

Instabilités absolue et convective de l'écoulement de Poiseuille en conduite viscoélastique

Mahmoud Hamadiche

LMFA, ECL/UCB, 36, av. Guy des collongue, BP 163, 69131 Ecully cedex, France

Reçu le 25 février 2002 ; accepté après révision le 4 septembre 2002

Note présentée par René Moreau.

Résumé

La stabilité de l'écoulement de Poiseuille en conduite viscoélastique de section circulaire a été étudiée par l'auteur dans différentes publications. Dans cet étude, on considère la stabilité spatio-temporelle de cet écoulement. À cette fin, la méthode d'orthonormalisation est utilisée dans la résolution du système linéaire régissant une perturbation infinitésimale, ce qui permet d'avoir un algorithme efficace permettant l'exploration de la relation de dispersion du système dans les plans complexes de la fréquence et du nombre d'ondes. Une nouvelle stratégie de recherche des valeurs propres est introduite ce qui permet d'éliminer la formule de récurrence utilisée auparavant par l'auteur. Il est montré que le système composé de l'écoulement de Poiseuille et d'une conduite viscoélastique peut avoir une instabilité absolue et une instabilité convective. Le type d'instabilité trouvée dépend des conditions aux limites imposée sur la paroi extérieure du tube. Pour des conditions aux limites ne permettant pas l'obstruction du tube, il est montré que l'un des deux modes axisymétrique trouvés représente une instabilité absolue et l'autre représente une instabilité convective. Pour des conditions aux limites permettant l'obstruction du tube l'instabilité absolue est non axisymétrique. Dans ce dernier cas le rapport des fréquences des modes absolument instables dans leurs points de refolement est en bon accord avec les résultats expérimental connu dans la littérature. L'instabilité absolue trouve son origine dans le milieu solide. *Pour citer cet article : M. Hamadiche, C. R. Mecanique 330 (2002) 769–775.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des fluides / stabilité absolue et convective / fluide structure interaction

Absolute and convective instabilities of Poiseuille flow in viscoelastic tube

Abstract

The temporal stability of Poiseuille flow in viscoelastic tube has been studied by the author in a set of papers. In this paper the spatio-temporal stability of the foregoing system is examined. The method of orthonormalization is used in the numerical computation leading to an efficient algorithm to solve for an infinitesimal axisymmetric and nonaxisymmetric disturbances. Then a new method for eigenmodes search technique is founded which eliminates the need for the recurrence formula, developed previously by the author, in order to find the eigenmodes of the system. This new technique leads to more efficient and tractable algorithm to inspect the dispersion relation of the system in the complex wave number and frequency planes. The nature of the instabilities depends on the boundary conditions imposed at the outside tube surface. In the range of physical parameters taken into account in this paper, it is found that for a noncollapsible tube one of the two axisymmetric unstable modes represents an absolute instability. For collapsible tube, the absolute instability is induced by a set of nonaxisymmetric modes. The ratio of the frequency of these absolute unstable modes in their cusp points are in good agreement

Adresse e-mail : hamadich@mecaflu.ec-lyon.fr (M. Hamadiche).

with the experimental finding. The absolute instability is introduced by solid-based mode.

To cite this article: M. Hamadiche, C. R. Mecanique 330 (2002) 769–775.

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fluid mechanics / absolute and convective instabilities / fluid structure interaction

Abridged English version

We consider in this paper the spatio-temporal instability of Poiseuille flow in a viscoelastic collapsible or noncollapsible tube. In the latter case, the tube is prevented from collapse by being fixed to an outer rigid wall. The system is formed by an incompressible, Newtonian fluid of density ρ , viscosity η , and maximum velocity V , flowing in a compliant collapsible or noncollapsible tube of inner radius R , and outer radius RH , R being the inner radius in the equilibrium state. The compliant wall is made of an incompressible, viscoelastic material of density ρ equal to the fluid density, viscosity η_s , and shear modulus G . In the noncollapsible case, the pliable material is surrounded by a rigid cylindrical wall at the surface $r = RH$. In the remainder of this paper, dimensionless variables will be used. The length scale is the radius of the tube R , the time scale is $(\rho R^2/G)^{1/2}$, and the velocity scale is $(G/\rho)^{1/2}$. We define the dimensionless parameter $\Gamma = (\rho V^2/G)^{1/2}$. The mean flow velocity profile is a Hagen–Poiseuille flow. The full nonlinear dynamic equations of the system are linearized around the prescribed dynamic equilibrium position. The obtained linearized homogeneous differential equations are solved numerically by a fourth-order Runge–Kutta method associated with the method of orthonormalization. The application of the boundary conditions at the interface leads to an algebraic homogeneous system which has a non-trivial solution only when the determinant of its matrix is null. The theory of Cauchy is used in order to localize the root of the determinant of the matrix and consequently the eigenmodes. The application of Cauchy theory leads to a nonlinear algebraic equations in the form of Vandermonde matrix, the eigenmodes are the roots of this nonlinear system of equations, (see Hamadiche [1]). This nonlinear system is transformed to a polynomial equation (see Lelong-Ferrand and Arnaudies [7]) and solved numerically. In the old method the degree of the polynomial is less than or equal to three, in this paper there is no limitation in the degree of the polynomial. This technique rules out the recurrence formula needed in the old method. Moreover, the Spatio-temporal stability analysis is used to study the stability of the system.

The temporal stability of the system has been studied by Hamadiche [1,2], Hamadiche and Gad-el-Hak [3] (and references therein) where the system is found to be unstable to both axisymmetric and nonaxisymmetric disturbances. The unstable modes have been classified using Carpenter and Garrad [8] and Benjamin [9] classifications. In this paper, Briggs's [12] criterion will be used in order to distinguish the unstable modes representing absolute instabilities from those representing convective instabilities. According to Huerre and Monkewitz [4], the instability is said to be convective if the unstable mode has positive amplification rate only in a frame of reference moving away from the source of excitation. Accordingly, an unstable convective mode has negative amplification rate in the frame of reference attached to the source. Therefore an observer fastened to the source sees the convective unstable mode dampened if the source of excitation is extinguished. An unstable mode representing an absolute instability has a positive amplification rate in the frame of reference attached to the source. Therefore, an observer fastened to the source sees the perturbation grow even though the source of the excitation is extinguished. Mathematically speaking, let the k -plane be the complex wave number plane and the s -plane be the complex Laplace plane. An absolute instability is revealed by a pinch point of the Fourier contour by two eigenmodes coming from different halves of the k -plane during the process of lowering Laplace contour toward the real axis in s -plane. This pinch point prohibits the Laplace contour from reaching the real axis of the s -plane otherwise the disturbance will be discontinuous. The existence of a pinch point of the Fourier contour may be confirmed or invalidated by inspection of the Laplace contour during its deformation toward the real

axis. During this deformation a cusp point in the Laplace contour reveals the existence of a pinch point of the Fourier contour, providing that this cusp point is beneath the image of the real wave number axis by the dispersion relation and localized in the region of positive amplification rate, as has been shown by Kupfer et al. [5].

The linear equations and the boundary conditions associated with axisymmetric or nonaxisymmetric disturbances of the foregoing system are described by Hamadiche [1,2] and Hamadiche and Gad-el-Hak [3] as well as a numerical method devoted to finding the temporal eigenmodes of the system. In this paper the numerical method is improved by the use of the orthonormalization method developed by Scott and Watts [6] in order to solve for complex wave number and complex amplification rate. The use of the orthonormalization keeps the independence of the numerical linear solutions and ensure a quick convergence of the numerical method. Therefore, it makes easier the inspection of the dispersion relation in order to localize the pinch point in the Fourier contour and the cusp point in the Laplace contour. The eigenvalue search technique used by Hamadiche [1] has been improved in this paper. In fact in the old method the polynomial degree is limited to three which exacts the use of recurrence formula in order to compute all the eigen modes. This constraint is removed as follows. Let C be a closed curve in the s -plane, the eigenmodes inside C satisfy

$$Q_j = \sum_{m=1}^N z_m^j = \int_C z^j \frac{dz D}{D} dz$$

where $D(z, k) = 0$ is the dispersion relation, z_m are the eigenmodes inside C which we look for and N is the number of eigen modes enclosed by C which must be equal or less than three in the old method. The function $D(z, k)$ is computed by solving numerically the linear differential equations with appropriate boundary conditions as explained by Hamadiche and Gad-el-Hak [3] (and references therein). Thus the functions Q_j can be computed numerically. In order to solve for z_m we have to solve the foregoing nonlinear equations. It is well known in the standard mathematical text books, see Lelong-Ferrand and Arnaudies [7], that the solution of the foregoing nonlinear equations are the roots of the following polynomial of degree N

$$P(z) = z^N - \sigma_1 z^{N-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k z^{N-k} + \dots + (-1)^N \sigma_N$$

where the σ_k are given by the recurrence formula

$$\sigma_1 = Q_1, \quad -k(-1)^k \sigma_k = Q_k - \sigma_1 Q_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} Q_1, \quad k > 1$$

The roots of the foregoing polynomial can be found by any standard numerical procedure available in the computer libraries. Known the eigen modes enclosed by the curve C , the method of continuation is used to inspect their variation with the variation of physical parameters of the system.

0.1. Noncollapsible tube results

For a noncollapsible tube, it is found that all the contours concerning nonaxisymmetric modes and one axisymmetric unstable mode may be lowered to the real axis of s -plane. Then, it is concluded that those modes represent convective instabilities. The foregoing Laplace contours are not plotted here for brevity. However, it is found that there is a cusp point in the Laplace contour of one unstable axisymmetric mode, Fig. 1(a), this cusp point is localized beneath the image, by the dispersion relation, of the real wave number axis and in the zone of positive amplification rate. The pinch point of the Fourier contour, imaged by the dispersion relation of the cusp point, is shown in Fig. 1(b). This result leads us to conclude that the instability represented by this mode is an absolute instability. Fig. 1(c) shows the frequency versus the wave number of the two modes, in the vicinity of their coalescence point, leading to the absolute instability of the system.

0.2. Collapsible tube results

For collapsible tube, it is found that there is a set of a standing unstable nonaxisymmetric waves representing absolute instabilities and a set of unstable upstream and downstream propagated waves

representing convective instabilities. Two standing waves have equal frequency in their cusp points. The frequency of the other standing waves, in their cusp points, are a multiple of the frequency of the two first waves and that in good qualitative agreement with experimental findings available in the literature (see, Bertram et al. [10,11] and references herein). The frequencies of these absolute unstable modes in their cusp points are shown in Table 1. It is found that the frequency ratios shown in Table 1 are preserved for all Reynolds number values. At high Reynolds number the first absolute unstable mode becomes convective while the others stay absolutely unstable. Finally, it is found that the viscosity of the solid dampens to different degrees these unstable modes.

Dans cet article nous nous intéressons à la stabilité spatio-temporelle de l'écoulement de Poiseuille en conduite viscoélastique pliante ou non pliante. Le système est composé d'un fluide, incompressible, Newtonien de densité ρ , viscosité η , et vitesse maximum V . Le fluide étant en mouvement à l'intérieur d'un tube viscoélastique du rayon intérieur R , et du rayon extérieur RH , R étant le rayon intérieur dans l'état d'équilibre. Le tube viscoélastique est composé d'un matériel incompressible, viscoélastique de densité ρ égal à la densité du fluide, viscosité η_s , et module de cisaillement G . Afin que le tube viscoélastique soit non pliant, il est fixé à une paroi extérieure rigide à $r = RH$. Dans la suite de l'article on utilise les grandeurs de référence suivant : R pour la distance, $(\rho R^2/G)^{1/2}$ pour le temps, et $(G/\rho)^{1/2}$ pour la vitesse. On introduit le variable sans dimension $\Gamma = (\rho V^2/G)^{1/2}$. La stabilité temporelle du système mentionné a été étudiée par Hamadiche [1,2] et Hamadiche et Gad-el-Hak [3].

En suivant Huerre and Monkewitz [4], l'instabilité est dite convective si un observateur lié à la source d'excitation voit la perturbation amortie après extinction de la source. Dans le cas contraire l'instabilité est dite absolue. Autrement dit, dans ce cas où l'instabilité est absolue, l'observateur lié à la source voit la perturbation amplifiée même après extinction de la source. Pour cette raison une instabilité absolue est beaucoup plus dévastatrice qu'une instabilité convective. Kupfer et al. [5] ont montrée que l'existence d'un point de pincement du contour de Fourier est équivalent à l'existence d'un point de refoulement de premier ordre dans le contour de Laplace à condition que ceci se trouve sous l'image, par la relation de dispersion, de l'axe réel du plan k et dans la zone du plan s où le taux d'amplification temporelle est positif.

Les équations linéaires régissant des perturbations infinitésimale ainsi que les conditions aux limites associées sont écrites par Hamadiche [1,2], Hamadiche et Gad-el-Hak [3]. La méthode numérique utilisée par ces auteurs afin de trouver les valeurs propres du système est améliorée dans ce papier afin de pouvoir inspecter la relation de dispersion et trouver les points de pincement et les points de refoulement du premier ordre. L'amélioration est faite d'une part au niveau de la résolution du système linéaire en introduisant la méthode d'orthonormalisation développée par Scott et Watts [6], ce qui permet à la méthode numérique de converger rapidement et avec relativement peu de points. D'autre part, une amélioration est apportée à la méthode de recherche des valeurs propres. En effet la technique de recherche des valeurs propres dans l'ancienne méthode conduit à un polynôme de degré trois au maximum ce qui exige l'utilisation d'une formule de récurrence afin de déterminer les valeurs propres à l'intérieur d'une courbe fermée donnée. Cette contrainte peut être surmontée comme suit : soit une courbe fermée C dans le plan s , les valeurs propres à l'intérieur de cette courbe satisfont la relation suivante

$$Q_j = \sum_{m=1}^N z_m^j = \int_C z^j \frac{d_z D}{D} dz$$

où $D(z, k) = 0$ est la relation de dispersion, z_m sont les valeurs propres recherchées à l'intérieur de C et N est le nombre des valeurs propres à l'intérieur de C qui doit être inférieur à trois dans l'ancienne méthode. La fonction $D(z, k)$ est calculée comme par la méthode proposée par Hamadiche [1,2] et Hamadiche et Gad-el-Hak [3] en utilisant ici la méthode d'orthonormalisation. La fonction $D(z, k)$ étant calculée, on

peut déduire par intégration les fonctions Q_j . Afin de trouver les valeurs propres z_m , il est bien connu que la solution du système d'équations non linéaire précédent est l'ensemble des racines du polynôme de degré N suivant (voir Lelong-Ferrand et Arnaudies [7])

$$P(z) = z^N - \sigma_1 z^{N-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k z^{N-k} + \dots + (-1)^N \sigma_N$$

où les σ_k sont donné par le formule de récurrence suivante

$$\sigma_1 = Q_1, \quad -k(-1)^k \sigma_k = Q_k - \sigma_1 Q_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} Q_1, \quad k > 1$$

Les racines du polynôme précédent peuvent être calculées par les procédures disponibles dans les bibliothèques des ordinateurs. Afin de calculer les valeurs propres en fonctions des paramètres de contrôle du système, comme l'épaisseur de la couche viscoélastique, la viscosité du milieu solide, le nombre de Reynolds et le module d'élasticité, la méthode de continuation est utilisée.

1.1. Résultats concernant un tube non pliant

Pour un tube non pliant, il est trouvé que les contours de Laplace de tous les modes instables non axisymétriques et d'un mode instable axisymétrique ne contiennent pas un point de refoulement du premier ordre « cusp point ». De ce fait, il a été possible de les déformer jusqu' à l'axe réel dans le plan s et de conclure que ces modes représentent une instabilité convective. Ces contours ne sont pas tracés ici pour ne pas trop charger la note. Cependant, nous avons trouvé que le contour de Laplace de l'un des modes instables axisymétrique, appelé (mode **I**) par Hamadiche et Gad-el-Hak [3], contient un point de refoulement de premier ordre, comme on peut le voir sur la Fig. 1(a). Le point de pincement du contour de Fourier, image par la relation de dispersion du point de refoulement du première ordre, est montré sur la Fig. 1(b). De ces deux figures on peut conclure que l'instabilité présentée par ce mode est une instabilité absolue. Les propriétés de ce mode ont été étudiées par Hamadiche et Gad-el-Hak [3]. En particulier, il est montré dans cette étude que le mode **I** à l'origine est du au milieu solide, donc selon la classification introduite par Carpenter et Garrad [8] ce mode est « solid-based mode ». De plus, il a été montré que les composantes de ce mode ayant une vitesse de groupe différente de zéro se propagent vers l'aval (la vitesse de groupe est positive) et que la viscosité de la paroi solide l'amortit. Ces considérations ainsi que le fait que la composante de ce mode ayant une vitesse de groupe nulle n'était pas connue ont conduit les auteurs cités à conclure que ce mode appartient à la classe **B** introduite par Benjamin [9]. Cependant la classification de Benjamin [9] est intuitive car les effets de la viscosité, selon lesquels les modes sont classés, peuvent être importants pour une composante et négligeables pour une autre du même mode. De plus cette classification est introduite sur un cas particulier (voir Benjamin [9]) où le milieu solide n'a qu'un seul degré de liberté. Néanmoins, s'il est vraiment nécessaire d'utiliser la classification de Benjamin, les modes représentant une instabilité absolue sont plutôt proches de la classe **C**. La Fig. 1(c) montre la fréquence en fonction du nombre d'onde réel des deux modes formant le point de refoulement du premier ordre sur le contour de Laplace et le point de pincement du contour de Fourier au voisinage du point de coalescence. De la forme des deux courbes on déduit que la coalescence résulte d'un mode instable ayant une vitesse de groupe, $c_g = -ds_r/dk$, positive (propagation vers l'aval) sauf au point de coalescence où elle devient nulle (Standing wave) avec un mode stable ayant une vitesse de groupe négative (propagation vers l'amont) sauf au point de coalescence où elle devient nulle aussi. En fin, notons que la viscosité de milieu solide amortie à différents degrés ces modes instables.

1.2. Résultats concernant un tube pliant

Pour une conduite pliante, l'épaisseur de la couche viscoélastique est choisie, de telle sorte que la conduite non pliante soit stable. De ce fait l'instabilité trouvée est inhérente aux tubes pliants. Il est montré que ce système peut avoir des instabilités absolue et convective. L'instabilité absolue est représentée par un groupe de modes instables non axisymétriques. Deux de ces modes ont la même fréquence en leurs points de refoulements du premier ordre « cusp point » où les modes absolument instables fusionnent avec des modes

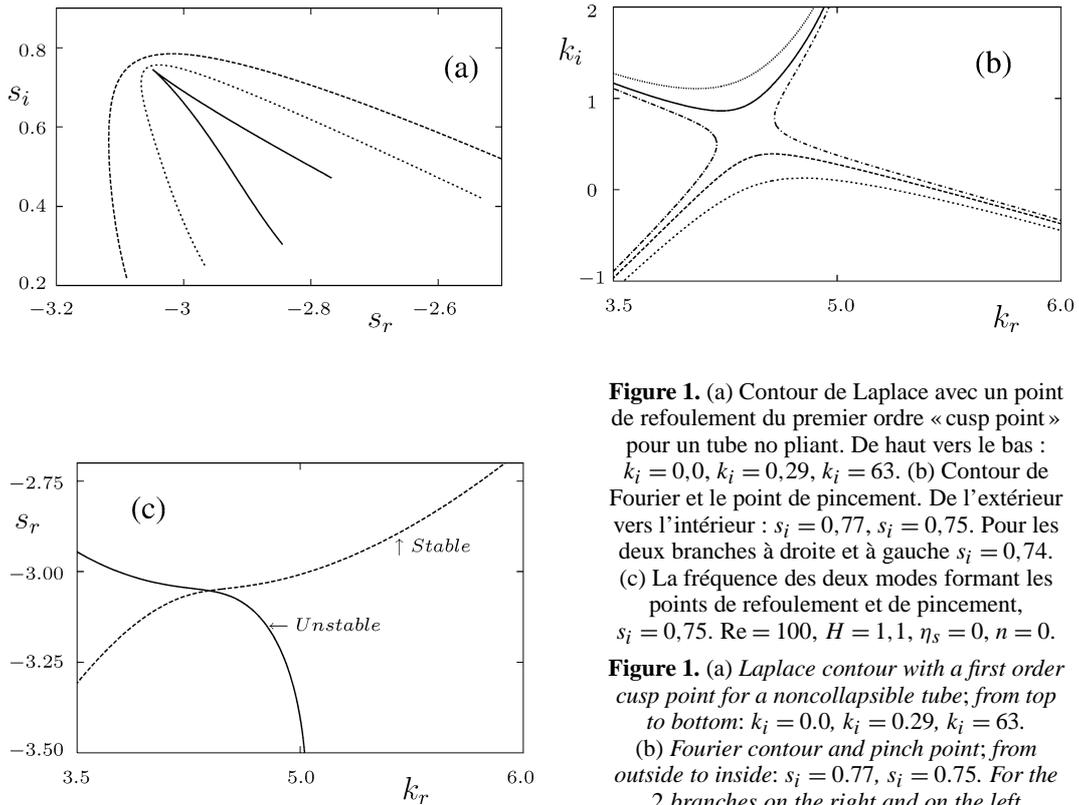


Figure 1. (a) Contour de Laplace avec un point de refolement du premier ordre « cusp point » pour un tube no pliant. De haut vers le bas : $k_i = 0,0$, $k_i = 0,29$, $k_i = 63$. (b) Contour de Fourier et le point de pincement. De l'extérieur vers l'intérieur : $s_i = 0,77$, $s_i = 0,75$. Pour les deux branches à droite et à gauche $s_i = 0,74$. (c) La fréquence des deux modes formant les points de refolement et de pincement, $s_i = 0,75$. $Re = 100$, $H = 1,1$, $\eta_S = 0$, $n = 0$.

Figure 1. (a) Laplace contour with a first order cusp point for a noncollapsible tube; from top to bottom: $k_i = 0,0$, $k_i = 0,29$, $k_i = 63$. (b) Fourier contour and pinch point; from outside to inside: $s_i = 0,77$, $s_i = 0,75$. For the 2 branches on the right and on the left $s_i = 0,74$. (c) The frequency of the 2 modes forming the cusp and pinch points, $s_i = 0,75$. $Re = 100$, $H = 1,1$, $\eta_S = 0$, $n = 0$.

Tableau 1. Caractéristique des modes absolument instables en leurs point de refolement « cusp points » n : nombre d'ondes azimuthal, k_r : nombre d'ondes, k_i : taux d'amplification spatiale, s_i : taux d'amplification temporel, s_r : la fréquence.

Table 1. Characteristics of the absolute unstable modes in their cusp points. $n =$ azimuthal wave number, $k_r =$ wave number, $k_i =$ spatial amplification rate, $s_i =$ temporal amplification rate, $s_r =$ frequency.

n	k_r	k_i	s_i	s_r
1	0,86	0,72	0,157	0,929
2	0,06	0,24	0,047	0,874
3	0,17	0,28	0,102	1,732
4	0,31	0,25	0,121	2,671
5	0,39	0,19	0,110	3,661
6	0,42	0,13	0,072	4,679

stables se propageant dans des directions opposées aux directions des modes instables. Les fréquences des autres modes de ce groupe sont des multiples de la première fréquence, et ceci, est en bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux existants dans la littérature sur les tubes pliants (voir [10,11]). Le rapport des fréquences observés ne change pas lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement croît. Le premier mode d'instabilité absolue devient convectivement instable pour des valeurs de nombre de Reynolds grand tandis que les autres modes restent absolument instables

2. Conclusion

Une nouvelle méthode numérique est développée afin d'étudier la stabilité de l'écoulement de Poiseuille en conduite cylindrique viscoélastique. Il est montré que lorsque la conduite est non pliante l'instabilité absolue de système est induite par un mode axisymétrique. Pour une conduite pliante l'instabilité absolue du système est induite par un ensemble des modes non-axisymétriques. Le rapport des fréquences de ces modes d'instabilité absolue en leurs point de refoulement « cusp points » est en bon accord avec les résultats expérimentaux. En fin, notons que la viscosité de milieu solide amortie à différent degré ces modes instables que le tube soit pliant ou non pliant.

Références bibliographiques

- [1] M. Hamadiche, Instabilité causée par l'interaction fluide/structure, 34ème colloque d'aérodynamique, appliqué de la AAAF, 23–25 mars, ESM2, Marseille, France, 1998.
- [2] M. Hamadiche, Energy flux from flowing fluid to an elastic wall generated by unstable modes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIB 327 (1999) 1155–1170.
- [3] M. Hamadiche, M. Gad-el-Hak, Temporal stability of flow through viscoelastic tubes, J. Fluids Structures 16 (3) (2002) 62.
- [4] P. Huerre, A. Monkewitz, Local and global instabilities in spatially developing flows, Annu. Rev. Fluid Mech. 22 (1990) 473–537.
- [5] K. Kupfer, A. Bers, A.K. Ram, The cups map in the complex-frequency plane for absolute instabilities, Phys. Fluids 30 (10) (1987) 3075–3082.
- [6] M.R. Scott, H.A. Watts, Computational solution of linear two-point boundary value problems via orthonormalization, SIAM J. Numer. Anal. 14 (1) (1977) 40–70.
- [7] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudies, Cours de Mathématiques, Algèbre, Vol. 1, Dunod Université, Bordas, Paris, 1977.
- [8] P.W. Carpenter, A.D. Garrad, The hydrodynamic stability of flows over Karman-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities, J. Fluid Mech. 170 (1986) 199–232.
- [9] T.B. Benjamin, The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows, J. Fluid Mech. 16 (1963) 436–450.
- [10] C.D. Bertram, R.J. Castles, Flow limitation in uniform thick-walled collapsible tubes, J. Fluids Structures 13 (1999) 399–418.
- [11] C.D. Bertram, S.A. Godbole, Area and pressure profiles for collapsible-tube oscillations of three types, J. Fluids Structures 9 (1995) 257–277.
- [12] R.J. Briggs, Electron-Stream Interaction with Plasmas, MIT Press, Cambridge, MA, 1964, Chapter 2.