $\star$ . On notera que ces équations permettent de déterminer le champ  $(1 - D)$  à une constante multiplicative près car des mesures d'effort ne sont pas considérées.

On applique directement les conditions de saut (4) à une formulation aux éléments finis 2D. À l'opposé d'une utilisation classique, les déplacements nodaux sont *connus* tandis que les coefficients élastiques (i.e. la variable d'endommagement) sont *inconnus*. La formulation aux éléments finis permet une écriture « faible » de l'équation d'équilibre (1) qui est linéaire en déplacement et en propriétés élastiques et est donnée par l'équation (5) où  $E_{ij}$  est l'énergie de déformation de deux éléments voisins  $i$  et  $j$ ,  $\mathbf{u}_k$  le vecteur déplacement du nœud milieu  $k$  commun à  $i$  et  $j$ . L'équation (5) peut être ré-écrite sous forme linéaire (6) ou logarithmique (7) en fonction des vecteurs nodaux  $\{\mathbf{u}_i\}$  et  $\{\mathbf{u}_j\}$ , des endommagements  $D_i$  et  $D_j$ , et des fonctions génériques  $\check{g}_n$  et  $\check{g}_n$  [12]. On obtient ainsi un système linéaire (8) qui dépend d'un vecteur colonne  $\{\mathbf{d}\}$  inconnu. Ce système est surdéterminé. Il est résolu par minimisation de la norme (9) par rapport à  $\{\mathbf{d}\}$ , où les éléments de la matrice diagonale positive  $[\mathbf{W}]$  sont définis par (10) avec  $\gamma = 1.5$  comme valeur optimale. On aboutit ainsi au système (11) dans lequel le vecteur  $\{\mathbf{q}\}$  dépend des déplacements nodaux. Pour le problème (11), la matrice  $[\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}]$  a une valeur propre nulle et pour vecteur propre associé  $\{\mathbf{d}\}^t = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$ . Dans ce cas, il faut fixer une valeur d'une composante du vecteur  $\{\mathbf{d}_0\}$  (12). Le système linéaire (13) est résolu à l'aide d'une méthode de gradient conjugué, en prenant en compte le fait que la matrice  $[\mathbf{M}]^t[\mathbf{W}][\mathbf{M}]$  est creuse.

Une première série de calculs concerne une structure carrée et discrétisée à l'aide de  $a \times a$  éléments Q2 en contrainte plane. Trois côtés sont encastres ; au milieu du quatrième, une force est appliquée (Fig. 1(a)). On distribue un endommagement  $D$  aléatoirement entre 0 et  $D_{\max}$  pour des configurations dites aléatoires ou stratifiées (Fig. 1(b)). Les déplacements, donnée d'entrée de l'analyse, sont calculés au préalable de manière classique. L'erreur  $\eta$  (14) permet de mesurer la qualité des résultats,  $D_e$  correspond à la valeur de l'endommagement de l'élément  $e$ , l'indice  $_{pre}$  indique une valeur imposée et l'indice  $_{cal}$  une valeur calculée. Les résultats du Tableau 1 montrent qu'une précision de quelques pourcents est obtenue pour toutes les configurations testées, que les données d'entrée soient bruitées ( $\bar{\eta}$ ) ou non ( $\eta$ ).

Un second exemple porte sur un matériau composite constitué d'une matrice vinylester renforcée par des fibres de verre E. Une éprouvette en croix a été conçue et est sollicitée dans une machine multiaxiale (Fig. 2(a)). Le champ de déplacement de la Fig. 2(b) a été mesuré par corrélation d'images numériques [13]. La Fig. 2(c) montre le champ d'endommagement calculé pour le même niveau d'effort. On aperçoit quatre éléments très fortement endommagés au coin supérieur gauche et un autre aux autres coins. Ces observations sont en accord avec les discontinuités de déplacement de la Fig. 2(b) et montrent la faisabilité de la technique avec des données expérimentales « extrêmes ». On notera qu'une stratégie par post-traitement de l'endommagement peut également être utilisée [14] pour évaluer un champ d'endommagement à partir de champs de déformation expérimentaux. Cependant, contrairement à la démarche développée ici, les équations d'équilibre ne sont pas satisfaites.

Cette procédure d'identification a été développée en vue de déterminer des champs d'endommagement isotrope à partir de champs de déplacement plan, mais le même type d'analyse peut être appliqué à des cas thermiques à partir de champs de température [12].

---

The measurement of displacement fields [1,2] allows for the development of identification procedures of elastic and damage parameters. Among various approaches, one can mention updating techniques based on the constitutive equation error [3–6], the virtual field method [7,8] or the reciprocity gap concept [9]. Ikehata [10] has shown the uniqueness of such type of approach with a small isotropic damage variable. A numerical technique is proposed to solve the identification problem *solely* based on the displacement field, by assuming piece-wise constant elastic parameters related to damage variables.

## 1. Formulation of the method

### 1.1. Preliminaries

Let us consider a continuum domain  $\Omega$ . In the absence of body forces, the equilibrium equations are written as

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

where  $\boldsymbol{\sigma}$  is the Cauchy stress tensor. For a linear elastic and isotropic constitutive equation coupled with isotropic damage  $D$  [11] (the Lamé's parameters are denoted by  $\lambda_0$  and  $\mu_0$  for an undamaged material), Eq. (1) becomes

$$[2\mu_0\boldsymbol{\epsilon} + \lambda_0 \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1}] \mathbf{grad}[\ln(1 - D)] + \mathbf{div}[2\mu_0\boldsymbol{\epsilon} + \lambda_0 \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1}] = \mathbf{0} \quad (2)$$

when the damage parameter  $D$  varies from one point to another,  $\mathbf{1}$  denotes the unit tensor and  $\boldsymbol{\epsilon}$  the infinitesimal strain tensor. In the following examples, the displacements will be obtained either by finite element analyses or by digital image correlation. The damage parameters are assumed to be constant over various elements. The previous equations are therefore written for each boundary of an element (i.e., continuity of the stress vector). Let  $\mathbf{n}$  denote the normal of an interface between two elements  $i$  and  $j$

$$\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_j \mathbf{n}, \quad (3)$$

that can be written for a normal  $\mathbf{e}_x$

$$[(1 - D)\{\lambda_0(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu_0\epsilon_{xx}\}] = 0, \quad [(1 - D)\mu_0\epsilon_{xy}] = 0, \quad [(1 - D)\mu_0\epsilon_{xz}] = 0, \quad (4)$$

where  $[\star]$  denotes the jump of a quantity  $\star$ . The same type of result is obtained for a normal  $\mathbf{e}_y$  or  $\mathbf{e}_z$ . The present formulation does not give an absolute determination of the damage field within the solid. However, relative damage between elements can be determined. The proposed method gives access to the complementary damage field  $1 - D$  up to a constant multiplicative factor. Estimates of the latter have to be based on load measurement(s), and are considered as exogenous with respect to the considered problem.

### 1.2. FE formulation

The jump conditions (4) are applied directly to a finite element formulation of the problem. Since only 2D displacement fields are considered, the present derivation is performed with 2D finite elements. However, at variance with classical use, the nodal displacements are *known*, whereas the elastic properties (i.e., the damage parameter) are *unknown*. The finite element method allows one to write for each nodal point a 'weak' form of the equilibrium equation (1) which is linear in displacements and elastic properties. In the absence of applied load on the considered node, the continuity equations (3) can be derived for each middle node  $k$  between two elements  $i$  and  $j$

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

where  $E_{ij}$  is the strain energy of the two neighboring elements and  $\mathbf{u}_k$  the displacement vector of the middle node belonging to  $i$  and  $j$ . If  $\{\mathbf{u}_i\}$  denotes the column vector of nodal displacements of the first element and  $\{\mathbf{u}_j\}$  of the second, the following  $n$ th condition is

$$\bar{g}_n(\{\mathbf{u}_i\})(1 - D_i) = \check{g}_n(\{\mathbf{u}_j\})(1 - D_j), \quad (6)$$

which can be written in logarithmic form

$$\ln(1 - D_i) - \ln(1 - D_j) = \ln|\check{g}_n(\{\mathbf{u}_j\})| - \ln|\bar{g}_n(\{\mathbf{u}_i\})|, \quad (7)$$

where the functions  $\bar{g}_n$  and  $\check{g}_n$  are generic and only depend on the nodal displacements [12]. A linear system has to be solved

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{q}\}, \quad \text{with } \{\mathbf{d}\}^t = \{\ln(1 - D_1) \ln(1 - D_2) \dots \ln(1 - D_N)\}, \quad (8)$$

where  $\{q\}$  is a vector that depends on the nodal displacements. The system (8) is over-determined. It is solved by minimizing the following norm

$$\mathcal{T} = \|[M]\{d\} - \{q\}\|_{W(\Omega)}^2 \tag{9}$$

with respect to the column vector  $\{d\}$ , where  $\|\{x\}\|_{W(\Omega)}^2 = \sum_i W_i x_i^2$ . The elements of the diagonal matrix  $[W]$  are defined for each equation  $n$

$$W_n = |\bar{g}_n(\{u_i\}) + \check{g}_n(\{u_j\})|^\gamma, \tag{10}$$

so that the weight is heavier when the pseudo-stress component along the direction of the considered degree of freedom  $n$  is high (i.e., locations where the information is the most reliable). Based on the generic form of these weight functions, a systematic investigation of the quality of the solution as a function of  $\gamma$  leads to the optimal choice  $\gamma = 1.5$ . No theoretical justification for this value is proposed.

The following linear system is solved

$$([M]^t[W][M])\{d\} = ([M]^t[W])\{q\}. \tag{11}$$

For problem (11), the matrix  $[M]^t[W][M]$  has a zero eigenvalue with a corresponding eigenvector  $\{d\}^t = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$  since the damage parameter is determined up to a multiplicative constant. Therefore, one needs to specify one component of the unknown vector  $\{d\}$ . Let us consider

$$\{d\}'_0 = \{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \ln(1 - D)_{i_0} \ 0 \ \dots \ 0\} \quad \text{and} \quad \{\delta\} = \{d\} - \{d\}'_0, \tag{12}$$

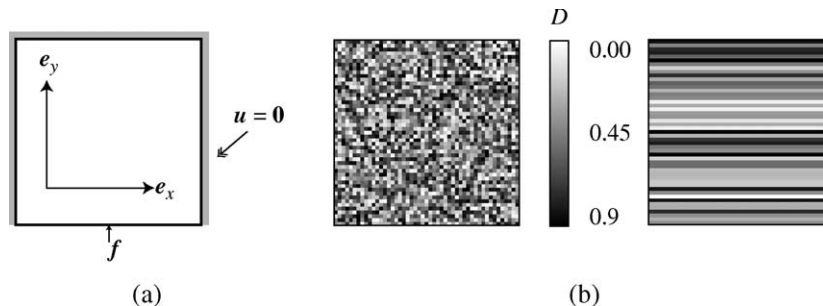
one has to solve

$$([M]^t[W][M])\{\delta\} = ([M]^t[W])\{q\} - ([M]^t[W][M])\{d\}'_0. \tag{13}$$

A conjugate gradient scheme is chosen by accounting for the sparseness of  $([M]^t[W][M])$ .

## 2. Application with FE “measurements”

The studied structure is a square discretized by using  $a \times a$  Q2 elements under the assumption of plane stress.<sup>1</sup> Three edges are clamped and in the middle of the fourth edge, a point force is applied (Fig. 1(a)). First, an elastic FE analysis is performed and the displacements are computed. From this last information, the damage field is sought by using the afore-mentioned method. The damage probability density function is uniform and  $D$  varies between 0 and  $D_{\max}$  for random or layered configurations (Fig. 1(b)). For the considered structure, when the boundary conditions are not considered, there are  $2a(a - 1)$  middle nodes, and  $a^2$  damage unknowns to determine. To evaluate the quality of the results, the following error is



**Figure 1.** (a) Considered structure. In the middle of one edge a vertical force  $f$  is applied. (b) Random or layered damage fields  $D$  ( $a = 49$ ,  $D_{\max} = 0.9$ ).

**Figure 1.** (a) Structure considérée. Une force ponctuelle  $f$  est appliquée au milieu d'un côté. (b) Champs d'endommagement  $D$  aléatoire ou stratifié ( $a = 49$ ,  $D_{\max} = 0,9$ ).

**Table 1.** Errors for different configurations (first number:  $a$ , second number:  $10 \times D_{\max}$ , random: each element has a damage parameter independent of its neighbors, layered: each row has the same value).

**Tableau 1.** Erreurs pour différentes configurations (premier nombre :  $a$ , second nombre :  $10 \times D_{\max}$ , random : chaque élément a une valeur d'endommagement différente de ses voisins, layered : chaque ligne d'élément a la même valeur d'endommagement).

Configuration	10–0	10–9-layered	10–9-random	49–0	49–9-layered <sup>‡</sup>	49–9-random <sup>‡</sup>
$\eta$	0.002	0.006	0.013	0.017	0.024	0.032
$\bar{\eta}$	0.015	0.016	0.026	0.020	0.032	0.051

<sup>‡</sup> Configurations of Fig. 1(b). (Configurations de la Fig. 1(b).)

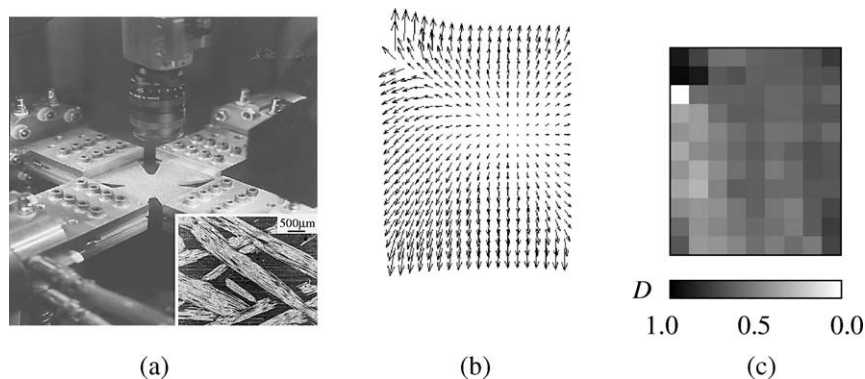
introduced

$$\eta^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{e=1}^{a^2} \left[ \frac{(1 - D_e)_{\text{cal}} - (1 - D_e)_{\text{pre}}}{(1 - D_e)_{\text{pre}}} \right]^2, \quad (14)$$

where  $D_e$  is the damage parameter of element  $e$ , the subscripts <sub>pre</sub> correspond to a prescribed value and <sub>cal</sub> to a calculated value, respectively. The results shown in Table 1 show that an error  $\eta$  less than a few percents can be achieved for any of the tested configurations. This is also true locally [12]. Furthermore, to study the sensitivity of the method, a white noise has been added to the initial data (i.e., it contains modes at the scale of the heterogeneities). For an amplitude corresponding to an average of relative strain fluctuation greater than 10%, the average error  $\bar{\eta}$  is given in Table 1. The order of magnitude is still the same. The robustness and accuracy of the method are therefore demonstrated for uniform, layered or random damage distributions.

### 3. Analysis of a biaxial experiment on a composite material

The studied composite is made of a vinylester matrix reinforced by continuous E glass fibers (Fig. 2(a)). The fiber volume fraction is equal to 30%. The material can be modeled as an isotropic material since the fiber orientations are uniformly distributed in the plane. A cross-shaped specimen has been designed. The ligament length is equal to 36.5 mm and the connecting radius is equal to 5 mm. The thickness is equal



**Figure 2.** (a) Sample in the testing machine ASTRÉE and microstructure of the studied composite. (b) Displacement field measured by digital image correlation. (c) Damage field computed by using the proposed procedure for the same load level.

**Figure 2.** (a) Éprouvette dans la machine ASTRÉE et microstructure du composite étudié. (b) Champ de déplacement mesuré par corrélation d'images numériques. (c) Champ d'endommagement obtenu par le traitement proposé pour le même niveau de chargement.

to 2.5 mm and the size of a finite element is about 5 mm. The specimen is equally loaded in a multiaxial testing machine (Fig. 2(a)). In the following, the displacement measurements performed just before failure are considered.

Fig. 2(b) shows the displacement field obtained by digital image correlation [13] and Fig. 2(c) shows the damage field identified by using the previous approach. Four highly damaged elements are visible on the top left corner. To a lesser extent, one can also note damaged elements on the other corners. These observations are consistent with the displacement discontinuities of Fig. 2(b). This example shows that the present procedure can also deal with experimental data even in the case of ‘extremely’ damaged states. It can be noted that damage post-processing strategies can also be used to evaluate damage states from experimental strain fields [14]. However, contrary to the present approach, the equilibrium equations are not satisfied.

#### 4. Conclusion and perspectives

An identification procedure was developed to determine isotropic damage fields by using 2D displacement fields. The same type of approach can be applied in heat transfer cases [12]. The same principle can be used in a 3D situation provided the data are also 3D. Lastly, the present analysis can be extended to anisotropic damage formulations as well as more complex constitutive equations for which the kinetics is unknown.

**Acknowledgements.** This work was funded by CNRS. The experiments reported herein were performed with the help of S. Calloch. Useful discussions with H.D. Bui, G. Geymonat, M. Grédiac and S. Pagano are acknowledged.

---

<sup>1</sup> From a theoretical point of view, this condition cannot be fully satisfied. However, it is believed that the assumption can be made in the practical examples discussed herein.

#### References

- [1] Y. Berthaud, M. Cottron, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, V. Valle (Eds.), *Photomécanique*, 2001, GAMAC, 2001.
- [2] A. Lagarde (Ed.), *Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics*, Kluwer, 2000.
- [3] H.D. Bui, A. Constantinescu, Spatial localization of the error of constitutive law for the identification of defects in elastic solids, *Arch. Mech.* 52 (2000) 511–522.
- [4] G. Geymonat, F. Hild, S. Pagano, Identification of elastic parameters by displacement field measurement, *C. R. Mecanique* 330 (2002) 403–408.
- [5] R.V. Kohn, B.D. Lowe, A variational method for parameter identification, *Math. Mod. Numer. Anal.* 22 (1988) 119–158.
- [6] P. Ladevèze, D. Nedjar, M. Reynier, Updating of finite element models using vibration tests, *AIAA* 32 (1994) 1485–1491.
- [7] M. Grédiac, Principe des travaux virtuels et identification, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II* 309 (1989) 1–5.
- [8] M. Grédiac, E. Toussaint, F. Pierron, L’identification des propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis, *C. R. Mecanique* 330 (2002) 107–112.
- [9] H.D. Bui, Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l’endommagement, *C. R. Colloq. Nat. Calc. Struct. Hermes* 1 (1995) 25–35.
- [10] M. Ikehata, Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection, *SIAM J. Appl. Math.* 50 (1990) 1635–1644.
- [11] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [12] D. Claire, S. Roux, F. Hild, Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs, *Méca. Ind.* (2002), soumis.
- [13] F. Hild, CORRELI<sup>LMT</sup>: A software for displacement field measurements by digital image correlation, Report 254, LMT-Cachan, 2002.
- [14] J.-N. Périé, S. Calloch, C. Cluzel, F. Hild, Analysis of a multiaxial test on a C/C composite by using digital image correlation and a damage model, *Exp. Mech.* (2002), in press.